Kap. 5: Oppgaver – Løsningsforslag

1

1.1

Renten er oppgitt pr. måned. Årsrenten finner vi ved

$$r_{eff} = (1 + r_{mnd})^{12} - 1 \tag{1}$$

der r_{eff} er den effektive renten, eller den faktiske årsrenten du betaler, mens r_{mnd} er månedsrenten. Da har vi:

$$r_{eff1} = 1.0183^{12} - 1 = 0.2431 \qquad r_{eff2} = 1.0184^{12} - 1 = 0.2446$$

dvs. den effektive årsrenten har økt fra 24.31% til 24.46%.

1.2

Jeg må altså betale

$$\text{Rentebetalingsøkning} = 1000(0.2446 - 0.02431) = 1.50$$

mer på lånet.

1.3

Renten er altså 39% pr. år eller 0.39. Vi finner månedsrenten ved å ta 12' rot, eller

$$r_{mnd} = (1 + r_{eff})^{1/12} - 1$$

Vi har altså:

$$r_{mnd} = (1.39)^{1/12} - 1 = 0.0278$$

eller en månedsrente på 2.78%.

1.4

Dagsrenten er 4.69%. Årsrenten er, etter (1):

$$r_{eff} = 1.0469^{365} - 1 = 18,424,593.09$$

eller 1,842,459,309%!

Gjelden etter ett år vil altså være

$$1.000 \times (1 + 18,424,593.09) = 18,424,594,090.$$

Gjelden har altså vokst til NOK 184.245.941, altså nesten 185 mill kroner på ett år. En slik gjeld er selvsagt hypotetisk, siden den blir betalt tilbake hver dag.

2

2.1

Anta at lånet er på fjorten dager, eller to uker. Låneren får utbetalt USD 350 og betaler tilbake USD 400 to uker senere. Renten på lånet i disse fjorten dagene er

$$r_{14dgr} = \frac{400 - 350}{350} = 0.1429.$$

Det er 26 uker i ett år. Fra (1) har vi da at den effektive årsrenten blir:

$$r_{eff} = (1 + 0.1429)^{26} - 1 = 31.20 \qquad = 3,120\%.$$

Lønningslåneren må betale en effektiv rente på over 3,000%.

2.2

Er utlånstjenesten nyttig? Det er to mulige tolkninger:

1. Tjenesten er nyttig fordi den tillater låneren til å utjevne konsum, spesielt hvis man opplever et plutselig fall i husholdningens likviditet.
2. Tjenesten er ikke nyttig fordi den stimulerer lånere til overkonsum, noe som kan ende med gjeldsslaveri. Noen husholdninger vil derfor foretrekke ikke å ha muligheten til å ta slike lån, men heller binde seg til den disiplinen som den faste lønnsutbetalingen i perioden gir. Man sier slike personer har manglende selvkontroll. En annen grunn kan være at personer er nærsynte i den forstand at de fokuserer bare på å tilfredsstille dagens behov. Man har "tids-inkonsistente preferanser".

Morse (2011) finner at utlånerne utfører en nyttig tjeneste ved at man utjevner konsum i tilfeller med en inntektssvikt. Hun gjør dette ved å sammenligne husholdninger som har blitt påført en inntektssvikt utenfra med husholdninger som ikke har opplevd en inntektssvikt pga. utenforliggende omstendigheter. Hun bruker naturkatastrofer i California til å skille mellom husholdninger.

3

3.1

Den effektive årsrenten i tilfellet med kontinuerlig forrentning har vi fra

$$r_e = e^r - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + r_e = e^r \tag{2}$$

Den effektive årsrenten når $r = 0.05$ er da:

$$r_e = e^{0.05} - 1 = 0.05127$$

og $r = 0.075$

$$r_e = e^{0.075} - 1 = 0.07788.$$

3.2

Vi får en kontantstrøm $K_1 = 1200$ om ett år. Den generelle formelen for neddiskontering er

$$NV\left(K_T\right) = \frac{K_T}{e^{r_k T}} \tag{3}$$

der T er tid til forfall. Siden $T = 1$ i denne deloppgaven, er nåverdien

$$NV\left(K_1\right) = \frac{1150}{e^{0.05 \cdot 1}} = 1093.91$$

hvis $r = 0.05$ og

$$NV\left(K_1\right) = \frac{1150}{e^{0.075 \cdot 1}} = 1066.91$$

hvis $r = 0.075$.

