

Kapitalverdimodellen og faktormodeller

Kapittel 9

Dagens tekst

KVM: Bakgrunn og forutsetninger

Sharpe-forholdet

Kapitalverdimodellen

Betaene kan adderes

KVM og gjeld

Faktormodeller

Kapitalverdimodellen (KVM)

Hensikten er å komme frem til *kapitalverdimodellen*:

- ▶ Det finnes en risikofri rente i økonomien
- ▶ “Alle” eiendeler i økonomien inkluderes i *markedsporteføljen*
- ▶ Modellen utvikles med relativt enkle forutsetninger om investorers adferd og markedenes virkemåte (omsettelighet, arbitrasjefrihet)

Forutsetninger for KVM

1. Investorene er risikoaverse individer som maksimerer sin forventede nytte ved slutten av perioden.
2. Investorene er pristilpassere som har homogene forventninger om eiendelenes avkastning. Avkastningene har en felles normalfordeling.
3. Det finnes en risikofri eiendel som er slik at investorene kan låne og låne ut ubegrensede beløp til den risikofrie renten.
4. Eiendelenes antall og størrelse er gitt. Alle eiendeler kan selges og er perfekt oppdelbare.
5. Markedene for eiendelene er friksjonsløse og informasjon er tilgjengelig for alle investorer samtidig og uten kostnader.
6. Der er ingen markedsimperfeksjoner slik som skatter, reguleringer eller begrensninger på short-salg.

Sharpe-forholdet

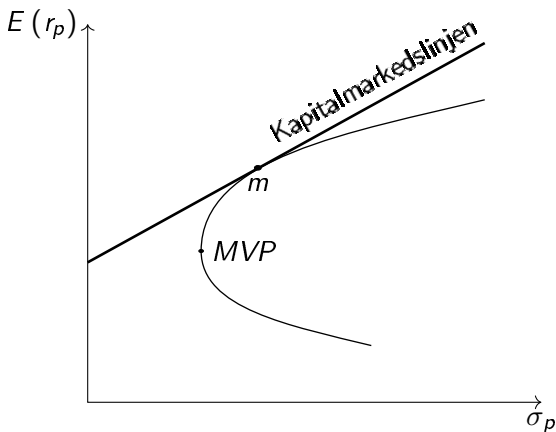
$$\text{Sharpe-forholdet} = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \frac{\text{Porteføljens meravkastning}}{\text{Porteføljens volatilitet}} \quad (1)$$

EKS: Avkastning i porteføljen ventes å være 20%, risikofri rente er 5% og volatiliteten i porteføljen er 25%. Sharpe-forholdet er:

$$SF = \frac{20 - 5}{25} = 0.60$$

- ▶ Alle investorer vil være enige i et ønske om å gjøre SF størst mulig
- ▶ Anta vi kan sette alle eiendelene i økonomien inn i porteføljen. Da fremkommer *markedsporteføljen* m .

Kapitalmarkedslinjen



Kapitalmarkedslinjen er den nye effisiensgrensen; porteføljer under linjen domineres av kapitalmarkedslinjen

To-fondsresultatet

Med markedsportefølje og en risikofri eiendel fremkommer:

Tofond-resultatet Dette sier at

- ▶ Alle investorer bestemmer først den optimale porteføljen av risikofylte investeringer, dvs. m fastlegges. Denne er identisk for alle.
- ▶ Den beste kombinasjon av risikofri investering og risikofylt portefølje (m) for hver enkelt investor bestemmes deretter ut fra personlig risikoholdning.

Alle investorer vil altså plassere seg et eller annet sted langs den rette linjen r_f, m i diagrammet.

Markedsporteføljen gir KVM

Når markedsporteføljen er porteføljen, er Sharpe-forholdet:

$$\text{Sharpe-forholdet} = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \quad (2)$$

- ▶ Når alle eiendeler er i porteføljen, er alle investorer enige om at Sharpe-forholdet beskriver den beste effisiensgrensen.
- ▶ Nå gjenstår bare småting for å utlede KVM

Investeringsråd: Hold markedsporteføljen!

