MA106E Statistikk
Aktuelle eksamensoppgaver med løsning

Vår 2017

Om heftet

Dette heftet inneholder et utvalg av eksamensoppgaver fra våren 2001 til høsten 2010 samt en komplett samling fra våren 2011 til høsten 2016.
Husk at eksamen som lages våren 2017 lages på bakgrunn av de oppgaver som regnes i løpet av våren 2017.
Tidligere eksamensoppgaver gir imidlertid en god øvelse i innlæringen av pensum og vi kommer til å gi oppgaver fra dette heftet i løpet av vårsemesteret.
Spesielt løsningene til de to siste eksamensoppgavene kan inneholde trykkfeil og annet rusk. Gi beskjed til Petter.Pettersen@nord.no dersom du oppdager trykkfeil eller andre uklarheter i dette heftet.

Innhold

Del I

Oppgaver

Vår 2001

Oppgave 1 V01

Vi har målt høyden (i cm) til 10 kvinner, resultatet ble:
168 169 171 170 164 166 171 174 168 167

(a) Finn gjennomsnitt, median og kvartiler til dette datamaterialet.

(b) Tegn et boksdiagram for datamaterialet, og kommenter diagrammets form.

Høst 2001

Oppgave 1 H01

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom karakterene i matematikk (x) og engelsk (y) for 7 elever i videregående skole. (0 er dårligste karakter og 6 er beste)

Matematikk (x)	3	4	1	2	5	4	3
Engelsk (y)	4	3	2	2	6	5	3

Følgende er oppgitt: $\sum_{i=1}^{7}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] \approx 10.429$, $\sum_{i=1}^{7}(x - \bar{x})^2 \approx 10.857$ og $\sum_{i=1}^{7}(y_i - \bar{y})^2 \approx 13.714$

(a) Tegn et spredningsdiagram og gi en kort kommentar til diagrammets form.

(b) Finn gjennomsnittskarakteren i henholdsvis matematikk og engelsk. Beregn korrelasjons-koeffisienten mellom karakterene i matematikk og engelsk. Hvordan vil du tolke verdien av korrelasjonskoeffisienten?

(c) Finn likningen for regresjonslinja mellom x og y. Tegn linja inn i spredningsdiagrammet.

Oppgave 4 H01

En bedrift har månedlige utgifter, U, som er normalfordelt med $\mu = 20$ og $\sigma = 2$ oppgitt i millioner kroner. De månedlige inntektene, I, er normalfordelt, med $\mu = 23$ og $\sigma = 1$ (også oppgitt i millioner kroner). Vi kan anta at U og I er uavhengige stokastiske variabler. Vi setter $D = I - U$ (overskuddet).

(a) Finn standardaviket til D og beregn $P(D \geq 0)$.

De siste 12 månedene har de fått en mistanke om at utgiftene har økt. Gjennomsnittlig månedlig utgift de siste 12 månedene er 21.3 millioner kroner. Det er ingen grunn til å tro at standardaviket har endret seg.

(b) Sett opp hypoteser svarende til denne situasjonen. Hva blir konklusjonen på denne testen når signifikansnivået skal være 1 %?

Bedriftens ledelse ønsker å utføre en hypotesetest om hvorvidt de månedlige inntektene har endret seg, de vil basere testen på gjennomsnittlig inntekt de siste 12 månedene. Vi antar også her at standardaviket for de månedlige inntektene er uendret.

(c) Bedriften ønsker å teste $H_0 : \mu = 23$ mot $H_1 : \mu \neq 23$. Finn kritiske verdier for denne testen når signifikansnivået skal være 5 %.

Vår 2002

Oppgave 1 V02

En studentforening arrangerte aktivitetsdag, en av aktivitetene var 60-meteren. De noterte ned tidene de 12 første deltakerne brukte (i sekunder):

8.6 9.4 9.6 10.1 9.5 9.2 10.5 8.7 9.8 9.9 9.0 8.8

(a) Beregn gjennomsnittstiden. Finn også medianen og kvartilene.

(b) Tegn et stamme-blad-diagram for resultatene. La stammen være antall sekunder og bladet være antall tidelssekunder.

Oppgave 3 V02

(a) Nedenfor er det 3 forslag til diskrete sannsynlighetsfordelinger. Hvilke forslag kan være sannsynlighetsfordelinger og hvilke kan ikke være det? Begrunn svarene.

(i)

x	2	3	4	10
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.1	0.4

(ii)

x	-2	0	3	4
$P(X = x)$	0.2	0.2	0.4	0.3

(iii)

x	-2	0	1	2
$P(X = x)$	-0.2	0.4	0.7	0.1

Selv de dyktigste sekretærer begår skrivefeil. En sekretær har funnet ut at antall skrivefeil per side, X, har følgende fordeling:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.6	0.3	0.1

(b) Finn EX , gi en tolkning av verdien. Finn også Var$X$.

Vi velger ut 150 tilfeldige sider som denne sekretæren har skrevet og teller opp totalt antall skrivefeil. Vi kan da anta at antall skrivefeil på hver side er uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable.

(c) Finn forventet antall skrivefeil på disse 150 sidene. Finn også variansen og beregn sannsynligheten for at de 150 sidene inneholder 80 eller flere skrivefeil.

Høst 2002

Oppgave 3 H02

Vi kjøper en eske med spiker, på esken står det at lengden av spikerene er 65 mm. Anta at vi kan anse lengden på en spiker som normalfordelt med $\mu = 65$ og $\sigma = 0.9$ der begge målene er oppgitt i mm.

(a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig spiker er lengre enn 66.5 mm? Hva er sannsynligheten for at en spiker har en lengde mellom 64 mm og 66 mm?

(b) Hva er sannsynligheten for at gjennomsnittslengden av 9 tilfeldig valgte spikre er kortere enn 64.7 mm?

Vår 2003

Oppgave 2 V03

En hodepinetablett virker i 80 % av tilfellene. Vi gir en hodepinetablett til 15 personer med hodepine og lar X være antallet som blir kvitt hodepinen.

a) Hvilke forutsetninger må være oppfylt for at X skal være binomisk fordelt med parametrene $n = 15$ og $p = 0.8$?

b) Vi antar at forutsetningene for at X er binomisk fordelt er oppfylt. Beregn $P(X = 15)$ og $P(X \geq 13)$.

Vi ønsker å undersøke hodepinetablettens effekt nærmere. Vi gir tabletter til 100 personer med hodepine og lar X være antallet av de 100 som blir kvitt hodepinen. Vi ser på X som binomisk fordelt, men nå med ukjent parameter p. Av de 100 personene som fikk hodepinetabletter rapporterte 74 stykker at hodepinen forsvant.

c) Estimer p på grunnlag av dette. Hvilken estimator benytter du og hvilke egenskaper har den?

d) Konstruer et tilnærmet 95%-konfidensintervall for p.

e) Vi skal teste $H_0 : p = 0.8$, mot $H_1 : p < 0.8$. Nivået skal være 5 %, finn testens kritiske verdi. Hva blir konklusjonen på testen? Her kan du benytte deg av vedlegg 1 hvis det kan brukes.

Vedlegg 1

```
MTB > cdf;
SUBC> binomial 100 0,8.
```

Cumulative Distribution Function

```
Binomial with n = 100 and p = 0,800000
          x    P( X <= x )
         **       ******
         68       0,0031
         69       0,0061
         70       0,0112
         71       0,0200
         72       0,0342
         73       0,0558
         74       0,0875
         75       0,1314
```

Oppgave 3 V03

Vi har undersøkt 5 biler og notert ned motorstørrelsen i hk og bensinforbruket i liter/mil. Resultatet ble:

Motorstørrelse (hk) x	75	145	55	88	122
Bensinforbruk (liter/mil) Y	0.48	1.09	0.53	0.97	0.78

a) Tegn et spredningsdiagram. Finn likningen, $Y = a + bx$, for regresjonslinja mellom x og Y. Tegn denne linja inn i spredningsdiagrammet.

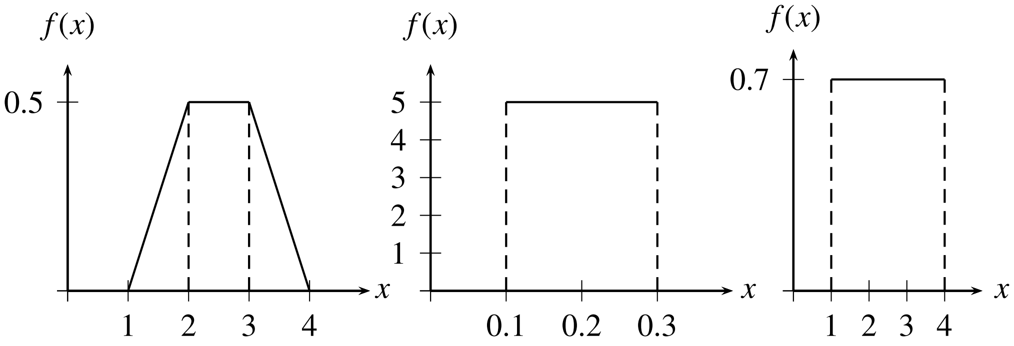
Regnehjelp: $\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}) \cdot (Y_i - \bar{Y}) = 30.27$, $\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = 5258$

b) Du kan anta at forutsetningene i standardmodellen for regresjonsanalyse er oppfylt. Vi ønsker å teste hypotesen $H_0 : b = 0$, mot $H_1 : b > 0$. Forklar med egne ord hva hypotesene uttrykker. Hva blir konklusjonen på testen når signifikansnivået skal være 5 %?

Høst 2003

Oppgave 4 H03

a) Kommenter de 3 tilfellene av kontinuerlige funksjoner tegnet inn nedenfor. Hvilke av funksjonene (i) til (iii) kan være sannsynlighetstettheter og hvilke kan ikke være det? Begrunn svarene!



(i) (ii) (iii)

b) En butikk har to filialer som selger barnevogner. Vi lar X være antall barnevogner som selges en vilkårlig dag i filial A. X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.30	0.40	0.25	0.05

Beregn E(X) og Var(X). Finn også den kumulative fordelingsfunksjonen.

Vi lar Y være antall barnevogner som selges en vilkårlig dag i filial B. X og Y har følgende simultanfordeling.

		X			
		0	1	2	3
Y	0	0.10	0.10	0.03	0.02
	1	0.09	0.25	0.05	0.01
	2	0.06	0.03	0.15	0.01
	3	0.05	0.02	0.02	0.01

c) Finn sannsynligheten for at det en vilkårlig dag selges flere enn 4 barnevogner til sammen fra de 2 filialene. Finn sannsynlighetsfordelingen til Y. Er X og Y uavhengige variabler?

Høst 2005

Oppgave 5 H05

(a) Gitt den diskrete sannsynlighetsfordelingen:

x	-5	-1	0	10
$P(X = x)$	0.3	0.1	0.1	0.5

Beregn forventning og varians.

(b) Gitt to begivenheter A og B. Følgende er oppgitt:

$P(\bar{A}) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.6$ og $P(A \cap B) = 0.12$. Er begivenhetene uavhengige? (Begrunn svaret.) Finn $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Vår 2007

Oppgave 1 V07

En liten bedrift noterer ned antall kundehenvendelser den får hver dag. Resultatet for en 20 dagersperiode ble:

2	0	1	1	5	2	1	2	4	2
3	2	2	0	4	3	1	5	6	1

Her er deler av en Minitab utskrift som du fritt kan benytte ved løsningen av denne oppgaven.

```
MTB > print c1.
Data Display
C1
   2   0   1   1   5   2   1   2   4   2   3   2   2   0   4   3   1   5   6   1
MTB > desc c1.
Descriptive Statistics: C1
Variable    N  N*   Mean  SE Mean  StDev      Minimum     Q1  Median  *
C1         20   0  *****    0,379  1,694  0,000000000  *****   2,000  *
```

(a) Beregn gjennomsnitt og median for datamaterialet.

(b) Tegn et prikkdiagram for datamaterialet.

(c) Hva er standardavviket? Finn kvartilbredden.

Oppgave 3 V07

Man har erfaring for at sannsynligheten for at en bestemt elektronisk artikkel er defekt er 0.03. Vi får et parti med 20 tilfeldig valgte artikler og lar X være antall artikler som er defekte.

(a) Vis at sannsynligheten for at partiet inneholder minst en defekt er 0.4562.

Hver måned mottar vi et parti med 20 artikler. I løpet av et år har vi altså mottatt 12 partier, vi antar at antall defekte i partiene er uavhengige av hverandre. Vi lar Y være antall leveranser i løpet av et år med minst en defekt artikkel.

(b) Hva slags sannsynlighetsfordeling har Y? Begrunn svaret. Beregn $P(Y = 3)$.

Høst 2007

Oppgave 2 H07

(a) X har sannsynlighetsfordeling gitt ved tabellen under.

x	0	1	4
$P(X = x)$	0.2	0.5	0.3

Beregn forventning og varians til X.

(b) Y har sannsynlighetsfordeling:

y	-1	0	1
$P(Y = y)$	0.3	0.4	0.3

Vi antar at X og Y er uavhengige, sett opp simultanfordelingen.

(c) Sett $Z = X + Y$, finn $P(Z \leq 1)$.