3.3

Tid til forfall forandres nå. Først er $T = 2$ for $r = 0.05$, dvs.

$$NV\left(K_2\right) = \frac{1150}{e^{0.05 \cdot 2}} = 1040.56.$$

Hvis $r = 0.075$ har vi at $NV\left(K_2\right) = 979.81$.

Når forfall er om et halvt år, har vi at $T = 0.5$. Med $r = 0.05$ gir dette

$$NV\left(K_{0.5}\right) = \frac{1150}{e^{0.05 \cdot 0.5}} = 1121.61.$$

Hvis $r = 0.075$ blir $NV\left(K_{0.5}\right) = 1107.67$.

4

Realrentene er vist i tabell 1 nedenfor.

Realrente finner vi fra sammenhengen

$$r_{real} = \frac{r_{nom} - 1}{1 + i} \tag{4}$$

hvor i er inflasjon. For januar finner vi for eksempel:

$$r_{real} = \left(\frac{0.125 - 0.059}{1 + 0.059}\right) \times 100 = 6.23.$$

Tabell 1 Realrente i de første månedene av 1985

Måned	Stat10	Inflasjon	Realrente
januar 85	12.50	5.9	6.23
februar 85	12.74	5.6	6.76
mars 85	12.81	5.6	6.83
april 85	12.87	5.5	6.99
mai 85	12.87	5.8	6.68
juni 85	12.92	6.0	6.53

5

Figuren viser tydelig at realrenten avhenger av nominell rente og inflasjon.

Nominell rente Når nominell rente stiger, stiger også realrenten, gitt at inflasjonen er konstant.

Inflasjon Når inflasjonen stiger, synker realrenten, gitt at nominell rente forblir konstant.

Sammenhengen er tydeligst for den store økningen i inflasjonen som fant sted i 1986 og 1987. I slutten av perioden er realrenten forholdsvis stabil. Da utlignes fallet i nominell rente av et samtidig fall i inflasjonen.

6

6.1

Alternativ A: To år. Rentebetalingen blir

$$(1 + 0.040)^2 = 1.0816$$

Alternativ B: Ettårig lån og overrulling med forwardavtale. Samlet rentebetaling:

$$(1 + 0.038) \cdot (1 + 0.041) = 1.0806.$$

Alternativ B er å foretrekke.

6.2

Forwardrenten i år 2, f_2 er ukjent. Skal alternativene være like gode, må vi ha at

$$(1+0.040)^2 = (1+0.038)\cdot(1+f_2)$$

som impliserer at forwardrenten blir

$$(1+f_2) = \frac{(1+0.040)^2}{(1+0.038)} = 1.042 \qquad \text{og} \qquad f_2 = 0.042.$$

Forwardrenten måtte ha vært 4.2%.

6.3

Renten for det ettårige lånet r_1 er ukjent. Skal alternativene være like gode, må vi ha at

$$(1+0.040)^2 = (1+r_1)\cdot(1+0.041)$$

som impliserer at ettårsrenten blir

$$(1+r_1) = \frac{(1+0.040)^2}{(1+0.041)} = 1.039 \qquad \text{og} \qquad r_1 = 0.039.$$

Ettårsrenten måtte være 3.9%.

6.4

Toårsrenten r_2 er ukjent. Skal alternativene være like gode, må vi ha

$$(1+r_2)^2 = (1+0.038)\cdot(1+0.041) = 1.0806$$

Dette betyr videre at

$$\sqrt{(1+r_2)^2} = \sqrt{1.0806} = 1.0395 \qquad \text{og} \qquad r_2 = 0.0395.$$

Renten på det toårige lånet må være 3.95%.

