Oppgave 1

Gitt to vektorer $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ og $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

a) i) Bestem vinkelen mellom vektorerene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
Bestem en enhetsvektor langs $\mathbf{u}$. Bestem lengden til vektoren $\mathbf{v}$ langs $\mathbf{u}$.
ii) Finn en vektor $\mathbf{w_1}$ som står normalt på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
iii) Finn en vektor $\mathbf{n_1}$ som står normalt på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og som har lengde 1.
Hvor mange slike vektorer finnes det?

b) i) Finn ei uttrykk for planet som går gjennom punktet $P = (2, -1, 3)$, og som har vektoren $\mathbf{w_1}$ som normalvektor.
ii) Gå ut fra at de to vektorane $\mathbf{w_1}$ og $\mathbf{n_1}$ du fant i a) er ulike. Vil det bety noe for planet du fant om du hadde valgt $\mathbf{n_1}$ som normalvektor i steden for?

c) i) Hva er den korteste avstanden fra origo til planet du har funnet i del **b i)**?
ii) Hva er den korteste avstanden fra punktet $M(5, -3, 1)$ til planet i del **b i)**

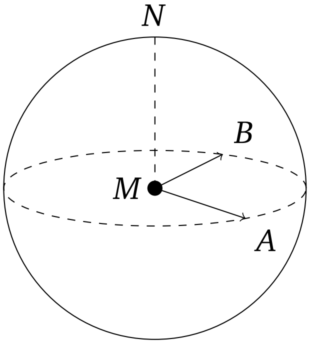
Oppgave 2

a) Gitt at $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, der vi vet at $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ og $|\mathbf{u}| = 3$. La også $\mathbf{e}$ være en enhetsvektor rettet *motsatt* av $\mathbf{u}$.

i) Regn ut $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}$. Angi skalarprojeksjonen av $\mathbf{w}$ inn på en akse med samme retning som $\mathbf{e}$.

ii) Vi får også oppgitt at $|\mathbf{v}| = 2$. Regn ut $|\mathbf{w} \times \mathbf{e}|$.

Vi ser så på en kule med radius 4. Tenk på punktet N som kulas «nordpol», og M som kulas midtpunkt (sentrum). Vektorene $\overrightarrow{MB}$ og $\overrightarrow{MA}$ er ortogonale, og de er tegnet i planet som står vinkelrett på $\overrightarrow{MN}$ og går gjennom M.



b) Vi velger en ortonormert basis $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ med $\mathbf{i}$ langs $\overrightarrow{MA}$ og $\mathbf{j}$ langs $\overrightarrow{MB}$.

i) Punktet P på kuleflaten er gitt ved $\overrightarrow{MP} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Vis at da må $t = \pm\sqrt{3}$.

ii) Vi velger så $t = \sqrt{3}$. Finn da likningen for planet som går gjennom P og står vinkelrett på $\overrightarrow{MP}$. Sett origo i M.

iii) Bestem en enhetsvektor langs linjen som går gjennom A og N.

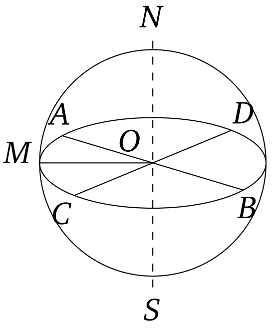
Oppgave 3

a) La $\mathbf{n}$ være en enhetsnormalvektor til et plan. En vektor $\mathbf{a}$, som har lengde $|\mathbf{a}| = 3$, ligger i planet.

i) Forklar hvorfor $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}$ også ligger i planet. Finn $|\mathbf{b}|$, og deretter en enhetsvektor i samme retning som $\mathbf{b}$ (uttrykt ved $\mathbf{n}$ og $\mathbf{a}$).

ii) Anta så at $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Vi har gitt vektoren $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, der A er et punkt i planet og P et punkt utenfor planet. Finn skalarprojeksjonen av $\mathbf{a}$ inn på $\mathbf{n}$. Finn også avstanden fra P ned til planet.

b) Figuren viser en kule med radius 4 og sentrum i O. La N og S være «nordpol» og «sydpol» på kulen. AB og CD er to linjestykker som står vinkelrett på hverandre, og som ligger i «ekvatorplanet». Vi velger en høyrehånds ortonormert basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, der $\overrightarrow{OA} || \mathbf{i}$ og $\overrightarrow{ON} || \mathbf{k}$. M ligger midt mellom A og B. Et punkt P på overflaten av kulen er gitt ved $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k}$.



i) Sett opp vektorene $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{OM}$ og $\overrightarrow{MN}$.

ii) Sett opp en normalvektor for planet gjennom M, A og N.
Sett opp en enhetsvektor langs denne normalvektoren.
Bestem avstanden fra punktet P til dette planet.
Sett opp ligningen for planet gjennom M, A og N. Bruk S som origo.

Oppgave 4

a) Gitt matrisene $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

i) Regn ut **AB**.
Bruk dette til å bestemme $\mathbf{A}^{-1}$ og determinanten til $\mathbf{A}$ (det($\mathbf{A}$)).

ii) Skriv lignigssystemet på matrise form:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$
$$x_2 + x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

Bruk i) til å løse systemet.

iii) Det er gitt vektorene: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Undersøk om $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige.

Oppgave 5

En kvadratisk matrise $A_{n\times n}$ kan diagonaliseres bare og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Hvis A er *diagonaliserbar*, og $A = MDM^{-1}$, så er kolonnene til M egenvektorene til A og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen.

a) Gitt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Løs egenverdiproblemet og diagonaliser **A**. Finn en formel for A^n ved hjelp av diagonaliseringen(Du behøver ikke å gange matrisene sammen).

b) Vis at $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ er ikke diagonaliserbar.

c) Gitt matrisen: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Vis at A er symmetrisk ($A^T = A$). Bestem egenverdi og egenvektorene. Vis at egenvektorene er ortogonale. Diagonliaser A.

d) La A være en 2×2 reell matrise gitt ved $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, der α er et reelt tall og $\alpha \neq 0$ For hvilke verdier av α er A diagonaliserbar (som en reell matrise)? Begrunn svaret.

e) La B være matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut egenverdiene og egenvektorene til B.
Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}BP = D$. Finn B^5.

f) La $T : V \to W$, der V og W er to vektorrom, er en lineærtransformasjon dersom:

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ og

2) $T(kv_1) = kT(v_1)$ der v_1 og $v_2 \in V$.

i) La $U = \{q(x) = ax^2 + bx + c, a; b; c \in R\}$ være vektorrommet av alle polynom av andre grad. Vis at avbildningen $T(q(x)) = q'(x)$ er en lineærtransformasjon.

ii) Undersøk om avbildningene $T(q(x)) = \int q(x)\,\mathrm{d}x$ og $T(q(x)) = \sqrt{q(x)}$ er også lineære?

Oppgave 6
Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 6 \end{cases}$$

a) Skriv ligningssystemet på formen: $A\mathbf{x} = b$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Regn ut $|A|$. Bruk Gauss eliminasjon til å bestemme for hvilke verdier av α har systemet en bestemt løsning (en entydig løsning).

b) Dersom $|A| = 0$, bruk Gauss eliminasjon til å avgjøre om systemet har ingen eller ubestemt løsning(uendelig mange løsninger)?

c) Regn ut løsningen for $\alpha = 2$.

Oppgave 7

a) Bestem k slik at vektorene blir lineært uavhengige: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 5x_2 + kx_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Bestem for hvilke verdier av k systemet har et entydig løsning.