Oppgave 3 H07

I denne oppgaven skal vi anta at det finnes liv på planeten Mars. Vi lar x_1 være høyden i cm på en "marsmann" og Y_1 være vekten i kg av en "marsmann". Vi antar at følgende sammenheng gjelder:

$$Y_1 = 30 + 0.9x_1 + U \qquad \text{der} \quad U \sim N(0, 5)$$

(a) En "marsmann" har høyden $x_1 = 123$, finn $P(Y_1 < 144)$

Vi antar at det også finnes gorillaer på Mars. Vi samler opplysninger om sammenhengen mellom høyden i cm x og vekten i kg Y på 12 tilfeldig valgte gorillaer.

x, høyde i cm	115	127	124	126	111	132	125	128	112	118	124	127
Y, vekt i kg	300	309	300	304	272	313	298	306	275	288	296	305

Vi finner regresjonslikningen ved hjelp av Minitab:

```
MTB > print c1.
Data Display
C1   115   127   124   126   111   132   125   128   112   118   124   127
MTB > print c2.
Data Display
C2   300   309   300   304   272   313   298   306   275   288   296   305
```

```
*****************
Regression Analysis: C2 versus C1
The regression equation is
C2 = 88,3 + 1,71 C1
```

Følgende tabell kan hjelpe deg med regnearbeidet i fortsettelsen av oppgaven.

x	Y	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$\hat{Y} = 88.3 + 1.71x$	$\left(Y - \hat{Y}\right)^2$
115	300	-7.4	55.0	285.0	224.0
127	309	4.6	21.0	305.5	10.9
124	300	1.6	2.5	300.3	0.0
126	304	3.6	12.8	303.8	0.0
111	272	-11.4	130.3	278.1	39.8
132	313	9.6	91.8	314.0	1.4
125	298	2.6	6.7	302.1	13.4
128	306	5.6	31.2	307.2	2.1
112	275	-10.4	108.5	279.8	23.3
118	288	-4.4	19.5	290.1	2.9
124	296	1.6	2.5	300.3	18.0
127	305	4.6	21.0	305.5	0.3

(b) Vi antar at standard forutsetningene i regresjonsmodellen er oppfylt. Vi ser her at $\hat{b} = 1.71$, finn et 95 % konfidensintervall for b.

Vår 2008

Oppgave 2 V08

På en arbeidsplass er det ansatt 50 arbeidere, av dem er 35 organisert i en fagforening. Det skal ved loddtrekning velges en komite på 5 arbeidere som skal reise til et fjordhotell for å drøfte bedriftens strategiplan.

(a) Hva er sannsynligheten for at alle som velges er organisert i en fagforening? Hva er sannsynligheten for at ingen i komiten er medlem av en fagforening? Hva er sannsynligheten for at akkurat 3 av komitemedlemmene er organisert i en fagforening? Per er arbeider i bedriften, hva er sannsynligheten for at Per blir valgt ut i komiteen?

(b) Vi lar X være antallet i komiteen som er organisert i en fagforening. Beregn $E(X)$ og gi en tolkning av verdien. Finn også $\text{Var}(X)$ og σ_X.

Oppgave 6 V08

La $X \sim N(10, 2)$ og $Y \sim N(5, 3)$ være to uavhengige stokastiske variable. Vi skal i denne oppgaven studere den stokastiske variabelen Z definert ved $Z = X + Y$.
Finn $E(Z)$ og Var(Z). Beregn $P(Z \leq 12.5)$.

Vår 2009

Oppgave 1 V09

I et styre er det 5 kvinner og 5 menn. Det skal velges et utvalg på 4 personer fra dette styret.

(a) Forklar at det finns totalt 210 forskjellige utvalg.

(b) Hva er sannsynligheten for at utvalget har flere kvinner enn menn?

Oppgave 2 V09

En bedrift har ansatt en kvalitetskontrollør. Han kontrollerer 25 % av alle produktene som bedriften sender ut på markedet. Hvis kvalitetskontrolløren har kontrollert et produkt, er sannsynligheten for at det er noe feil med produktet lik 0.03. Hvis kvalitetskontrolløren ikke har kontrollert produktet er sannsynligheten for at det er feil på produktet lik 0.15.

(a) La K stå for at produktet er kontrollert av kvalitetskontrolløren og F bety at det er feil på produktet. Tegn et sannsynlighetstre for denne situasjonen og påfør treet de nødvendige symboler og sannsynligheter.

(b) Hva er sannsynligheten for at et produkt er kontrollert og at det er noe feil med produktet? Hva er sannsynligheten for at et produkt er kontrollert gitt at det ikke er noe feil på produktet?

Oppgave 4 V09

Når det gjelder planleggingen av sommerferie har man erfaringer med at befolkningen fordeler seg på ulike kategorier som tabellen under viser.

	Feriekategori	Andel
1	Dyr utenlandsferie	15 %
2	Rimelig utenlandsferie	25 %
3	Dyr norgesferie	5 %
4	Rimelig norgesferie	40 %
5	Ingen ferie	15 %

Etter "finanskrisa" spør vi et utvalg tilfeldig valgte personer om hva slags ferie de planlegger, resultatet ble:

	Feriekategori	Antall
1	Dyr utenlandsferie	46
2	Rimelig utenlandsferie	76
3	Dyr norgesferie	18
4	Rimelig norgesferie	183
5	Ingen ferie	77

Bruk en χ^2–test på 5 % nivå for å avgjøre om dette tyder på at ferievanene har endret seg som følge av finanskrisa.

Høst 2009

Oppgave 4 H09

La $X \sim \text{bin}(100, p)$.

(a) Anta at vi ønsker å estimere størrelsen på p. Vi utfører forsøket og får 37 suksesser av 100 forsøk. På bakgrunn av dette skal du konstruere et tilnærmet 95 % konfidensintervall for p.

(b) Anta at vi ønsker å teste hypotesen $H_0 : p = 0.3$ mot $H_1 : p > 0.3$. Finn kritisk verdi for testen når signifikansnivået settes til 5 %. (Vi baserer testen på en forsøksserie på 100 enkeltforsøk.)

Oppgave 6 H09

På en arbeidsplass er alderen på de ansatte 31, 42, 49, 49, 39, 53, 45, 66, 44. Finn medianen og kvartilene til dette datamaterialet.

Vår 2010

Oppgave 2 V10

La $X \sim N(\mu, 5)$.
Vi skal teste hypotesen $H_0 : \mu = 10$ mot $H_1 : \mu < 10$. Vi baserer testen på et tilfeldig utvalg på 100 observasjoner. Testen vi utvikler er:
Forkast H_0 dersom $\bar{X} \leq 9.02$.
Hva er signifikansnivået til denne testen? Hva er styrken i alternativet $\mu = 8$?

Oppgave 6 V10

(a) Vi lar X ha sannsynlighetsfordelingen nedenfor.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.4	0.3

Finn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

(b) La Y være hypergeometrisk fordelt med $N = 10$, $M = 4$ og $n = 3$. Fyll ut følgende tabell:

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$				

Finn $E(Y)$ og $\mathrm{Var}(Y)$.

Oppgave 7 V10

Nils har sommerjobb i informasjonsluka til turistkontoret i ei lita bygd. Vi antar at antall henvendelser til informasjonsluka er poissonfordelt med parameter $\lambda = 4$ (per time). Nils har krav på en halvtimes lunsjpause. Hva er sannsynligheten for at det kommer henvendelser til informasjonsluka mens Nils har lunsjpause? En dag må Nils et ærend i byen utenom lunsjpausen. Hvor lenge kan han være borte dersom han vil at sannsynligheten for at det kommer en henvendelse mens han er borte er mindre enn 0.25?
(Hint: Her får du nok bruk for sammenhengen: $\ln(e^x) = x$.)

Høst 2010

Oppgave 2 H10

Vi lar X være antall pasienter som ankommer et akuttmottak i løpet av en time. Antar at X er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 7$ (per time).

(a) Finn sannsynligheten for at det ankommer akkurat 3 pasienter i løpet av en halvtime. Finn sannsynligheten for at det ankommer 4 eller flere pasienter i løpet av en halvtime.

(b) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Oppgave 3 H10

Vi antar at det årlige strømforbruket til en tilfeldig valgt husholdning er normalfordelt med forventning $\mu = 25\,000$ og standardavvik $\sigma = 4\,000$, begge målt i kwh.

(a) Hva er sannsynnligheten for at en tilfeldig valgt husholdning bruker mindre enn 21 500 kwh i løpet av et år? Hva er sannsynligheten for at de bruker mellom 21 500 og 27 000 kwh?

(b) Finn et strømforbruk k som er slik at 5 % av husholdningene har et strømforbruk som er høyere enn k.

(c) Myndighetene gjennomfører en sparekampanje for å få redusert strømforbruket hos husholdningene. De ønsker å utføre en hypotesetest for å vurdere effekten av kampanjen. Sett opp de aktuelle hypotesene for denne situasjonen. Gi en kort begrunnelse for valget av hypoteser.

(d) Vi antar at strømforbruket etter sparekampanjen fortsatt er normalfordelt med standardavvik 4 000 kwh. Gjennomsnittlig strømforbruk i 100 tilfeldig utvalgte husholdninger etter kampanjen ble 24 100 kwh. Hva blir resultatet av hypotesetesten når signifikansnivået skal være 5 %?

Oppgave 7 H10

I denne oppgaven lar vi $X \sim \text{bin}(50, 0.2)$.

(a) Beregn $P(X = 5)$, bruk normaltilnærming for å finne $P(X \leq 12)$.

(b) Finn $E(X) = \mu$ og $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Beregn også $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

Vår 2011

Oppgave 1 V11

Antall esker med mokkabønner som selges per dag i en forretning er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 0.5$ (per dag).

(a) Hva er sannsynligheten for at det selges akkurat 2 pakker mokkabønner en dag? Hva er sannsynligheten for at det selges fler enn 2 pakker mokkabønner en dag?

(b) Hva er sannsynligheten for at det selges akkurat 4 pakker mokkabønner i løpet av 5 dager?

Oppgave 2 V11

Vi lar $X \sim \text{bin}(150, p)$. Vi skal teste hypotesen $H_0 : p = 0.3$ mot $H_1 : p < 0.3$.
Hva blir kritisk verdi for testen når signifikansnivået skal være $\alpha = 0.05$. Hva blir testens styrke i alternativet $p = 0.2$?

Oppgave 3 V11

(a) Et bilforsikringsselskap deler kundene inn i to grupper, nemlig de som har stor skaderisiko og de som har lav skaderisiko. Vi antar at 20 % av kundene har stor skaderisiko. Sannsynligheten for at en kunde med stor skaderisiko skal ha skade på bilen sin i løpet av det kommende året er 0.1. Tilsvarende sannsynlighet for en som har lav skaderisiko er 0.05. For en tilfeldig valgt kunde, hva er sannsynligheten for skade i løpet av det kommende året? (Hint: Tegn sannsynlighetstre.)

(b) En bilfører har hatt skade det siste året. Hva er sannsynligheten for at det er en bilfører med stor skaderisiko?

Oppgave 4 V11

(a) Et annet forsikringsselskap har erfaring med at i løpet av et år vil 84 % av kundene med bilforsikring ha ingen skader, 14 % av kundene har en skade og 2 % av kundene har to eller flere skader.

400 bilførere gis opplæring i defensiv kjøreteknikk. Det etterfølgende året ser man at 353 av dem har ingen skader, 44 har en skade og 3 har to eller flere skader. Utfør en test for å avgjøre om bilførere som har tatt kurs i defensiv kjøreteknikk har samme skadefordeling som resten av kundene i forsikringsselskapet. Bruk signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

(b) Forsikringsselskapet vil undersøke om det er uavhengighet mellom antall skader og røykevaner. De kategoriserer et tilfeldig utvalg av kundene sine etter skadefrekvens og røyking, resultatet ser du i tabellen under.

	Røyker	Røyker ikke
Ingen ulykker	35	170
En ulykke	79	190
To eller flere ulykker	57	66

Avgjør om det er uavhengighet mellom variablene eller ikke ved hjelp av en hypotesetest med signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Oppgave 5 V11

En forretning har en dagsinntekt som er normalfordelt med forventning $\mu = 12\,000$ og standardavvik $\sigma = 3\,500$ (begge oppgitt i kroner).

(a) Finn sannsynligheten for at dagsinntekten blir mindre enn 14 000 kroner. Finn sannsynligheten for at dagsinntekten blir mellom 9 000 og 14 000 kroner.

(b) Hva er sannsynligheten for at samlet inntekt i en 10 – dagers periode blir mindre enn 110 000 kroner?

Det gjennomføres en reklamekampanje som har til hensikt å øke dagsinntekten i forretningen. Etter at kampanjen var gjennomført registrerte man følgende dagsinntekter.

16179 14660 13568 16938 15957 15149

Her er deler av en Minitab-utskrift som du kan benytte.

```
MTB > print c1.
Data Display
C1
   16179   14660   13568   16938   15957   15149
MTB > describe c1.
```

```
Descriptive Statistics: C1

Variable   N  N*   Mean  SE Mean  StDev  Minimum
C1         6   0  *****      492   1204    13568
```

(c) Vi vil utføre en hypotesetest for å undersøke om kampanjen har hatt den ønskede effekten. Vi setter $H_0 : \mu = 12\,000$. Hva blir alternativhypotesen? Hva blir konklusjonen på hypotesetesten når signifikansnivået skal være $\alpha = 0.05$?

Oppgave 6 V11

(a) Her er en tabell over sammenhørende verdier av x og y.

x	1	2	3	6	8
y	4	7	8	14	17

Tegn spredningsdiagram og beregn den empiriske korrelasjonskoeffisienten.

