Oppgave 1

a) Si kort hva deriverte til en funksjon forteller oss. Hva handler deriverbarhet om?

b) Er $f(x) = \dfrac{1}{x}$ deriverbar for alle reelle x-verdier?
Bestem deriverte til f i sin definisjonsmengde.

c) Tegn grafen til $g(x) = |x|$. Forklar hvorfor g er ikke deriverbar i origo.

Oppgave 2

Løs oppgavene I og II, og kryss av det alternativet (a, b eller c) som passer best.

I En funksjon er ikke deriverbar der:

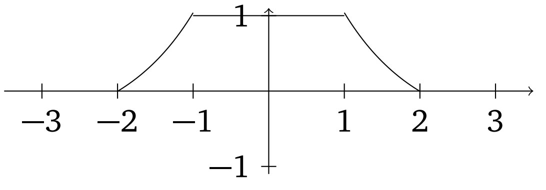
- **a** funksjonen ikke er kontinuerlig(funksjon ikke har tangent).
- **b** funksjonen er kontinuerlig men har flere enn en tangent.
- **c** enten funksjonen har ingen tangenter(ikke er kontinuerlig) eller har flere enn en tangentlinje.

II $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ har knekkpunkt i origo fordi:

- **a** funksjonen ikke er kontinuerlig i origo.
- **b** funksjonen har ikke tangent i origo.
- **c** Den deriverte er ikke definert i origo og har to tangenter.

Oppgave 3

Figuren viser grafen til en funksjon f, og vi ser at grafen har to *knekkpunkt*.



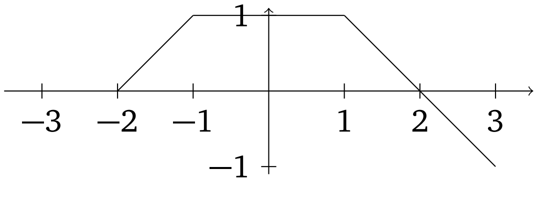
a) Hva mener vi med knekkpunkt på en graf?

b) Tegn også grafen til f' i det samme intervallet som denne grafen.

c) Er funksjonen deriverbar i knekkpunktene? Forklar.

Oppgave 4

Figuren viser grafen til $f'(x)$, deriverte til en funksjon f:



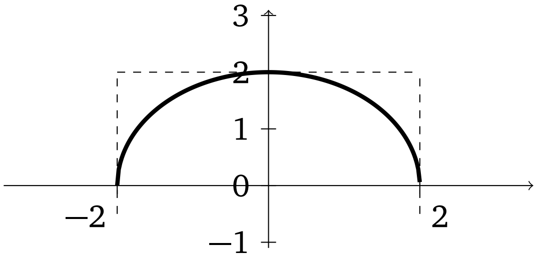
a) Angi eventuelle knekkpunkt til f.

b) Tegn også grafen til f i det samme intervallet som denne figuren.

c) Tegn grafen til f''.

Oppgave 5

a) Grafen til en funksjon $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ er vist på figuren:



b) La $f(x) = e^{-x^2}$. Regn ut $f'(x)$, og spesielt $f'(0)$. Bruk så definisjonen av $f'(0)$ til å regne ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1}{x}.$$

Oppgave 6

i) Bestem $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ når:

a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y = 2e^x + 5x^e$

c) $y = 3\sin(2x) + \tan(2x)$ d) $y = \sqrt{\sin x + \cos x}$

e) $y = \ln(\sin 2x + \cos 2x)$ f) $y = \ln(2x) - \ln x^2$

g) $y = x^2 \ln x$ h) $y = e^{2x}\cos(2x)$

i) $y = \dfrac{\ln 2x}{x}$ j) $y = \dfrac{e^{3x}}{\sin 3x + \cos 3x}$

ii) Bestem $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ når: $x^3 + y^2 = e^y$.

Oppgave 7

a) Bestem $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ når: i) $y = \cos^3(5x)$ ii) $y = e^{\sin 2x}$

b) Bestem tangenten til $y = \sin x$ i $x = 0$.
Lineariser $y = \sin x$ i origo. Hva vil dette si?

c) Berstem $F_2(x)$ (taylorpolynom av andre grad) til $f(x) = 3e^{2x} + 2\sin 3x$ i $x = 0$.

Oppgave 8

Bestem grenseverdiene:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}\qquad \text{c)}\quad \lim_{x\to a}\frac{\sin a(x-a)}{x-a}$$

Oppgave 9

a) Bestem $F_2(x)$, Taylor-polynom av andre grad til $f(x)$ i $x=0$:

$$\text{i)}\quad f(x)=e^{-2x}+\cos 3x \qquad\qquad \text{ii)}\quad f(x)=\ln(\cos x)$$

b) Lineariser $g(x)=\sqrt{x}$ om $x=1$.
Bruk dette til å bestemme en tilnærmert verdi for $\sqrt{1,1}$.

Oppgave 10

Anta at en kule vokser uten å forandre form. Radien til kule vokser med en hastighet på 0,2cm/min.

a) Bestem hvor rask volumet til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 25cm.

b) Bestem hvor rask overflaten til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 25cm.