- ▶ Når markedsporteføljen gir det maksimale Sharpe-forholdet, bør man holde en del markedsportefølje og en annen del risikofri investering

Markedsverdien av et selskap (MV_i)

$$MV_i = \text{Børskurs} \times \text{Antall aksjer} \quad (3)$$

Summér verdiene til alle aksjer i en gitt økonomi, som gir markedsporteføljen MV , dvs:

$$MV = \sum_{i=1}^n MV_i \quad (4)$$

Det enkelte selskaps vekt x_i i markedsporteføljen er proporsjonal med dens verdi:

$$x_i = \frac{MV_i}{MV} = \frac{MV_i}{\sum_i^n MV_i} \quad (5)$$

MV må verdivektes

Verdivektet portefølje: en portefølje som gjenspeiler markedsporteføljen. Fordeler:

- ▶ Behøver ikke å rebalansere porteføljen (kjøpe og selge aksjer) når markedsprisene endres
- ▶ Må bare rebalansere når nye aksjer utstedes eller selskapene kjøper tilbake aksjer

Kalles også en **passiv portefølje**

Kapitalverdimodellen KVM

Nå kan det vises at KVM kan utledes.

- ▶ En aksje i bidrar til porteføljens volatilitet gjennom kovariansen med porteføljen: σ_{im}
- ▶ Standardiser denne kovariansen med variansen til markedet,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \quad (6)$$

- ▶ β_i er eiendel i 's følsomhet for markedsendringer

Kapitalverimodellen

Dette leder frem til KVM:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \quad (7)$$

Selskapets kapitalkostnad beskrives som en lineær sammenheng et fast ledd r_f og et variabelt ledd bestående av:

$(E(r_m) - r_f)$ Markedets risikopremie

β_i Selskap i sin samvariasjon med markedsporteføljen.
Samvariasjonen er standardisert

En enkel, lineær sammenheng mellom systematisk risiko og foretakets kapitalkostnad

Eks: $r_f = 3.0\%$, $E(r_m) = 8.0\%$, $\beta_i = 1.25$.

$$E(r_i) = 3.0 + (8.0 - 3.0)1.25 = 9.25\%$$

Mer om beta

Beta til den risikofrie renten r_f er null ($\beta_f = 0$) og til markedet:

$$\beta_m = \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2} = 1.0 \quad (8)$$

Videre:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_i \cdot \sigma_m \cdot \rho_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \rho_{im} \quad (9)$$

siden $\sigma_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}$

KVM og Sharpe-forholdet

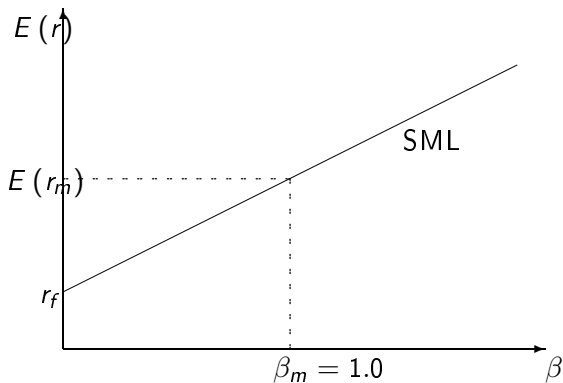
Kan dermed også skrive KVM:

$$E(r_i) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \sigma_i \rho_{im} \quad (10)$$

der

$(E(r_m) - r_f) / \sigma_m$. Prisen pr. enhet risiko. Dette er Sharpe-forholdet for markedsporteføljen

KVM gir rett linje mellom risiko og avkastning



Kapitalmarkedslinjen. SML = Security Market Line. Sharpe (1964); Mossin (1966); Lintner (1965)

Mer eller mindre risiko

- $\beta = 1.0$ Selskapets systematiske risiko er den samme som den systematiske risikoen i markedet.
- $\beta < 1.0$ Selskapets systematiske risiko er lavere enn markedets.
- $\beta > 1.0$ Selskapets systematiske risiko er høyere enn markedets.