(b) Finn den lineære regresjonslikningen og tegn den inn i spredningsdiagrammet. Hvis $x = 4$, hvilken verdi vil regresjonslikningen gi for y?

(c) Anta at standardforutsetningene for regresjonsmodellen er oppfylt og konstruer et 95 % konfidensintervall for b i modellen.

Oppgave 7 V11

Det tas et utvalg på 500 husholdninger fra et tettsted. 106 av dem sier at de bruker RiksTV som leverandør av TV signaler.

(a) Estimer andelen som bruker RiksTV som leverandør. Angi også en tilnærmet verdi på standardavviket til estimatoren du bruker.

(b) Finn også et tilnærmet 95 % konfidensintervall for andelen som bruker RiksTV som leverandør.

Høst 2011

Oppgave 1 H11

Kvadratmeterprisen ved slag av leiligheter et sted antas å være normalfordelt med forventning kr 15 500 og standardavvik kr 2 000

(a) Hva er sannsynligheten for at kvadratmeterprisen ligger mellom kr 14 000 og kr 15 000?

(b) Etter en stund mener noen at kvadratmeterprisen for leiligheter har steget en del. Man ønsker å utføre en hypotesetest, sett opp passende hypoteser til denne situasjonen.

(c) Vi antar at standardavviket fortsatt er kr 2 000. Gjennomsnittlig kvadratmeterpris på de siste 20 solgte leilighetene er kr 16 100. Hva blir kritisk verdi på hypotesetestingsproblemet dersom signifikansnivået skal være 5 %? Hva blir konklusjonen på hypotesetestingsproblemet?

(d) Dersom kvadratmeterprisen virkelig var steget til kr 16 500, hva er da styrken på testen du utviklet i forrige spørsmål?

(e) Konstruer et 95 % konfidensintervall for forventet gjennomsnittlig kvadratmetermeterpris for leiligheter når vi antar at standardavviket er kjent lik kr 2 000 og gjennomsnittlig kvadratmeterpris på de siste 20 solgte leilighetene er kr 16 100.

Oppgave 2 H11

I en studentgruppe deltar 10 studenter. Vi antar at antallet av dem som møter opp Universitetet en vilkårlig dag er binomisk fordelt med oppmøtesannsynlighet $p = 0.8$.

(a) Hva er sannsynligheten for at akkurat 8 studenter møter opp en vilkårlig dag? Hva er sannsynligheten for at 8 eller flere studenter møter opp en vilkårlig dag?

(b) Vi antar at oppmøtet på etterfølgende dager er uavhengig av hverandre. Hva er sannsynligheten for at fler enn 8 studenter måter opp på to etterfølgende dager?

Oppgave 3 H11

Ved et universitet har det vært slik at 40 % av studentene har foretrukket å sitte hjemme når de har jobbet med studierelaterte arbeidsoppgaver, 20 % har foretrukket universitetets kantine, 30 % har foretrukket diverse sosialsoner ved universitetet, mens de resterende 10 % har foretrukket universitetets lesesal.
Etter en kraftig oppgradering av universitetets lesesal utfører man en undersøkelse om hvor studenter foretrekker å gjøre studierelaterte arbeidsoppgaver. 145 svarte hjemme, 83 kantina, 101 sosialsoner og 71 lesesalen. Utfør en χ^2–test på 5 % nivå for å undersøke om oppgraderingen av lesesalen har ført til endring i studentenes foretrukne sted for å gjøre studierelatert arbeid.

Oppgave 4 H11

I en kasse ligger det 12 fisk, 3 av dem har vesentlig dårligere kvalitet enn de andre.

(a) Ved tilfeldig trekning velges 4 fisk fra kassa. Hva er sannsynligheten for at ingen av fiskene med vesentlig dårligere kvalitet velges? Hva er sannsynligheten for at det velges akkurat en av fiskene med vesentlig dårligere kvalitet?

(b) Vi lar Y være antallet av de 4 utvalgte fiskene som har vesentlig dårligere kvalitet. Beregn forventning og varians til Y.

Oppgave 5 H11

Vi undersøker tørketiden for en bestemt type maling. Tørketiden i timer ble:

$$4 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 7$$

(a) Tegn et prikkdiagram for tørketiden. Beregn gjennomsnitt og standardavvik.

(b) Sammen med tørketiden ble også omgivelsestemperaturen i °C notert.

Omgivelsestemperatur [°C]	15	24	11	12	14	13	22	8
Tørketid [timer]	4	2	6	5	4	5	3	7

Tegn et spredningsdiagram og kommenter resultatet. Vil du anta at korrelasjonskoeffisienten mellom omgivelsestemperatur og tørketid er positiv eller negativ?

Oppgave 6 H11

Anta at antall ganger du hoster i løpet av en time er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 0.5$. Hva er sannsynligheten for at du ikke hoster i løpet av en time? Hva er sannsynligheten for at du hoster akkurat en gang i løpet av 4 timer?

Oppgave 7 H11

I en testproduksjon av en ny type juletrepynt ble det produsert 100 artikler, av dem var 7 defekte. Estimer defektsannsynligheten. Estimer også standardavviket til estimatoren du bruker. Konstruer også et tilnærmet 95 % konfidensintervall for defektsannsynligheten.

Vår 2012

Oppgave 1 V12

Vi antar at antall oppringinger til et sentralbord i en liten bedrift er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 6$ per time.

(a) Hva er sannsynligheten for akkurat 4 oppringninger i løpet av en time? Hva er sannsynligheten for 3 eller flere oppringninger i løpet av en time?

(b) Hva er sannsynligheten for akkurat 14 oppringninger i løpet av en 3 timers periode?

Oppgave 2 V12

Etter lang tids bruk av en produksjonsmaskin har man kommet frem til at sannsynligheten for ulike kvalitetsklasser er som følger:

Kvalitetsklasse	Topp	Høy	Medium	Lav
Sannsynlighet	0.38	0.32	0.26	0.04

Vi tester ut en ny maskin og får følgende resultater:

Kvalitetsklasse	Topp	Høy	Medium	Lav
Antall	222	171	98	9

Utfør en test på 5 % nivå for å se om den nye maskinen følger samme sannsynlighetsfordeling.

Oppgave 3 V12

(a) For et bestemt mobiltelefonmerke blir det i garantitiden reklamert på 20 % av telefonene som selges. Av de telefonene som det reklameres på kan 60 % repareres mens de resterende må byttes i en ny telefon. Du kjøper en telefon av dette merket. Hva er sannsynligheten for at du både reklamerer og får en ny telefon?

(b) En butikk selger 15 stykker av dette mobiltelefonmerket. Hva er sannsynligheten for at akkurat 2 av telefonene blir byttet i en ny telefon i løpet av garantitiden?

Oppgave 4 V12

På en pakke frø står det at spireprosenten er 70 %. Dersom vi sår 200 frø og lar X være antallet frø som spirer betyr det at $X \sim \text{bin}(200, 0.70)$.

(a) Du sår 200 frø. Du har mistanke om at spireprosenten er mindre enn 70 %. Sett opp passende hypoteser til denne situasjonen. Signifikansnivået skal være 5 %. Hva blir kritisk verdi på testen?

(b) Regn ut p–verdien dersom 133 frø spirer, hva blir konklusjonen på hypotesetesten?

(c) Dersom spireprosenten virkelig er 60 %, hva blir styrken til testen du har utviklet?

Oppgave 5 V12

(a) Timelønna til en viss gruppe av bankansatte antas å være normalfordelt med forventning 160 kr og standardavvik 18 kr. Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt bankansatt har en timelønn under 170 kr? Hvor stor andel av de bankansatte har en timelønn mellom 140 kr og 180 kr?

(b) I det følgende skal vi anta at også timelønnen til en viss gruppe ansatte i forsikringsbransjen er normalfordelt. Imidlertid er forventning og standardavvik ukjent. Vi tar et tilfeldig utvalg på 16 ansatte og undersøker timelønna til dem. Resultatet ble:

197	143	154	145	125	157	230	151
224	182	184	115	134	132	166	218

Tegn et boksdiagram for dette datasettet.

(c) Finn variasjonsbredden, gjennomsnittet og standardavviket til datasettet (Minitabutskriften nedenfor kan fritt benyttes).

```
MTB > print c1.
Data Display
C1
   197   143   154   145   125   157   230   151   224   182   184
   115   134   132   166   218
MTB > describe c1.
Descriptive Statistics: C1
Variable   N  N*    Mean  SE Mean  StDev  Minimum      Q1  Median  **
C1        16   0  ******     9,03  36,14   115,00  ******  155,50  **
Variable  Maximum
C1         230,00
```

(d) Konstruer er 95 % konfidensintervall for forventet timelønn for denne gruppen med ansatte i forsikringsbransjen.

Oppgave 6 V12

(a) Gitt sannsynlighetsfordelingen

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.3	0.5	0.2

Beregn $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$

(b) La $Y \sim \mathrm{bin}(3, 0.2)$. Anta at X og Y er uavhengige, finn $\mathrm{E}(X + Y)$ og $\mathrm{Var}(X + Y)$. (Variabelen X er definert i oppgave 6a)

(c) La $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ være 100 uavhengige observasjoner av variabelen X og sett

$$R = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}.$$

(Variabelen X er definert i oppgave 6a) Hva blir $\mathrm{E}(R) = \mu_R$ og $\mathrm{Var}(R) = (\sigma_R)^2$? Hvorfor kan vi anta at R er tilnærmet normalfordelt? Hvilket av uttrykkene under er mest korrekt? Begrunn svaret.

(A) $P(R \leq k) \approx G\left(\frac{k - \mu_R}{\sigma_R}\right)$

(B) $P(R \leq k) \approx G\left(\frac{k + 0.5 - \mu_R}{\sigma_R}\right)$

Høst 2012

Oppgave 1 H12

I et parti med 30 lyspærer er det 5 som er defekte. Vi plukker tilfeldig 8 lyspærer fra partiet. Vi lar X være antallet av de 8 som er defekte.

(a) Finn sannsynligheten for at det er akkurat 2 defekte lyspærer i partiet på 8.

(b) Beregn forventning og standardavvik til X. Finn deretter $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

Oppgave 2 H12

En Cooper-test går ut på at du skal løpe så langt du klarer i løpet av 12 minutter. For jenter på 16 år er resultatet normalfordelt med forventning 2 100 meter og standardavvik 500 meter.

(a) Hva er sannsynligheten for at ei tilfeldig valgt jente løper mellom 2 000 meter og 2 500 meter på Cooper testen?

(b) Finn en grense k slik at sannsynligheten for å løpe lengre enn k meter på Cooper testen er 0.1.

(c) Ved tilfeldig utvalg velger man ut en gruppe på 9 jenter som får et nyutviklet treningsopplegg som skal øke kondisjonen og dermed forbedre resultatet på Cooper testen. Etter treningsopplegget blir Cooper testen gjennomført, resultatet ble:

2345 2265 2069 2512 2272 2785 2301 2398 2588

Vi analyserer resultatet i Minitab:

```
MTB > print c1.
Data Display
C1
   2345   2265   2069   2512   2272   2785   2301   2398   2588
MTB > describe c1.
Descriptive Statistics: C1
Variable  N  N*    Mean  SE Mean  StDev  Minimum      Q1  Median
C1        9   0  2392,8     70,0  210,0   2069,0  ******  2345,0
```

Tegn et boksdiagram for disse dataene.

(d) Det skal utføres en hypotesetest for å se om det nye treningsopplegget har hatt effekt. To studenter får i oppdrag å utføre testen. De er begge enige om at nullhypotesen må være $H_0 : \mu = 2\ 100$. Men de er uenige i hva som skal være den alternative hypotesen. Arne mener at den må være $H_1 : \mu < 2\ 100$, mens Bernt mener at den er $H_1 : \mu > 2\ 100$. Hva er rett alternativ hypotese? Svaret skal begrunnes.

(e) Hva blir konklusjonen på hypotesetestingsproblemet når signifikansnivået skal være 5 %?

Oppgave 3 H12

Man har samlet inn data på hvor mange ganger forelesinger blir forstyrret av at mobiltelefoner ringer.

Antall forstyrrelser av mobiltelefon	0	1	2	3 eller flere
Sannsynlighet p_i	0.3	0.3	0.3	0.1

Etter en intensiv kampanje der man oppfordrer studentene til å slå av mobiltelefonen på forelesing samler man inn følgende data:

Antall forstyrrelser av mobiltelefon	0	1	2	3 eller flere
Observert antall Oi	53	23	19	5

Utfør en hypotesetest på 5 % nivå for å avgjøre om kampanjen har hatt effekt.

Oppgave 4 H12

Vi ønsker å kontrollere om en terning gir korrekt antall seksere. Vi kaster terningen 80 ganger og får 7 seksere. Gir dette grunn til å mistenke terningen for å gi for få seksere? Besvar spørsmålet ved å utføre en hypotesetest på 5 % nivå.

Oppgave 5 H12

Vi har sett på sammenhengen mellom vingelengden til 6 spurver og deres alder.

Alder (dager) x	3	5	8	10	12	15
Vingelengde (cm) y	1.4	2.2	3.1	3.2	4.1	4.5

(a) Tegn et spredningsdiagram. Beregn korrelasjonskoeffisienten.

(b) Finn regresjonslikninga. Tegn linja inn i spredningsdiagrammet. Beregn predikert vingelengde til en spurv som er 7 dager gammel.

Oppgave 6 H12

I denne oppgaven skal vi la $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ og $P(A \cap B) = 0.1$.

(a) Er begivenhetene A og B uavhengige? Svaret skal naturligvis begrunnes.