6.5

Dette er *markedets fundamentale likevektsbetingelse* og er generelt gitt av

$$(1 + r_2)^2 = (1 + r_1) \cdot (1 + f_2)$$

for en sammenheng for de to nærmeste periodene.

7

7.1

Avkastningen for en aksje S_t, eller et hvilket som helst verdipapir, fra en periode til en annen er gjerne gitt av

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \tag{5}$$

Avkastningene kan også beregnes såkalt logaritmisk.

Avkastningene er samlet i tabell 2.

For eksempel fremkommer avkastningen i år 3 for aksje A som

$$r_3 = \frac{142.72 - 94.59}{94.59} = 0.5078 \sim 0.51.$$

De øvrige resultatene fremkommer på samme måte.

7.2

Den gjennomsnittlige aritmetiske avkastningen for aksje A for alle årene vi har avkastninger for er gitt av

$$r_a = \sum_{t=1}^{11} \frac{r_t}{T} \tag{6}$$

som gir

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{-0.05 + 0.51 + 0.52 + 0.11 - 0.20 + 0.14 + 0.21 + 0.02 + 0.09 + 0.05 - 0.14}{11} \\ &= 0.11 \end{aligned}$$

Tabell 2 Utregninger av avkastninger for hvert år og for hele perioden under ett

	Kurser		Avkastning	
År	Aksje A	Aksje B	Aksje A	Aksje B
1	100.00	100.00		
2	94.59	158.63	-0.05	0.59
3	142.72	161.90	0.51	0.02
4	216.42	86.30	0.52	-0.47
5	240.46	74.10	0.11	-0.14
6	192.34	60.81	-0.20	-0.18
7	219.20	70.73	0.14	0.16
8	265.59	79.96	0.21	0.13
9	269.66	93.73	0.02	0.17
10	293.45	54.80	0.09	-0.42
11	308.28	30.80	0.05	-0.44
12	266.45	28.17	-0.14	-0.09
Aritmetisk avkastning			0.11	-0.06
Geometrisk avkastning			0.09	-0.11

Tilsvarende finner vi at den gjennomsnittlige avkastningen for aksje B er $r_{aB} = -0.06$.

Den gjennomsnittlige geometriske avkastningen for aksje A er gitt av

$$r_g = \left((1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_T)\right)^{1/T} - 1 \tag{7}$$

I denne oppgaven har vi at

$$\begin{aligned} r_g &= (0.95 \cdot 1.51 \cdot 1.52 \cdot 1.11 \cdot 0.80 \cdot 1.14 \cdot 1.21 \cdot 1.02 \cdot 1.09 \cdot 1.05 \cdot 0.86)^{1/11} - 1 \\ &= 0.09. \end{aligned}$$

På samme måte finner vi at avkastningen for B i perioden er $r_{gB} = -0.11$.

7.3

Geometrisk avkastning forteller hva avkastningen for en tidligere periode har vært, mens aritmetisk gjennomsnitt viser den avkastningen som er forventet i kommende periode, gitt de avkastninger som har vært tidligere.

Du ville forvente at investeringen vil vokse til

$$1000 \cdot 1.11 = 1,110$$

etter ett år.

7.4

Den gjennomsnittlige aritmetiske avkastningen er $r_a = 0.11$ for aksje A. Bruker vi denne avkastningen for alle årene, kommer vi frem til en forventet sluttverdi $E\left(K_T\right)$:

$$E\left(K_T(A)\right) = 100 \cdot (1 + 0.11)^{11} = 327.24.$$

For B har vi at $E\left(K_T(B)\right) = 50.98$.

Bruker vi i stedet den gjennomsnittlige geometriske avkastningen, får vi sluttverdiene $E\left(K_T(A)\right) = 266.45$ og $E\left(K_T(A)\right) = 28.17$.

