Oppgave 1

Gitt $f(x,y) = x^2y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}$ på R^2.

a) Bestem gradientvektoren i punktet $P(0,1)$. Lineariser f om punktet P. Sett opp ligningen til nivåkurven i dette punktet.

b) Regn stasjonære punkt og karakteriser disse.

c) Bestem hvor rask f endrer seg langs $v = 3i + 4j$

Oppgave 2

La $\mathbf{u} = \mathbf{i} = [1, 0]$ være enhetsvektoren langs x.aksen, og la $f(x,y) = y^2e^{2x}$.

a) Finn gradienten i generelt (i punktet (x,y)) og spesielt i punktet (0, 2).

b) Hva er den retningsderiverte $(0,2)$ langs $\mathbf{i}$ og generelt i punktet (x,y).

c) La nå $f(x,y,z)$ være en vilkårlig differensierbar funksjon. Hva er den retningsderiverte i retningene gitt av hhv. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ (enhetsvektorene langs koordinataksene).

Oppgave 3

I et legeme er temperaturen i et punkt gitt ved funksjonen $f(x,y,z) = 15e^{-x^2-2y^2-3z^2}$.
Varmeenergien strømmer i den retningen temperaturen avtar raskest.
Angi en enhetsvektor som peker i den retningen varmeenergien strømmer i punktet med koordinater $(1,-1,0)$.

Oppgave 4

En maur kryper langs en flate som kan beskrives som grafen til funksjonen gitt ved $f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}y\cos x$ (med x–aksen pekende østover og y–aksen nordover. Ved et tidspunkt befinner mauren seg i punktet $P(\pi/6,4,3)$ og kryper i retningen gitt av vektoren $\mathbf{u} = [-\sqrt{3},1]$. Bestem retiningsderiverte i punktet P i retningen $\mathbf{u}$

Oppgave 5

a) Bestem i hviken retning fra punktet $P(2,-1)$ endrer $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ raskest?

b) Finn evetuelle lokale ekstremalpunkt til $f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 2y$.

Oppgave 6

Temperaturen i et punkt x,y er gitt ved: $T(x,y) = \dfrac{100}{x^2 + y^2 + 1}$

a) Hvordan se nivåkurven ut?

b) Finn $\nabla T(x,y)$ og regn ut gradienten i punktet $P(3,4)$. Bestem i hvilken retning fra punktet P skal man reise for å få oppleve temperaturen størst og i hvilken retning skal man reise for å få oppleve minste temperaturen. Hvor stor er temperaturen da?

c) Bestem i hvilken retning fra punktet P temperaturen hverken stiger eller synker.

d) Regn ut hvor rask temperaturen endrer seg i punktet P langs vektoren $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

e) Besten retningensderiverte til T i punktet P mot punktet Q (7 , 7).

Oppgave 7
Gitt funksjonen $f(x, y) = x^2 y - x^2 - y + 3$.

a) Bestem partielle deriverte av 1. og 2. orden.

b) Bestem funksjonens eventuelle stasjonære punkt og karakteriser disse.

c) Bestem eventuelle ekstremalpunkt i området der $-1 \leq x \leq 2$ og $0 \leq x \leq 2$.

d) Regn ut gradientvektoren til f i punktet $P(1, -1)$ som ligger på flaten f og sett opp tangentplanet til f i punktet P.

Oppgave 8
Gitt funksjonen $f(x, y) = x + y^2$.
Bruk Lagranges metode til å bestemme største og minste verdien til f under betingelsen $4x^2 + y^2 = 4$.