(b) Hva blir $P(A|B)$?

Oppgave 7 H12

Anta at $X \sim \text{bin}(10, 0.2)$

(a) Beregn $P(X = 2)$ og $P(X < 3)$.

(b) Hva er forventning, varians og standardavvik til X?

Vår 2013

Oppgave 1 V13

(a) Gitt følgende tabell over sammenhørende verdier av x og y.

x	1	2	3	5	9
y	1	1	3	4	6

Tegn spredningsdiagram. Beregn korrelasjonskoeffisienten og kommenter verdien.

(b) Finn likninga til regresjonslinja og tegn linja inn i spredningsdiagrammet.

Oppgave 2 V13

Et Non–stop liknende godteri kommer i 6 forskjellige farger. Fabrikken som lager godteriet sier at 10 % av bitene er brune, 15 % er gule, 10 % er røde, 25 % er blå, 25 % er orange og 15 % er grønne. Vi kjøper en pakke og teller opp 70 brune, 87 gule, 64 røde, 115 blå, 106 orange og 86 grønne.
Utfør en χ^2–test med signifikansnivå $\alpha = 0.05$ der du undersøker om de oppgitte prosentandelene synes å være realistiske.

Oppgave 3 V13

På en populær flyavgang blir alltid alle billettene solgt, men det viser seg at endel av de som har kjøpt billett aldri dukker opp til flyavgang. Erfaring viser at 90 % av flybillettene som selges blir benyttet. Til denne avgangen brukes et fly med 40 seter. Flyselskapet selger 41 billetter til flyavgangen. Vi setter X lik antallet av de 41 som har kjøpt billett som virkelig dukker opp.

(a) Forklar kort hvorfor $X \sim \text{bin}(41, 0.9)$. Beregn $P(X = 41)$ og $P(X \leq 40)$.

(b) Hver flybillett selges for kr 1 000. Dersom alle 41 som har kjøpt flybillett dukker opp må den sist ankomne vente på neste flyavgang. Passasjeren som ikke får sete får da en kompensasjon på kr 5 000. (Passasjeren får igjen kr 1 000 for flybilletten og kr 4 000 som en erstatning for å måtte vente på neste flyavgang) La Y være inntekten flyselskapet har på flyavgangen. Beregn $E(Y)$.

Oppgave 4 V13

Økonomiavdelingen i et firma har funnet ut at saksbehandlingstiden for å behandle en reiseregning er normalfordelt med forventning 20 minutter og standardavvik 7 minutter

(a) Hva er sannsynligheten for at saksbehandlingstiden på en tilfeldig valgt reiseregning er kortere enn 25 minutter? Hva er sannsynligheten for at saksbehandlingstiden er lengre enn 35 minutter?

(b) 70 minutter før arbeidstidens slutt får en av saksbehandlerne på økonomiavdelingen 4 reiseregninger som han må gjøre ferdig før han går hjem. Hva er sannsynligheten for at han blir ferdig med disse 4 reiseregningene før arbeidstiden er slutt? Anta det er uavhengighet når det gjelder tiden saksbehandleren bruker på de 4 reiseregningene.

(c) Økonomiavdelingen gjennomfører forskjellige effektiviseringstiltak for å få ned saksbehandlingstiden på reiseregninger. Etter at disse tiltakene er gjennomført undersøker vi saksbehandlingstiden på 9 innkomne reiseregninger, saksbehandlingstiden i minutter ble:

$$5 \quad 18 \quad 15 \quad 20 \quad 13 \quad 24 \quad 9 \quad 25 \quad 14$$

Her ser du deler av en Minitab utskrift som du fritt kan benytte.

```
MTB > print c1.
Data Display
C1
    5   18   15   20   13   24    9   25   14
MTB > describe c1.
Descriptive Statistics: C1
Variable  N  N*   Mean  SE Mean  StDev  Minimum    **
C1        9   0  *****     2,20   6,60     5,00    **
```

Hva er gjennomsnitt, median, variasjonsbredde, standardavvik og varians?

(d) Etter effektiviseringstiltakene antar vi fortsatt at saksbehandlingstiden er normalfordelt. Men nå kjenner vi ikke verdien til forventningen og det teoretiske standardavviket. Vi ønsker å utføre en hypotesetest for å se om effektiviseringstiltakene virkelig har hatt effekt. Hva blir nullhypotesen og den alternative hypotesen?

(e) Hva blir konklusjonen på hypotesetesten dersom signifikansnivået skal være 5 %.

Oppgave 5 V13

(a) En fabrikk får en ny maskin som produserer skruer. Av en testproduksjon på 200 ble 37 klassifisert som defekte. Konstruer et tilnærmet 95 % konfidensintervall for defektsannsynligheten på bakgrunn av dette.

(b) Etter at leverandøren har vært og fininnstilt maskinen garanterer leverandøren at defektsannsynligheten er mindre enn 8 %. Vi har en mistanke om at dette ikke stemmer og ønsker å teste hypotesene $H_0 : p = 0.08$ mot $H_1 : p > 0.08$. Vi kjører en ny testproduksjon på 200. Hva blir kritisk verdi på testen når signifikansnivået skal være 5 %?

(c) Hva blir testens styrke i alternativet $p = 0.10$?

Oppgave 6 V13

(a) Gitt sannsynlighetsfordelingen

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.1	0.7	0.2

og sannsynlighetsfordelingen

y	0	1	2
$P(Y = y)$	0.3	0.4	0.3

.

Beregn $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $E(Y)$ og $\mathrm{Var}(Y)$.

(b) Anta at X og Y er uavhengige stokastiske variable, sett opp simultanfordelingen.

Finn $P(X + Y = 2)$. Beregn også $E(X + Y)$ og $\mathrm{Var}(X + Y)$.

Høst 2013

Oppgave 1 H13

Poteter selges i pakker på 5 kg. Vekta varierer fra pakke til pakke og vi antar at vekta er normalfordelt med forventning 5.0 kg og standardavvik 0.15 kg

(a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt pakke med poteter veier mindre enn 4.9 kg?

Hva er sannsynligheten for at vekta er mellom 4.8 kg og 5.2 kg?

(b) Finn en grense k slik at sannsynligheten for at vekta er mindre enn k er 0.05.

(c) Vi kjøper 10 pakker med poteter. Hva er sannsynligheten for at totalvekta er mindre enn 45 kg?

Oppgave 2 H13

Et firma har ansatt en kvalitetskontrollør. Han kontrollerer 20 % av produktene som firmaet sender ut på markedet.
Hvis kontrolløren har kontrollert et produkt, er sannsynligheten for at det er noe feil med produktet lik 0.04.
Hvis kontrolløren ikke har sjekket produktet, er sannsynligheten for at det er noe feil med produktet lik 0.16.

(a) La K være begivenheten at kontrolløren har kontrollert produktet og F begivenheten at det er noe feil med produktet. Tegn et sannsynlighetstre for denne situasjonen med nødvendige betegnelser og sannsynligheter.

(b) Hva er sannsynligheten for at et produkt er blitt kontrollert og at det er noe feil med produktet?

Hva er sannsynligheten for at produktet er kontrollert gitt at det ikke er noe feil med produktet?

Oppgave 3 H13

Det viser seg at 25 % av de som går på et bestemt treningssenter er overvektige.

(a) Ved tilfeldig trekning velger vi 15 personer fra treningssenteret. Vi lar X være antallet av disse som er overvektige. Forklar hvorfor det er rimelig å anta at $X \sim \text{bin}(15, 0.25)$.

(b) Beregn $P(X = 4)$ og $P(X \geq 2)$.

(c) Vi ser nå på et tilfeldig utvalg på 100 personer fra treningssenteret og lar Y være antallet som er overvektige.

Beregn $E(Y)$ og $\text{Var}(Y)$. Beregn $P(Y = 30)$ og $P(Y \geq 30)$, bruk normaltilnærming dersom det gir mindre regning. Forklar hvorfor det er rimelig å bruke normaltilnærming i dette tilfellet.

Oppgave 4 H13

Hver dag i løpet av ei uke undersøker vi bensinprisen på to forskjellige bensinstasjoner i en by. Resultatet, i kr per liter, finner du i tabellen nedenfor.

	Man	Tirs	Ons	Tors	Fre	Lør	Søn
Shell, x_i	15.20	15.40	15.75	15.50	15.80	15.90	15.70
UnoX, y_i	15.05	15.30	15.60	15.45	15.65	15.80	15.50

Den delvis utfylte tabellen nedenfor reduserer regnearbeidet i resten av oppgaven.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
15.20	15.05	-0.41	-0.43	0.1681	0.1849	0.1763
15.40	15.30	-0.21	-0.18	0.0441	0.0324	0.0378
15.75	15.60	0.14	0.12	0.0196	0.0144	0.0168
15.50	15.45	-0.11	-0.03	0.0121	0.0009	0.0033
15.80	15.65	0.19	0.17	0.0361	0.0289	0.0323
15.90	15.80	0.29	0.32	0.0841	0.1024	0.0928
15.70	15.50					
$\bar{x} \approx$??.??	$\bar{y} \approx 15.48$					

(a) Finn median, gjennomsnitt og standardavvik for bensinprisen hos Shell.

(b) Tegn et spredningsdiagram for bensinprisene på de to bensinstasjonene. Beregn den empiriske korrelasjonskoeffisienten. Kommenter verdien.

Oppgave 5 H13

Vi har at $X \sim N(\mu, 3.7)$. Vi tar $n = 49$ uavhengige observasjoner av X og får $\bar{x} = 14.8$. På 2.5 % nivå skal du teste $H_0 : \mu = 15$ mot $H_1 : \mu < 15$.

Oppgave 6 H13

Vi antar at hvor mye en tilfeldig valgt person bruker på julegaver er normalfordelt. Vi undersøker 16 tilfeldig valgte personer og får svarene

1 000	1 000	550	750	950	750	250	100
550	950	1 050	800	650	700	500	200

Det oppgis her at det empiriske standardavviket til disse 16 observasjonene er $s \approx 297.75$.

(a) Konstruer et 95 % konfidensintervall for forventet beløp som brukes på julegaver.

(b) La μ være forventet beløp en person bruker på julegaver. Test hypotesen $H_0 : \mu = 500$ mot $H_1 : \mu > 500$ på 5 % nivå.

Oppgave 7 H13

(a) I et spill skal vi kaste en terning 3 ganger, premien bestemmes ut fra antall seksere. Dersom terningen er rettferdig, vil sannsynlighetfordelinga til antall seksere være

Antall seksere	0	1	2	3
Sannsynlighet	0.5787	0.3472	0.0694	0.0046

Forklar kort hvordan man kommer fram til denne sannsynlighetsfordelinga.

Jens spiller spillet over 100 ganger, resultatet ble

Antall seksere	0	1	2	3
Frekvens	48	35	15	2

Vi har en mistanke om at terningen Jens bruker ikke er helt rettferdig. Utfør en χ^2–test på 1 % nivå. Hva blir konklusjonen?

(b) Forklar at vi kan avgjøre om terningen Jens bruker gir for mange seksere ved hjelp av en hypotesetest i binomisk modell. Utfør en slik test på 5 % nivå.

Vår 2014

Oppgave 1 V14

En person er på slankekur. Vi innfører variabelen X for vekttapet i løpet av ei uke og antar at X er normalfordelt med forventning 0.5 kg og standardavvik 0.3 kg.

(a) Beregn $P(X \leq 0)$. Hva betyr det for slankekuren at $X \leq 0$? Beregn også $P(X > 1)$.

(b) Vi antar at resultatet av slankekuren for påfølgende uker er uavhengige av hverandre. La Y være samlet vekttap etter 4 uker med slanking.

Forklar at $Y \sim N(2, 0.6)$. Beregn $P(Y > 3)$.

(c) To studenter jobber med følgende spørsmål:

Hva er sannsynligheten for at vekttapet er på mer enn 1 kg per uke i to påfølgende uker?
(Antakelsen om at vekttapet er uavhengig for påfølgende uker gjelder også her.)

Studentene er enige om å sette vekttapet i den første uka lik X_1 og vekttapet i den andre uka lik X_2. Den videre framgangsmåten er de uenige i.

Student A Vil beregne $P(X_1 + X_2 > 2)$.

Student B Vil beregne $P(\{X_1 > 1\} \cap \{X_2 > 1\})$.

Hvem av de to er du enig med? Gi en kort begrunnelse og løs deretter oppgaven.

Oppgave 2 V14

Et firma som selger slankekurer reklamerer med at 60 % av kundene deres er svært fornøyd med resultatet og at 30 % er tilfreds med resultatet av slankekuren. Kun 10 % av kundene er misfornøyd med effekten av slankekuren. Vi spør et tilfeldig utvalg av kundene til firmaet og resultatet er summert opp i tabellen under.

Svært fornøyd	Tilfreds	Misfornøyd
81	42	27

Utfør en χ^2 test på 5 % nivå for å se om de oppgitte prosentene er realistiske.

Oppgave 3 V14

Vi har utviklet et nytt konsept for slankekur. Vi antar at vekttapet per uke er normalfordelt. En pilottest av slankekuren gav følgende vekttap per uke (tall i gram).

347 731 519 700 532 227 833 408 449 492

Empirisk standardavvik til disse tallene er 185.3 (standardavviket er beregnet med R eventuelt Excel).
Konstruer et 95 % konfidensintervall for forventet vekttap per uke.

Oppgave 4 V14

Du har 10 egg i en pakke, 2 av dem er fordervet.