Oppgave 11

Anta at en h =1,5m gutt er x meter unna en L=5m en lyktestolpe. Hans skyggellengde er H. Vi kommer til å vurdere to problemer:
i) Han går mot stolpen med en farten 1m/s.
ii) Han går fra stolpen med en farten 1m/s.

a) Vis at $H=\dfrac{h}{L-h}x$. Finn hvor rask lengden til hans skyggen endrer seg i del i) og ii).

b) Forklar at toppen av hans skygge har posisjon $x_1=x+H$. Finn farten som toppen til hans skygge beveger i del i) og ii).

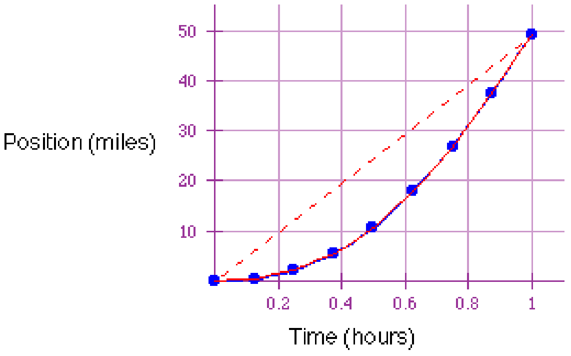
Oppgave 12

En partikkel beveger seg med en konstant horisontal hastighet 2 m/s langs kurven til $y=x^2+1$. Bestem partikkelens vertikal hastighet etter 3 sekunder.

Oppgave 13

Figuren viser posisjonen til en bil i $0 \leq t \leq 1$ timer. Det kans leses av grafen:

a) Bestem gjennomsnittlig fart i intervallet $,25 \leq t \leq 0,5$.

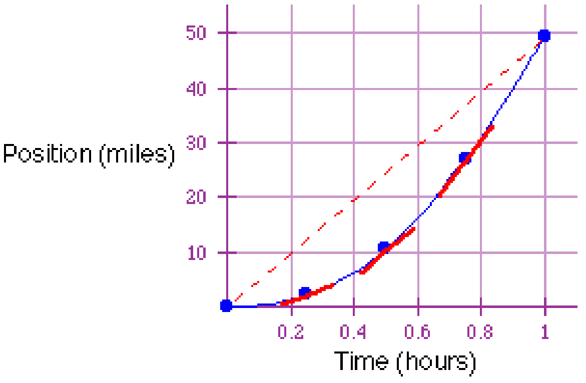


Tid, t	Posisjon,x
(hours)	(miles)
0.00	0.0
0.25	2.3
0.50	10.6
0.75	26.8
1.00	49.2

b) Anta at vi leser av grafen:

Tid, t	Posisjon,x
0.25	2,300
0.26	2,512

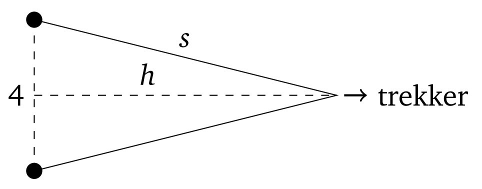
Beregn momentan hastighet i t = 0,25 .



Tid, t	Momentan hastighet
(hours)	(mph)
0.25	21.2
0.50	49.0
0.75	77.2

c) Forklar med dine ord sammenhengen mellom grafen og de gitte verdiene.

Oppgave 14
Vi har en sprettert og drar i strikken slik at vi får en likesidet trekant med en fast grunnlinje, $a = 4$, og en høyde h som øker, se figur. Sammenhengen mellom høyde h og sidekant s er $s = \sqrt{h^2 + 4}$.



La $\phi(t)$ være funksjonen som har høyden (i cm) som funksjonsverdi ($h = \phi(t)$) når argumentet er tiden t (i sekunder). Ved en gitt tid t_0 vet vi at $\phi'(t_0) = 2$.

a) Hvor fort øker høyden ved denne tiden?

b) Vi lar så $f(t)$ være lengden av sidekanten ved tiden t. Da kan vi skrive f som en sammensatt funksjon med ϕ som indre funksjon, altså $f(t) = F(\phi(t))$. Angi den ytre funksjonen F.

c) Deriver f og finn hvor fort sidekanten endres ved tiden t_0 når du får oppgitt at $\phi(t_0) = 20$.

Oppgave 15
Anta at en kule vokser uten å forandre form. Radien til kule vokser med en hastighet på 0,2cm/min.

a) Bestem hvor rask volumet til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 25cm.

b) Bestem hvor rask overflaten til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 25cm.

Oppgave 16
Gitt funksjonen $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Bestem evenutelle nullpunkt og skjæringspunkt med y-aksen.

b) Regn eventuelle ekstremalpunkt. Finn funksjonens eventuelle asymptoter. Tegn grafen.

Oppgave 17
Tegn grafen til en funksjon $f(x)$ når vi vet:

$$f(-x) = f(x), \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 0 \text{ og } \quad f(+\infty) = 1.$$