Betaene kan adderes

Avkastningen til en portefølje:

$$E(r_p) = \sum_i^N w_i r_i \quad (11)$$

Skriv også kovariansen σ_{im} som $\text{cov}(r_i, r_m)$. β_p til en portefølje

$$\begin{aligned} \beta_p &= \frac{\text{cov}(r_p, r_m)}{\text{var}(r_m)} = \frac{\text{cov}\left(\sum_i^N w_i r_i, r_m\right)}{\text{var}(r_m)} = w_i \frac{\text{cov}\left(\sum_i^N r_i, r_m\right)}{\text{var}(r_m)} \\ &= \sum_i^N w_i \beta_i \end{aligned} \quad (12)$$

β til en portefølje er altså det veide gjennomsnittet av β 'ene i porteføljen

Den veide, gjennomsnittlige kapitalkostnad

Totalkapitalens beta β_T er en veid sum av beta til egenkapitalen og gjeld:

$$\beta_T = \frac{E}{V}\beta_E + \frac{D}{V}\beta_D \quad (13)$$

Anta $\beta_D = 0$. Da er den veide, gjennomsnittlige kapitalkostnaden uten skatt:

$$r_T = r_{wacc} = \frac{E}{V}r_E + \frac{D}{V}r_D \quad (14)$$

Med skattesats τ_c og fradragsberettigede rentekostnader:

$$r_T = r_{wacc} = WACC = r_E \frac{E}{V} + r_D (1 - \tau_c) \frac{D}{V} \quad (15)$$

Egenkapital- og gjeldsandelene er vektor. (WACC er "Weighted Average Cost of Capital").

Motpartsrisiko

Motpartsrisiko Motparten er ikke i stand til å oppfylle sine forpliktelser. Eks.: Betale tilbake lånet.

- ▶ En investor tar opp et lån B
- ▶ p sannsynlighet for manglende tilbakebetaling, $1 - p$ for at lånet betales
- ▶ L den delen av lånet som ikke tilbakebetales

Långiver vil ha kompensert for motpartsrisiko:

$$r_D = (1 - p)B + p(B - L) = B - pL \quad (16)$$

Men vi har også r_D fra KVM:

$$r_D = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_D \quad (17)$$

spesifikk for hver låntaker.

Faktormodeller

- ▶ Teorien er at KVM ikke fanger opp alle forhold i økonomien som er relevante for fastsetting av kapitalkrav.
- ▶ En kjent og mye brukt faktormodell er Fama-French-Carhart (Fama and French, 1993; Carhart, 1997).
- ▶ Modellen tar hensyn til små selskaper, pris-bok-forholdet og aksjekursens moment.
- ▶ Likviditet er foreslått av Næs et al. (2011).

Modellen:

$$E(r_i) = r_f + \beta_{im}(r_m - r_f) + \beta_{i2}r_{SMB} + \beta_{i3}r_{HML} + \beta_{i4}r_{PR1YR} + \beta_{i5}r_{LIQ} \quad (18)$$

Faktormodellen: Et eksempel

Anta at vi har følgende avkastninger og betaer til faktorene

Faktor	Avkastning	Beta
Marked	8.00	0.95
SMB	2.50	-0.25
HML	4.20	0.18
PR1YR	7.50	0.32
LIQ	6.10	0.65

Vi skal beregne krav til kapitalkostnad fra tallene

Kapitalkostnad etter faktormodellen

Faktor	Avkastning	Beta	Bidrag
Marked	8.00	0.95	7.60
SMB	2.50	-0.25	-0.63
HML	4.20	0.18	0.76
PR1YR	7.50	0.32	2.40
LIQ	6.10	0.65	3.97
Sum			14.10
Risikofri			3.00
Sum			17.10

Vi har at $E(r_i) = 17.10\%$. Sammenlignet med KVM er dette neste 7% høyere.

Litteratur I

- Carhart, M. M. (1997). On persistence in mutual fund performance. *Journal of Finance* 52(1), 57–82.
- Fama, E. F. and K. R. French (1993, Mar). Common risk factors in the returns on bonds and stocks. *Journal of Financial Economics* 33, 3–53.
- Lintner, J. (1965). A valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economic Studies* 47, 13–37.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* 35, 768–783.
- Næs, R., J. A. Skjeltop, and B. A. Ødegaard (2011). Stock market liquidity and the business cycle. *Journal of Finance* 66(1), 139–176.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* 19, 425–442.