(a) Du skal bake en kake der du trenger 3 egg. Hvor mange forskjellige utvalg på 3 egg kan du ta ut av 10 pakningen din? Hvor mange utvalg på 3 egg inneholder ingen fordervede egg?

(b) La X være antall fordervede egg i utvalget ditt. Hva slags fordeling har X? Begrunn svaret. Beregn $P(X = 2)$. Hva blir $P(X = 3)$?

(c) Beregn $E(X)$, $\text{Var}(X)$ og σ_X.

Oppgave 5 V14

(a) En produksjon har hatt defektsannsynlighet på 3 %. Produksjonsutstyret begynner å bli slitt og vi har en mistanke om at det medfører høyere defektsannsynlighet. Vi utfører en testproduksjon på 200 artikler og får at 9 av dem er defekt. Utfør en hypotesetest på 5 % nivå for å avgjøre om dette tyder på at defektsannsynligheten har økt.

(b) Hva er styrken til denne testen i alternativet der defektsannsynligheten har økt til 8 %?

Oppgave 6 V14

En bedrift har ansatt en kvalitetskontrollør. Han kontrollerer 40 % av alle produktene som bedriften sender ut på markedet. Hvis kvalitetskontrolløren har kontrollert et produkt, er sannsynligheten for at det er noe feil med produktet lik 0.02. Hvis kvalitetskontrolløren ikke har kontrollert produktet er sannsynligheten for at det er feil på produktet lik 0.20.

(a) La K stå for at produktet er kontrollert av kvalitetskontrolløren og F bety at det er feil på produktet. Tegn et sannsynlighetstre for denne situasjonen og påfør treet de nødvendige symboler og sannsynligheter.

(b) Hva er sannsynligheten for at et produkt er kontrollert og at det er noe feil med produktet? Hva er sannsynligheten for at et produkt er kontrollert gitt at det ikke er noe feil på produktet?

Oppgave 7 V14

Vi antar at antall oppringinger til et sentralbord i en liten bedrift er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 7$ per time.

(a) Hva er sannsynligheten for akkurat 5 oppringninger i løpet av en time? Hva er sannsynligheten for 3 eller flere oppringninger i løpet av en time?

(b) Hva er sannsynligheten for akkurat 16 oppringninger i løpet av en 3 timers periode?

Oppgave 8 V14

Et firma arrangerer julebord for sine ansatte. Påmeldingen til julebordet er oppsummert i tabellen under.

	Deltar	Deltar ikke
Kvinne	35	9
Mann	60	41

Bruk en χ^2 test på 5 % nivå for å avgjøre om det er uavhengighet mellom deltakelse på julebordet og kjønn.

Høst 2014

Oppgave 1 H14

Et firma har lagt inn anbud på to ulike prosjekt. Firmaet anslår sannsynligheten til å få tildelt prosjekt A som 0.4 og sannsynligheten for å få tildelt prosjekt B som 0.6. Hvis man ikke får tildelt prosjekt A, anslås sannsynligheten for å få prosjekt B til å bli redusert til 0.5.

a) Hva er sannsynligheten for at firmaet ikke blir tildelt prosjekt A hvis vi vet at firmaet ble tildelt prosjekt B?

b) Hva er sannsynligheten for at firmaet blir tildelt minst ett av de to prosjektene?

Oppgave 2 H14

a) Vi antar at tiden Anders bruker på å løse en statistikkoppgave er normalfordelt med forventning 20 minutter og standardavvik 5 minutter. Finn sannsynligheten for at Anders bruker mindre enn 17 minutter på en statistikkoppgave. Hva er sannsynligheten for at Anders bruker mellom 16 og 24 minutter på en oppgave?

b) Anders løser 4 statistikkoppgaver etter hverandre. Vi antar at det er uavhengighet mellom tidsbruken på de ulike oppgavene. La Y være samlet tidsbruk på de 4 oppgavene. Finn $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$ og σ_Y.

c) Berit løser også statistikkoppgaver, vi antar at tiden hun bruker på å løse en oppgave er normalfordelt med forventning 16 minutter og standardavvik 4 minutter. Anders og Berit starter samtidig med hver sin oppgave. Vi antar at det er uavhengighet mellom tidsbruken til Anders og Berit. Hva er sannsynligheten for at Berit blir ferdig med oppgaven før Anders?

Oppgave 3 H14

En undersøkelse viser at forventet tid en gruppe studenter bruker på å løse 15 oppgaver i statistikk er normalfordelt med forventning 240 minutter og standardavvik 50 minutter. Vi gir et tilfeldig utvalg på 25 av disse studentene et spesielt undervisningsopplegg som skal gjøre dem mer effektive i oppgaveløsningen. Etter undervisningsopplegget gis studentene 15 oppgaver og vi finner at gjennomsnittstiden blir 198 minutter og det empiriske standardavviket blir 48 minutter.

a) Sett opp passende hypoteser til denne situasjonen.

b) Hva blir konklusjonen på hypotesetestingsproblemet når signifikansnivået skal være 5 %?

Oppgave 4 H14

a) Du er på ferie i Kina, du forviller deg inn i et eksamenslokale og må svare på en flervalgs eksamen på kinesisk. Du kan ikke kinesisk og må bare tippe. Det er totalt 15 deloppgaver og hver deloppgave har 5 svaralternativ der ett er riktig. Vi lar X være antall riktige svar du får på denne eksamen. Begrunn at X er binomisk fordelt. Hva er n og hva er p?

b) Vi skal nå la $Y \sim \mathrm{bin}(20, 0.1)$. Finn $P(Y = 3)$ og $P(Y > 3)$. Hva blir $E(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, og σ_Y?

Oppgave 5 H14

Ved en høgskole har det vært slik at ved bedømming av masteroppgaven har 36 % av studentene fått karakteren A, 43 % har fått B, mens de resterende 21 % har fått C eller dårligere. Høgskolen bestemmer seg for at det skal innføres strengere retningslinjer for sensur slik at det kun er de absolutt beste som får toppkarakterene A eller B. En stund etter innføringen av de nye retningslinjene ser man at ved sensur av masteroppgaver får 24 karakteren A, 31 får karakteren B og 75 får karakteren C eller dårligere. Tyder dette på at karakterfordelingen har blitt endret? Bruk en χ^2–test med 5 % nivå.

Oppgave 6 H14

Vi gir 9 studenter en oppgave i statistikk og tar tiden studentene bruker på å løse oppgaven. Vi avrunder tiden til nærmeste hele minutt og tidene ble

$$9 \quad 6 \quad 9 \quad 7 \quad 11 \quad 12 \quad 2 \quad 10 \quad 7$$

a) Beregn gjennomsnitt, median og kvartiler for dette datasettet. Tegn boksdiagram.

b) Vi antar at tiden en student bruker på en oppgave i statistikk er normalfordelt. Konstruer et 98 % konfidensintervall for forventet tidsbruk ut fra denne undersøkelsen.(Det oppgis at det empiriske standardavviket til tallene ovenfor er 3.02.)

Oppgave 7 H14

Gitt sannsynlighetsfordelinga

x	-2	0	2	4	5
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Finn $P(X \leq 2)$, $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Oppgave 8 H14

a) I ei forening er det 25 jenter og 22 gutter. Det skal velges en festkomite på 4 personer. Hvor mange forskjellige festkomiteer er det mulig å lage? Hvor mange festkomiteer er det mulig å lage dersom festkomiteen skal bestå av 2 jenter og 2 gutter?

b) På en fest deltar det 35 personer. Ved ankomst legges en lapp med festdeltakerens navn på i ei skål. Når festen er slutt trekkes det 3 lapper fra skåla og navnene som står på disse lappene skal rydde festlokalet. Frode har sovna, hva er sannsynligheten for at han blir trukket ut til å rydde festlokalet?

Vår 2015

Oppgave 1 V15

Antall studenthenvendelser til en foreleser på et universitet i dagene før eksamen er Poissonfordelt med forventning $\lambda = 6$ per arbeidsdag. Her antar vi at en arbeidsdag varer i 8 timer.

a) Hva er sannsynligheten for at foreleseren får akkurat 7 studenthenvendelser en dag? Hva er sannsynligheten for at foreleseren får 3 eller færre studenthenvendelser en dag?

b) Foreleseren tar lunsjpause på 0.5 time. Hva er sannsynligheten for at det er minst en studenthenvendelse i løpet av lunsjpausen?

Oppgave 2 V15

For en type narkotikahund gjelder at sannsynligheten for at hunden reagerer på en person som bærer narkotika er 0.9. Sannsynligheten for at den reagerer på en person som ikke bærer narkotika er 0.02. I et bestemt område regner man med at 5 % av personene bærer narkotika. Vi definerer begivenhetene:
B: Personen bærer narkotika
R: Narkotikahunden reagerer

a) Dersom narkotikahunden undersøker en person i dette området, hva er da sannsynligheten for at hunden reagerer? (Hint: Tegn sannsynlighetstre)

b) Hunden har reagert på en person. Hva er sannsynligheten for at personen bærer narkotika?

Oppgave 3 V15

Antall kilometer (km) en budbilsjåfør kjører per dag er normalfordelt med forventning 350 km og standardavvik 70 km.

(a) Hva er sannsynligheten for at en budbilsjåfør kjører mindre enn 290 km på en dag? Hva er sannsynligheten for at en budbilsjåfør kjører mellom 290 km og 410 km på en dag?

(b) Vi antar at kjørelengden på ulike dager er uavhengig av hverandre. Hva er forventet total kjørelengde i løpet av 5 dager? Hva er sannsynligheten for at en budbilsjåfør kjører lengre enn 1900 km i løpet av 5 dager?

(c) En budbilsjåfør har ikke lov til å bruke bilen til private ærend. I løpet av 5 dager kjører budbilsjåfør Anders 1920 km og budbilsjåfør Bertil 2100 km. Hvis du satt i ledelsen i budbilbedriften, hvordan ville du vurdere Anders og Bertil sine kjørelengder i forhold til bruk av bil i private ærend? Begrunn svaret!

Oppgave 4 V15

Et gatekjøkken reklamerer med at 90 % av bestillingene de får inn blir servert innen 10 minutter. Etter en tid med mange oppsigelser og nyansettelser mener noen at det er færre av bestillingene som serveres innen 10 minutter.
Vi lar X være antall av 80 tilfeldig valgte kunder som får maten servert innen 10 minutter.

(a) Begrunn at dersom bedriftens påstand er sann, vil $X \sim \text{bin}(80, 0.9)$. Forklar hvorfor det i denne situasjonen er aktuelt å teste hypotesene: $H_0 : p = 0.90$ mot $H_1 : p < 0.90$.

(b) Finn kritisk verdi på testen når signifikansnivået skal være 5 %.

(c) Vi observerer at 65 av de 80 tilfeldig valgte kundene får servering innen 10 minutter. Hva er p–verdien til denne observasjonen? Gir observasjonen grunnlag for å forkaste H_0 på 5 % nivå?

Oppgave 5 V15

Vi skal her se på om det er en sammenheng mellom bruk av mobiltelefon i bil og om man har vært utsatt for bilulykke det siste året.
775 bilførere ble undersøkt og de fordelte seg på de forskjellige kategoriene som følger:

	Bilulykke det siste året	Ikke bilulykke det siste året
Bruker mobiltelefon i bil	25	300
Bruker ikke mobiltelefon i bil	50	400

Utfør en χ^2–test på 2.5 % nivå for å avgjøre hvorvidt det er samvariasjon mellom disse variablene.

Oppgave 6 V15

I en befolkningsgruppe har det vært slik at 41 % har blodtype A, 10 % blodtype B, 4 % blodtype AB og 45 % blodtype 0. Vi er interessert i å finne ut om disse andelene fortsatt gjelder og undersøker 200 tilfeldig valgte personer fra befolkningen, resultatet ble.

Blodtype	A	B	AB	0	
Antall	89	18	12	81	$n = 200$

Utfør en χ^2–test på 5 % nivå for å avgjøre om de oppgitte andelene fortsatt gjelder.

Oppgave 7 V15

En gang i måneden vasker Vidar vinduene i huset sitt. Han noterer ned hvor lang tid det tar. Resultatene for 9 ulike måneder ble (i minutter):

$$32 \quad 20 \quad 56 \quad 50 \quad 81 \quad 22 \quad 63 \quad 82 \quad 43$$

Det oppgis at det empiriske standardavviket til disse tallene er 23.04.

a) Beregn gjennomsnitt og varians. Hva er variasjonsbredden?

b) Lag et boksdiagram over datasettet.

c) Det er rimelig å oppfatte tiden Vidar bruker på å vaske vinduene i huset sitt som normalfordelt. Finn et 98% konfidensintervall for forventningen μ.

Høst 2015

Oppgave 1 H15

En bedrift som monterer bilalarmer har ansatt 3 montører: M_1, M_2 og M_3. Montør M_1 arbeider raskere enn de to andre og tar unna 40 % av alle bestillingene, M_2 og M_3 tar 30 % hver. Arbeid utført av M_1 får oftest reklamasjoner. Det blir reklamert på 5 % av alarmene som er montert av M_1. Reklamasjonsprosenten for M_2 og M_3 er henholdsvis 3 % og 1 %.

a) Definer nødvendige begivenheter for denne situasjonen, og tegn et sannsynlighetstre for de aktuelle muligheter med påførte ubetingete og betingete sannsynligheter (både symbolske betegnelser og tall).

b) Hva er sannsynligheten for at det blir reklamert på en montert bilalarm?

c) Hvis vi får vite at det blir reklamert på en montering, hva er da sannsynligheten for at det er M_1 som har montert alarmen?