Den gjennomsnittlige geometriske avkastningen gir med andre ord den korrekte *historiske* avkastningen, mens den aritmetiske bommer temmelig mye i dette tilfellet.

8

Vi skal nå se på logaritmiske avkastninger. Vi bruker den naturlige logaritmen.

8.1

En oversikt over resultatene er gitt i tabell 3.

For hvert år har vi brukt formelen

$$\ln\left(1 + r_t\right) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln\left(S_t\right) - \ln\left(S_{t-1}\right) \tag{8}$$

For avkastningen i år 4 for aksje A har vi

$$\ln\left(1 + r_4\right) = \ln\left(\frac{216.42}{142.72}\right) = 0.42.$$

Tabell 3 Utregninger av logaritmiske avkastninger for hvert år og for hele perioden under ett

	Kurser		Avkastning	
År	Aksje A	Aksje B	Aksje A	Aksje B
1	100.00	100.00		
2	94.59	158.63	-0.06	0.46
3	142.72	161.90	0.41	0.02
4	216.42	86.30	0.42	-0.63
5	240.46	74.10	0.11	-0.15
6	192.34	60.81	-0.22	-0.20
7	219.20	70.73	0.13	0.15
8	265.59	79.96	0.19	0.12
9	269.66	93.73	0.02	0.16
10	293.45	54.80	0.08	-0.54
11	308.28	30.80	0.05	-0.58
12	266.45	28.17	-0.15	-0.09
Sum avkastninger (ln)			0.98	-1.27
Gj.sn. avkastning (ln)			0.09	-0.12

I prosent er avkastningen

$$e^{\ln(1+r_4)} = e^{42}$$
$$1 + r_4 = 1.52 \Rightarrow r_4 \cdot 100 = (1.52 - 1.00)100 = 52\%$$

idet vi benytter at $e^{\ln x} = x$.

8.2

Avkastningen for hele perioden kan beregnes på to måter når vi har logaritmiske avkastninger.

Metode 1: Summér avkastningene. Vi ser at for aksje A har vi at summen er

$$\ln(1 + r_T) = \sum_{t=2}^{12} (1 + r_t) = 0.98$$

Vi finner da avkastningen for hele perioden ved ta antilogaritmen:

$$e^{\ln(1+r_T)} = 1 + r_T = e^{0.98} = 2.6645$$

og $r_T = 166.45\%$.

På samme måte finner vi at avkastningen for B er -71.83%.

Metode 2: Bruk start- og sluttverdier. Vi setter nå:

$$\ln(1 + r_T) = \ln\left(\frac{S_T}{S_1}\right)$$

Dette gir oss:

$$\ln(1 + r_T) = \ln\left(\frac{266.45}{100.00}\right) = 0.98.$$

Vi ser at resultatet er det samme som i Metode 1. De to metodene gir dermed samme svar.

8.3

Den gjennomsnittlige logaritmiske avkastningen er funnet ved å dele avkastningen for hele perioden med de 11 årene vi har avkastninger for. Sett $r'_t = \ln(1 + r_t)$. Gjennomsnittlig logaritmisk avkastning $\bar{r}'$ er da: $\bar{r}' = r'_T/11$, dvs. $\bar{r}' = 0.98/11 = 0.09$.

Nå kan vi omforme dette til en absolutt avkastning i gjennomsnitt ved å ta antilogaritmen: $e^{\bar{r}'} = e^{0.09} - 1 = 0.09318$, og sluttverdi er nå:

$$S_T(A) = 100 \cdot (1 + 0.09318)^{11} = 266.45.$$

På samme måte finner vi at sluttverdien for B er $S_T(B) = 28.17$. Den logaritmiske metoden er dermed konsistent med det faktiske forløp for investeringen.

Referanser

Morse, A. (2011, Oct). Payday lender: Heroes or villains? *Journal of Financial Economics 102*(1), 28 – 44.