Oppgave 2 H15

På en lapskausboks er det oppgitt at den inneholder 300 gram kjøtt. Vi lar X være kjøttmengden i en lapskausboks, og vi ser på X som normalfordelt med forventning $\mu = 300$ og standardavvik $\sigma = 25$, hvor begge størrelser er angitt i gram.

a) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt lapskausboks inneholder mindre enn 260 gram kjøtt. Finn også sannsynligheten for at kjøttmengden i en lapskausboks ligger mellom 260 og 310 gram.

En mann skal ha stor middag, han kjøper 10 bokser lapskaus som han varmer opp i en stor gryte. La X_i være kjøttmengden i boks nr i for $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

b) Hva er sannsynligheten for at lapskausgryten til mannen inneholder mindre enn 2800 gram kjøtt?

Bedriften som produserer lapskausboksene har gått med underskudd den siste tiden. Det er derfor mistanke om at de forsøker å spare penger ved å ha mindre kjøtt i hver boks. Vi undersøker kjøttinnholdet i 10 lapskausbokser og får at gjennomsnittlig kjøttmengde er 289 gram.

c) Du skal vurdere om gjennomsnittet funnet over representerer en minking i kjøttinnholdet i lapskausboksene eller om de kan skyldes tilfeldige svingninger i kjøttinnholdet. Sett opp nullhypotese og alternativhypotese for denne problemstillinga. Gi en kort begrunnelse for hypotesene.

d) Finn kritisk verdi på testen når nivået skal være 5%. Hva blir konklusjonen på testen?

En annen bedrift produserer også lapskaus på boks. Det er rimelig å anta at kjøttinholdet er normalfordelt. Vi måler kjøttinnholdet i 10 bokser, resultatet i gram ble:

294 217 265 412 217 232 243 251 253 304

Det oppgis at det empiriske standardavviket for disse tallene er 58.1 gram.

e) Konstruer et 90%-konfidensintervall for forventet kjøttinnhold i en lapskausboks fra denne produsenten.

Oppgave 3 H15

Under en teknisk kontroll fikk 10 % av alle bilene mangellapp på grunn av feil med lysene. 7 % av de kontrollerte bilene fikk mangellapp på grunn av slitte dekk. 2 % av de kontrollerte bilene fikk mangellapp både for lysfeil og dekkfeil. La L være begivenheten at en kontrollert bil har mangler med lysene og D være begivenheten at en bil har mangler ved dekkene. Er D og L uavhengige begivenheter? Finn $P(D|L)$.

Oppgave 4 H15

12 jenter og 18 menn skal ha en fest. Det skal velges ut en festkomite på 5, valget skjer ved loddtrekning. La X være antall menn i utvalget. Finn $P(X = 1)$ og $P(X \geq 2)$.

Oppgave 5 H15

På en vei der fartsgrensen er 50 km/t ble det foretatt fartsmåling av 9 biler. Resultatet ble (målt i km/t):

61 51 50 51 53 45 46 41 63

a) Beregn gjennomsnittsfart, median og kvartiler.

b) Tegn et boksdiagram og kommenter diagrammets form.

Oppgave 6 H15

I denne oppgaven lar vi $X \sim N(15, 7)$.

a) Beregn $P(X > 14)$. Finn k slik at $P(X < k) = 0.30$.

b) Vi lar $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$ være 16 uavhengige observasjoner av den nevnte stokastiske variabelen. Sett $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_{16}}{16}$. Beregn $P(\bar{X} > 15.3)$. Finn k slik at $P(\bar{X} < k) = 0.30$.

c) Sett $Y = 2X_1 - 3X_2$. Finn $E(Y)$ og $\mathrm{Var}(Y)$.

Vår 2016

Oppgave 1 V16

Vi spør 15 personer om hvor mange timer de ser på TV i løpet av ei uke. Resultatet ble:

35 41 32 43 66 35 31 5 34 32 38 16 30 20 21

Det opplyses at det empiriske standardavviket for dette datasettet er $s = 13.81$.

(a) Finn median og kvartiler. Tegn et boksdiagram.

(b) Vi antar at antall timer en tilfeldig valgt person ser på TV i løpet av ei uke er normalfordelt. Lag et 95 % konfidensintervall for forventet antall timer en tilfeldig valgt person ser på TV i løpet av ei uke.

Oppgave 2 V16

Vi antar at antall tilfeller av forsvunnet bagasje ved en flyplass er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 0.7$ per døgn.
Hva er sannsynligheten for at det i løpet av et døgn er 2 eller færre tilfeller av forsvunnet bagasje?
Hva er sannsynligheten for at det i løpet av en 5 døgns periode er akkurat 4 tilfeller av forsvunnet bagasje?

Oppgave 3 V16

Vi deler studentene ved et universitet inn i kategorier alt etter hvor ofte de er inne på Fronter for å holde seg oppdatert. Studentene fordeler seg på følgende kategorier med følgende prosentandeler:

Nr.	Kategori	Andel
1	2 eller færre ganger per semester	4 %
2	Cirka en gang per måned	12 %
3	Cirka en gang per uke	23 %
4	Flere ganger per uke	34 %
5	Daglig	27 %

Det settes i gang en kampanje for å få studentene som bruker Fronter sjeldent til å bli mer aktive brukere. Etter en stund kartlegger en Fronter–bruken til 200 tilfeldig valgte studenter. Resultatet ble:

Katogori nr:	1	2	3	4	5
Antall studenter:	2	11	59	73	55

Bruk en χ^2–test på 5 % nivå for å avgjøre om kampanjen har hatt effekt.

Oppgave 4 V16

Levetiden til en brødrister, er normalfordelt med forventning 1000 dager og standardavvik 200 dager.

a) Finn sannsynligheten for at levetiden er mindre enn 880 dager. Finn sannsynligheten for at levetiden er mellom 880 dager og 1360 dager.

b) Hva er sannsynligheten for at samlet levetid til 4 brødristere er mer enn 4250 dager? Angi hvilke forutsetninger du gjør.

c) Produsenten vurderer å innføre en garanti som fungerer slik at dersom brødristeren har en levetid på mindre enn k dager, får du en ny brødrister. Produsenten ønsker at maksimalt 2 % av brødristerne skal omfattes av denne garantien. Bestem k.

d) Den komponenten som oftest forårsaker at brødristeren går i stykker skiftes ut med en komponent som det påstås har lengre levetid, dermed antas at levetiden på brødristerne vil øke. Vi undersøker levetiden til 10 tilfeldig valgte brødristere med den nye komponenten. Levetiden, i dager, ble:

   1103 894 952 1131 977 1060 1213 1266 1198 1113

   Det empiriske standardavviket til dette datasettet er $s = 120.8$. Sett opp passende hypoteser til denne problemstillingen. Hva blir konklusjonen på hypotesetestingsproblemet når signifikansnivået er 2.5 % ?

Oppgave 5 V16

En nettbutikk gjør en grundig undersøkelse av trafikken på nettsidene deres og finner ut at 50 % av kundene som starter en kjøpsprosess ikke fullfører kjøpsprosessen. Nettbutikken forsøker å gjøre kjøpsprosessen enklere. Etter at denne endringa er utført analyserer de 300 tilfeldig valgte besøkende på nettsiden deres som starter en kjøpsprosess, av disse var det 128 som ikke fullførte kjøpsprosessen. La p være sannsynligheten for at en kunde som starter en kjøpsprosess ikke fullfører kjøpsprosessen.

a) Forklar hvorfor det i denne situasjonen er aktuelt å teste $H_0 : p = 0.50$ mot $H_1 : p < 0.50$. Hva blir kritisk verdi på denne testen når signifikansnivået settes til 0.05?

b) Regn ut p–verdien til observasjonen om at 128 av 300 avbrøt kjøpsprosessen de hadde satt i gang.

Oppgave 6 V16

I en butikk blir 20 % av alle kjøpene betalt med kontanter, de resterende 80 % blir betalt med kort. Av kjøpene som betales med kontanter er det 15 % der summen som betales er over 1000 kr. For kjøpene som betales med kort er det 65 % der summen er over 1000 kr. La K være hendelsen at det betales med kontanter og T være hendelsen at summen er over 1000 kr.

a) Hva er sannsynligheten for at summen som betales er over 1000 kr? (Hint: Det kan være hjelp i å tegne et sannsynlighetstre.)

b) Nina har nettopp vært i butikken og gjort en storhandel, hun betalte over 1000 kr. Hva er sannsynligheten for at hun betalte med kontanter?

Oppgave 7 V16

Per jobber i utlånsavdelinga i en bank. Den siste uka har han innvilget 20 lån med sikkerhet i bolig. 5 av disse lånene vurderer han som at det er "lånt til over pipa," altså at lånebeløpet er større enn boligens verdi. Sjefen til Per melder om at han vil velge ut tre tilfeldige lån av disse 20 for å gjøre en grundig sjekk av om lånene holder seg innenfor de retningslinjene banken har satt til sikkerhet for lån. Vi lar X være antallet av de 5 lånene som Per har vurdert som "lån til over pipa" som sjefen velger ut for grundigere undersøkelse.

a) Finn $P(X = 0)$. Finn også sannsynligheten for at sjefen til Per velger ut 3 av lånene som Per har vurdert til at det er "lånt til over pipa."

b) Finn $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ og σ_X.

Oppgave 8 V16

Ei studentforening inviterer til en fest via Facebook. Der kan de inviterte svare at de skal delta, at de kanskje skal delta eller at de ikke skal delta. Vi ønsker å teste om det er uavhengighet mellom svarkategori og kjønn ved å utføre en χ^2–test på 5 % nivå. Her er resultatet fra Facebook–invitasjonen:

	Skal	Kanskje	Skal ikke
Jente	58	24	28
Gutt	71	36	14

Hva blir konklusjonen på hypotesetesten?

Høst 2016

Oppgave 1 H16

Med energiinnhold menes i denne oppgave energiinnhold målt i kilokalorier (kcal). Kaloriinnholdet i rundstykker som kjøpes i ei studentkantine antas å være normalfordelt med forventning 250 kalorier og standardavvik 20 kalorier.

a) Hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt rundstykke inneholder færre enn 215 kalorier? Hva er sannsynligheten for at det inneholder mellom 215 og 265 kalorier?

b) Nils er sulten og spiser 6 rundstykker. Hva er sannsynligheten for at han får i seg mer enn 1600 kalorier?

c) Et glass juice fra den samme studentkantina har kaloriinnhold som er normalfordelt med forventning 120 kalorier og standardavvik 10 kalorier. Nina spiser 3 rundstykker og drikker 2 glass juice. Vi lar U være kaloriinnholdet i dette måltidet. Forklar at det er rimelig å anta at $U \sim N(990, \sqrt{1400})$.

d) Hva er sannsynligheten for at Ninas kaloriinntak er mindre enn 950 kalorier?

e) Kantina skifter leverandør av smør. Dermed kan det hende at kaloriinnholdet i rundstykkene endres. En ernæringsekspert undersøker 25 tilfeldig valgte rundstykker og finner at gjennomsnittlig kaloriinnhold er 223.2 med et empirisk standardavvik på 30.7. Lag et 99 % konfidensintervall for kaloriinnholdet i rundstykkene etter at kantina har skiftet leverandør av smør.

f) Kantina bytter også leverandør av juice. Den nye leverandøren hevder at kaloriinnholdet i juicen deres er mindre enn 120 kalorier. Vi ønsker å undersøke denne påstanden ved å utføre en hypotesetest. Sett opp passende hypoteser.

g) Vi undersøker 16 tilfeldig valgte juiceglass fra den nye leverandøren og finner at gjennomsnittlig kaloriinnhold er 114.7 med et empirisk standardavvik på 5.7. Hva blir konklusjonen på hypotesetesten når signifikansnivået settes til 2.5 %?

Oppgave 2 H16

Ved et studiested er det 55 % kvinnelige studenter. De som jobber i kantina ved studiestedet mener at det er svært få av de kvinnelige studentene som kjøper lunsj i kantina.

a) Vi lar p være andelen kvinnelige studenter som kjøper lunsj i kantina. Forklar at det i denne situasjonen er aktuelt å utføre hypotesetesten $H_0 : p = 0.55$ mot $H_1 : p < 0.55$. Sett opp en passende testobservator om vi ønsker å undersøke 100 tilfeldig valgte studenter.

b) Vi undersøker 100 tilfeldig valgte studenter som kjøper lunsj i kantina og lar X være antall kvinner av disse. Finn kritisk verdi for hypotesetesten når signifikansnivået skal være 5 %.

Oppgave 3 H16

Kantina har tre forskjellige lunsjmenyer. Meny 1 er grovbrød og melk, meny 2 er rundstykker og juice og meny 3 er hamburger og brus. Det gjøres en registrering av kjønnet på de studentene som kjøper de ulike menyene. Her er resultatet:

	Meny 1	Meny 2	Meny 3
Kvinne	28	23	11
Mann	27	24	17

Bruk en χ^2–test på 5 % nivå for undersøke om det er uavhengighet eller ikke mellom menyvalg og kjønn.

Oppgave 4 H16

Per og Pål starter ofte dagen med en kaffe i kantina. Sannsynligheten for at Per starter dagen med kaffe i kantina er 0.6, for Pål er denne sannsynligheten 0.7. Anta at det er uavhengighet mellom hendelsene at Per henholdsvis Pål starer dagen med en kaffe i kantina.
Hva er sannsynligheten for at både Per og Pål starer dagen i dag med en kaffe i kantina? Hva er sannsynligheten for at minst en av dem har startet dagen i dag med en kaffe i kantina?

Oppgave 5 H16

Vi undersøker hvor mye penger noen tilfeldig valgte studenter har brukt i kantina en dag. Resultatet ble:

$$46 \quad 7 \quad 39 \quad 78 \quad 154 \quad 89 \quad 12 \quad 29 \quad 54$$

a) Beregn gjennomsnitt og median.

b) Tegn et boksdiagram.

Oppgave 6 H16

Antall kunder som ankommer kantina mellom klokka 9 og 10 er Poisonfordelt med parameter $\lambda = 20$ per time. Pengeskrinet i kantina er ubevoktet i 5 minutter. Hva er sannsynligheten for at det ikke ankommer kunder mens pengeskrinet er ubevoktet?

Oppgave 7 H16

I kantina står det 4 flasker med ketchup, en av dem er tom. Vi observerer 8 studenter som skal forsyne seg med ketchup, ingen av disse 8 studentene har sett hvilken ketchupflaske noen av de andre 7 valgte. Vi lar X være antallet av de 8 som velger den tomme ketchupflaska. Finn $P(X = 3)$.

Del II

Løsninger

Vår 2001

Oppgave 1 V01

a Gjennomsnittet blir:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\cdot(168+169+171+170+164+166+171+174+168+167)\\ &= \frac{1668}{10} = \underline{\underline{168.8}}\end{aligned}$$

Gjennomsnittshøyden er 168.8 cm.

Vi ordner observasjonene etter størrelse og får:

164 166 167 168 168 169 170 171 171 174

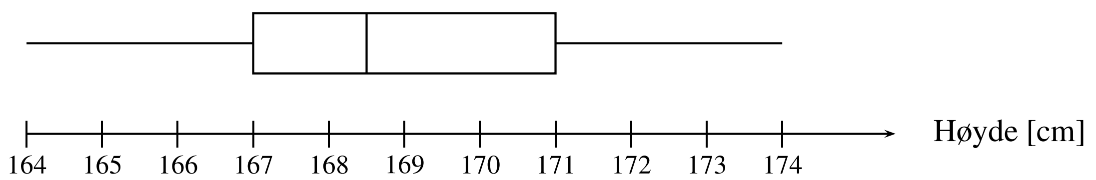
Medianplassen er: $(10+1)\cdot 0.5 = 5.5$

Medianen blir da: $m = (x_{(5)} + x_{(6)})/2 = (168+169)/2 = \underline{\underline{168.5}}$.

Første kvartil er medianen av de 5 minste observasjonene, vi får: $q_1 = \underline{\underline{167}}$

Tredje kvartil er lik medianen av de 5 største observasjonene. $q_3 = 171$

b Boksdiagrammet ser slik ut:

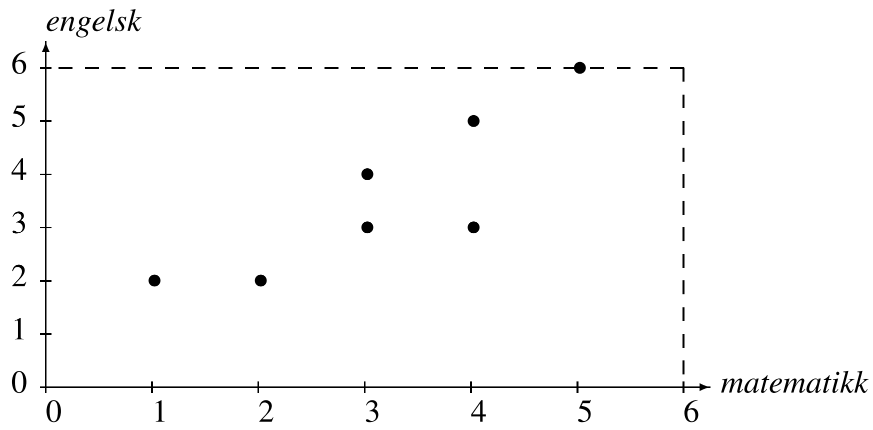


Venstre og høyre hale er nokså like. I den sentrale delen av fordelinga er det en viss skjevhet siden medianen ikke ligger midt mellom kvartilene. Medianen ligger nærmere første kvartil enn andre kvartil.

Høst 2001

Oppgave 1 H01

a Spredningsdiagrammet ser slik ut:



Kommentar: Vi ser en viss positiv lineær samvariasjon mellom karakterene i matematikk og engelsk. Gode karakterer i det ene faget henger sammen med gode karakterer i det andre, tilsvarende for dårlige karakterer.

b Gjennomsnittskarakter i matematikk: $\overline{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{22}{7} = \underline{\underline{3.14}}$

Gjennomsnittskarakter i engelsk: $\overline{y} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i = \frac{25}{7} = \underline{\underline{3.57}}$

Vi bruker de oppgitte verdiene og finner korrelasjonskoeffisienten:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left[(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{10.429}{\sqrt{10.857}\sqrt{13.714}} = \underline{\underline{0.855}}$$

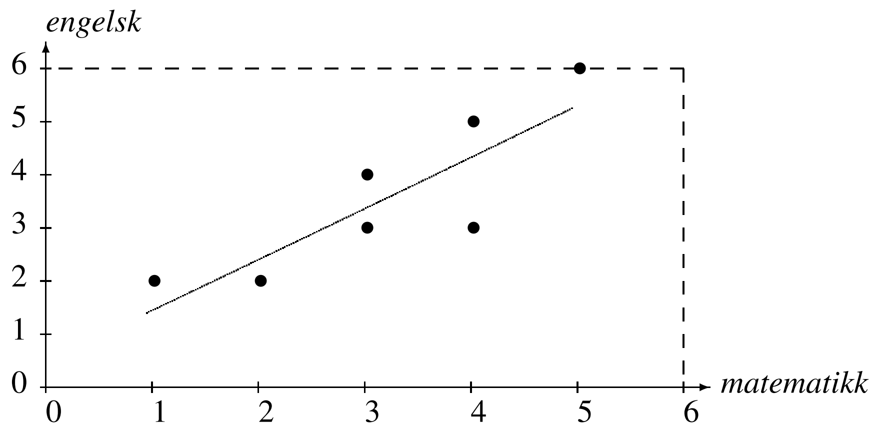
Tolkning: $r > 0$ angir positiv lineær samvariasjon. $r = 0.855$ som er nokså nær 1, angir at den lineære samvariasjonen er nokså god.

c Vi bruker de oppgitte verdiene og får:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left[(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right]}{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{10.429}{10.857} = 0.961$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x} = 3.57 - 0.961 \cdot 3.14 = 0.552$$

Regresjonslinja blir: $\underline{\underline{\hat{y}(x) = 0.552 + 0.961 \cdot x}}$



Oppgave 4 H01

a $\text{Var}(D) = \text{Var}\left[1 \cdot I + (-1) \cdot U\right] = 1^2 \cdot \text{Var}(I) + (-1)^2 \cdot \text{Var}(U) = 1^2 + 2^2 = 5$ (setn. 9.3 punkt 2)

$\sigma_D = \sqrt{\text{Var}(D)} = \sqrt{5} = \underline{\underline{2.24}}$

$\text{E}D = \text{E}(I - U) = \text{E}I - \text{E}U = 23 - 20 = 3$ (setning 9.2 punkt 2).

Det følger av setning 9.4 punkt 1 at $D \sim N\left(3\,,\ \sqrt{5}\right)$.

$P(D \geq 0) = 1 - P(D < 0) = 1 - P(D \leq 0) = 1 - G\left(\frac{0-3}{\sqrt{5}}\right) = 1 - G(-1.34) = 1 - 0.0901 \approx \underline{\underline{0.910}}$

b $H_0\colon \mu = 20$ Situasjonen er som før - de økte utgiftene skyldes tilfeldige svinginger.

$H_1\colon \mu > 20$ Utgiftene har virkelig økt.

p-verdien $= P_{H_0}(\overline{X} \geq 21.3) = 1 - P_{H_0}(\overline{X} < 21.3) = 1 - G\left(\frac{21.3-20}{\frac{2}{\sqrt{12}}}\right) = 1 - G(2.25)$
$= 1 - 0.9878 = 0.0122$

Siden p-verdien er større enn signifikansnivået som er 0.01, **kan vi ikke forkaste H_0 ved 1%-nivå**.

c Det er her verdt å merke seg at begrepet kritiske verdier refererer til en klassisk tosidig testmetode og ikke til en testmetode basert på et konfidensintervall. (Dette siste er egentlig en estimeringsmetode som indirekte også benyttes som testmetode. Det er derfor galt å kalle enpepunktene til konfidensintervallet for kritiske verdier selv om likheten med en klassisk tosidig test er nokså stor). For en klassisk tosidig test får vi:

Vi forkaster H_0 dersom $\overline{I} \leq k_1$ eller $\overline{I} \geq k_2$

Tosidig test gir $P(\overline{I} \leq k_1) \leq 0.025$ og $P(\overline{I} \geq k_2) \leq 0.025$

$$P(\overline{I} \leq k_1) \leq 0.025 \Leftrightarrow G\left(\frac{k_1-23}{\frac{1}{\sqrt{12}}}\right) \leq 0.025 \Rightarrow \frac{k_1-23}{\frac{1}{\sqrt{12}}} \leq -1.96 \Leftrightarrow k_1 \leq 23 - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 22.43$$

Vi velger $k_1 = 22.43$ Tilsvarende får vi: $k_2 = 23 + 1.96\frac{1}{\sqrt{12}} = 23.57$

Kritiske verdier for testen blir altså: $\underline{\underline{k_1 = 22.43}}$ og $\underline{\underline{k_2 = 23.57}}$

Vår 2002

Oppgave 1 V02

a Gjennomsnittstiden blir:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i \\ &= \frac{1}{12}(8.6 + 9.4 + 9.6 + 10.1 + 9.5 + 9.2 + 10.5 + 8.7 + 9.8 + 9.9 + 9.0 + 8.8) \\ &= \frac{113.1}{12} = 9.425 \approx \underline{\underline{9.4}}\end{aligned}$$

Gjennomsnittstiden er altså ca 9.4 sekunder.

Vi ordner observasjonene etter størrelse og får:

8.6 8.7 8.8 9.0 9.2 9.4 9.5 9.6 9.8 9.9 10.1 10.5

Medianplassen er: $0.5 \cdot (12 + 1) = 6.5$

Medianen blir da: $m = 9.4 + 0.5(9.5 - 9.4) = \underline{\underline{9.45}}$

Første kvartil er lik medianen av de 6 minste observasjonene. Vi får: $q_1 = \frac{8.8+9.0}{2} = \underline{\underline{8.9}}$

Tredje kvartil: $q_3 = \frac{9.8+9.9}{2} = \underline{\underline{9.85}}$

b Stamme-blad-diagrammet ser slik ut:

8	678
9	0245689
10	15

Oppgave 3

a Kravene til diskrete sannsynlighetsfordelinger er at:

1. Punktsannsynlighetene ligger mellom 0 og 1: $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ for alle x_i
2. Summen av alle punktsannsynlighetene er lik 1: $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

(i) Her er begge kravene oppfylt, og vi har en diskret sannsynlighetsfordeling

(ii) Summen av punktsannsynlighetene er større enn 1. Kan ikke være en diskret sannsynlighetsfordeling

(iii) Her er en "punktsannsynlighet" negativ. Kan ikke være en diskret sannsynlighetsfordeling.

b $\mathrm{E}X = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.5}}$

Tolkning: Gjennomsnittlig antall skrivefeil denne sekretæren gjør er 0.5 per side.

Beregner først: $\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \cdot 0.6 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.7}}$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 = 0.7 - 0.5^2 = \underline{\underline{0.45}}.$$

c Antall skrivefeil på 150 sider blir en stokasisk variabel R. Vi setter:

$R = X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}$, og da blir:

$$\mathrm{E}R = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \cdots \mathrm{E}X_{150} = 150 \cdot 0.5 = \underline{\underline{75}}$$

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}) \overset{\text{uavh.}}{=} \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots \mathrm{Var}(X_{150})$$
$$= 150 \cdot 0.45 = \underline{\underline{67.5}}.$$

Sentralgrensesetningen sier at R er tilnærmet normalfordelt. Husk at R er en diskret heltallsvariabel, vi bruker derfor halvkorreksjon:

$$P(R \geq 80) = 1 - P(R \leq 79) \approx 1 - G\left(\tfrac{79+0.5-75}{\sqrt{67.5}}\right) = 1 - G(0.55) = 1 - 0.7088$$
$$= 0.2912 \approx \underline{\underline{0.29}}$$

Høst 2002

Oppgave 3 H02

a) $P(X > 66.5) = 1 - P(X \leq 66.5) = 1 - G\left(\tfrac{66.5-65}{0.9}\right) = 1 - G(1.67) = 1 - 0.6525 = \underline{\underline{0.0475}}$

$$P(64 < X < 66) = P(X < 66) - P(X \leq 64) = G\left(\tfrac{66-65}{0.9}\right) - G\left(\tfrac{64-65}{0.9}\right)$$
$$= G(1.11) - G(-1.11) = 0.8665 - 0.1335 = \underline{\underline{0.7330}}$$

b) Vi har at $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_9$ er uavhengige og setter $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_9}{9}$.

Setning 9.6 sier at $\overline{X} \sim N\left(65, \frac{0.9}{\sqrt{9}}\right) = N(65, 0.3)$.

$P\left(\overline{X} < 64.7\right) = G\left(\tfrac{64.7-65}{0.3}\right) = G(-1.00) = \underline{\underline{0.1587}}$

Vår 2003

Oppgave 2 V03

a) Følgende forutsetninger må være oppfylt for at X skal være binomisk fordelt med parametrene $n = 15$ og $p = 0.8$.

1. Vi må kunne avgjøre om en person blir kvitt hodepinen (suksess) eller ikke (fiasko).
2. Resultatene av behandlingen av de 15 personene må være uavhengige av hverandre.
3. Sannsynligheten for suksess må være lik 0.8 i hvert enkeltforsøk.

b) $P(X = 15) = \binom{15}{15} \cdot 0.8^{15} \cdot 0.2^0 = 0.8^{15} = \underline{\underline{0.035}}$

$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)$

$= \binom{15}{13} \cdot 0.8^{13} \cdot 0.2^2 + \binom{15}{14} \cdot 0.8^{14} \cdot 0.2^1 + 0.035 = \underline{\underline{0.398}}$

c) Estimator for p er $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Dette er en forventningsrett estimator, det vil si at $\mathrm{E}(\hat{p}) = p$. I tillegg har den egenskapen at variansen til $\hat{p}$ minker når n øker, altså at $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.

Estimatet for p blir: $\hat{p} = \frac{74}{100} = \underline{\underline{0.74}}$

d) Et tilnærmet 95%-konfidensintervall for p er gitt ved: $\left[\frac{X}{n} - k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \frac{X}{n} + k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$, der k er 97.5%-fraktilen i $N(0,1)$-fordelinga. $k = 1.9600$ og vi får:

$\left[\frac{74}{100} - 1.9600\sqrt{\frac{0.74(1-0.74)}{100}}, \frac{74}{100} + 1.9600\sqrt{\frac{0.74(1-0.74)}{100}}\right] = \underline{\underline{[0.654, 0.826]}}$

e) Vi forkasterH_0 dersom $X \leq k$. Nivåkravet gir at $P_{H_0}(X \leq k) \leq 0.05$. Vedlegg 1 gir at $k \leq 72$. Vi forkaster H_0 dersom $X \leq 72$. Vi observerte 74 suksesser og har derfor ikke grunnlag til å forkaste H_0 på 5% nivå.

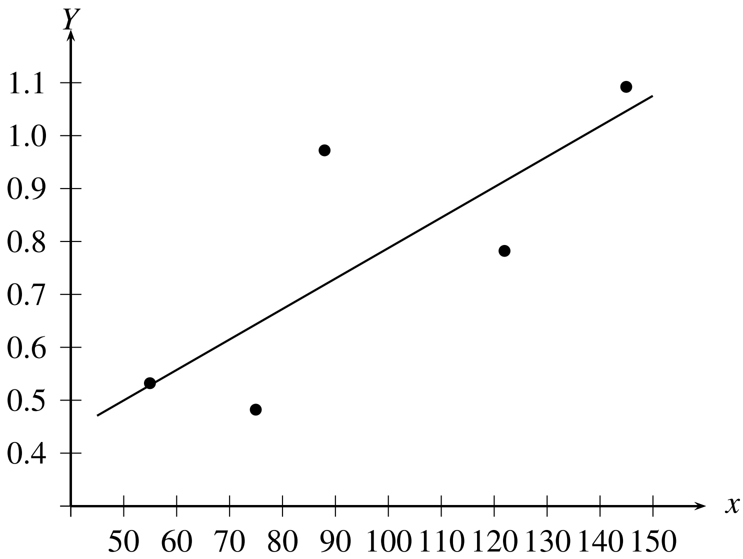
Alternativt kunne vi ha funnet kritisk verdi ved normaltilnærming, dette ville gi:

$P_{H_0}(X \leq k) \approx G\left(\frac{k+0.5-100\cdot 0.8}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right) = G\left(\frac{k+0.5-80}{\sqrt{16}}\right) \leq 0.05$

Dette gir: $\frac{k+0.5-80}{4} \leq -1.6449$, som gir $k \leq 80 - 0.5 - 1.6449 \cdot 4 = 72.9$.

Oppgave 3 V03

a) Spredingsdiagrammet, med inntegnet regresjonslinje, ser slik ut:



Vi beregner: $\overline{x} = \frac{1}{5}(75 + 145 + 55 + 88 + 122) = \frac{485}{17} = 97.$

og: $\overline{Y} = \frac{1}{5}(0.48 + 1.09 + 0.53 + 0.97 + 0.78) = \frac{3.85}{5} = 0.77$

Da blir: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left[(x_i-\overline{x})\cdot\left(Y_i-\overline{Y}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2} = \frac{30.27}{5258} = 0.005757$

Og: $\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\cdot\overline{x} = 0.77 - 0.005757\cdot 97 = 0.2116$

Regresjonslinja blir: $\underline{\underline{\hat{Y} = 0.2116 + 0.005757\cdot x}}$

b) $H_0 : b = 0$ uttrykker at bensinforbruket ikke endres ved endret motorstørrelse.

$H_1 : b > 0$ uttrykker at bensinforbruket øker ved økt motorstørrelse.

Vi forkaster H_0 dersom $T = \frac{\hat{b}-0}{\frac{S}{\sqrt{M}}} > k$, der k er 95%-fraktilen i t-fordelinga med 5-2=3 frihetsgrader. Vi får at $k = 2.3534$.

Vi beregner:

x	Y	$\hat{Y} = 0.2116 + 0.005757\cdot x$	$\left(Y-\hat{Y}\right)^2$
75	0.48	0.6434	0.0267
145	1.09	1.0464	0.0019
55	0.53	0.5282	0.0000
88	0.97	0.7182	0.0634
122	0.78	0.9140	0.0179
485	3.85		0.1099

Vi beregner: $S = \sqrt{\frac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{5}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot 0.1099} = 0.1914$

og $\sqrt{M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{5258} = 72.51$

Dette gir: $t = \frac{\hat{b}-0}{\frac{S}{\sqrt{M}}} = \frac{0.005757}{\frac{0.1914}{72.51}} = 2.1810 < k = 2.3534$

På 5%-nivå gir ikke dette grunnlag for å forkaste H_0, vi kan altså ikke påstå at økt motorstørrelse gir økt bensinforbruk.

Høst 2003

Oppgave 4 H03

a) Følgende krav stilles til en funksjon for at den skal kunne være en sannsynlighetstetthet:

1. Funksjonen er aldri negativ i intervallet
2. Arealet under grafen til funksjonen er lik 1

De tre funksjonene tilfredtiller alle krav 1. Arealet under grafen til funksjon (i) er lik 1. Arealet under grafen til funksjon (ii) er også lik 1. Arealet under grafen til funksjon (iii) er 2.1, dette kan derfor ikke være en sannsynlighetstetthet. Funksjonene (i) og (ii) er tilfredstiller begge kravene og kan derfor være sannsynlighetstetthetsfunksjoner.

b) $\mathrm{E}X = 0 \cdot 0.30 + 1 \cdot 0.40 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.05 = \underline{\underline{1.05}}$

Beregner først $\mathrm{E}X^2 = 0^2 \cdot 0.30 + 1^2 \cdot 0.40 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.05 = 1.85$.

Da blir $\mathrm{Var}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = 1.85 - 1.05^2 = \underline{\underline{0.7475}}$

Den kumulative fordelingsfunksjonen:

x	0	1	2	3
$F(x) = P(X \leq x)$	0.30	0.70	0.95	1.00

c) $P(X + Y > 4) = P(X + Y \geq 5) = P(X = 3, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 3)$ $= 0.02 + 0.01 + 0.01 = \underline{\underline{0.04}}$.

Sannsynlighetsfordelingen til Y:

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0.25	0.40	0.25	0.10

Siden $0.10 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0.30 \cdot 0.25 = 0.075$ er ikke X og Y uavhengige.

Høst 2005

Oppgave 5 H05

(a) $\mathrm{E}(X) = (-5)\cdot 0.3 + (-1)\cdot 0.1 + 0\cdot 0.1 + 10\cdot 0.5 = 3.4$
$\mathrm{E}\left(X^2\right) = (-5)^2\cdot 0.3 + (-1)^2\cdot 0.1 + 0^2\cdot 0.1 + 10^2\cdot 0.5 = 57.6$
$\mathrm{Var}(X) = 57.6 - 3.4^2 = 46.04$

(b) $P(\bar{A}) = 0.7, \quad P(A) = 0.3$
$P(\bar{B}) = 0.6, \quad P(B) = 0.4$
Nå blir $P(A)\cdot P(B) = 0.3\cdot 0.4 = 0.12 = P(A\cap B)$ som da viser at A og B er uavhengige.
At A og B er uavhengige gir at $\bar{A}$ og $\bar{B}$ også er uavhengige, da blir:
$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = 0.6\cdot 0.7 = 0.42$

Vår 2007

Oppgave 1 V07

(a) Gjennomsnittet blir:

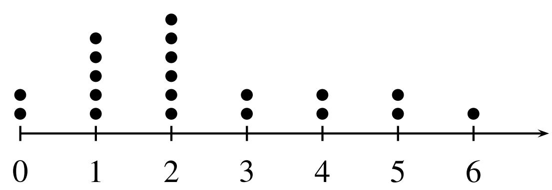
$$\bar{x} = \frac{2+0+1+\cdots+1}{20} = \frac{47}{20} = 2.35$$

Ordner observasjonene i rekkefølge og får:

0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6

De to midterste observasjonene er observasjon nummer 10 og 11, begge har verdien 2. Medianen blir da $m = 2$.

(b) Prikkdiagrammet ser slik ut:



(c) Av Minitabutskriften ser vi at standardavviket er $s = 1.694$
Først kvartil er medianen av de laveste 10 observasjonene: $q_1 = \frac{1+1}{2} = 1$
Tredje kvartil er medianen av de 10 høyeste observasjonene: $q_3 = \frac{3+4}{2} = 3.5$
Kvartilbredden blir da $q = 3.5 - 1 = 2.5$

Oppgave 3 V07

(a) Her er $X \sim \text{bin}(20, 0.03)$. Da blir $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.97^{20} \approx 0.4562$

(b) Her er $Y \sim \text{bin}(12, 0.4562)$ fordi:

- Viser på hver leveranse som et enkeltforsøk, vi får da $n = 12$ uavhengige enkeltforsøk.
- Hvert enkeltforsøk ender enten i at det er minst en defekt (Suksess), eller at alle er intakte (fiasko).
- Sannsynligheten for suksess er $p = 0.4562$ i samtlige enkeltforsøk.

Vi får da $P(Y = 3) = \binom{12}{3} \cdot 0.4562^3 \cdot (1 - 0.4562)^9 \approx 0.0869$

Høst 2007

Oppgave 2 H07

(a) Forventningen er $\text{E}(X) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 = 1.7$

Beregner først $\text{E}\left(X^2\right) = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.5 + 4^2 \cdot 0.3 = 5.3$

Da blir $\text{Var}(X) = \text{E}\left(X^2\right) - (\text{E}(X))^2 = 5.3 - 1.7^2 = 2.41$

(b) Simultanfordelingen under forutsetning av uavhengighet er gitt ved:

		X 0	1	4	
	1	0.06	0.15	0.09	0.3
Y	0	0.08	0.2	0.12	0.4
	-1	0.06	0.15	0.09	0.3
		0.2	0.5	0.3	

(c) $P(Z \leq 1) = P(X+Y \leq 1) = P(X = 0, Y = 1)+P(X = 0, Y = 0)+P(X = 0, Y = -1)+P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = -1) = 0.06 + 0.08 + 0.06 + 0.2 + 0.15 = 0.55$

Oppgave 3 H07

(a) $Y_1 = 30 + 0.9 \cdot 123 + U = 140.7 + U < 144$, da må $U < 3.3$.

$P(U < 3.3) = G\left(\frac{3.3-0}{5}\right) = G(0.66) = 0.7454$

(b) Et 95 % konfidensintervall for b er gitt ved
$\left[\hat{b} - k\frac{S}{\sqrt{M}}, \hat{b} - k\frac{S}{\sqrt{M}}\right]$ der k er 97.5 % fraktilen i t–fordelingen med $12-2 = 10$ frihetsgrader. Vi får at $k = 2.2281$.

Videre er $M = \sum (x - \bar{x})^2 = 502.8$

$S = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12-2} \cdot 336.1} \approx 5.80$

Dette gir konfidensintervallet:

$\left[1.71 - 2.2281 \cdot \frac{5.80}{\sqrt{502.8}}, 1.71 + 2.2281 \cdot \frac{5.80}{\sqrt{502.8}}\right] = [1.13, 2.29]$

Vår 2008

Oppgave 2 V08

(a) X er antallet i komiteen som er engasjert i en fagforening. Vi bruker den hypergeometriske fordelingen.

Sannsynligheten for at alle som velges er organisert i en fagforening:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{35}{5}\binom{15}{0}}{\binom{50}{5}} = 0.153$$

Sannsynligheten for at ingen som velges er organisert i en fagforening:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{35}{0}\binom{15}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.0014$$

Sannsynligheten for at akkurat 3 av de som velges er organisert i en fagforening:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{35}{3}\binom{15}{2}}{\binom{50}{5}} = 0.324$$

Sannsynligheten for at Per er med:

$$P(\text{Per er med}) = \frac{1 \cdot \binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = 0.1$$

Alternativt kan vi si at alle de 50 har like stor sannsynlighet for å bli med i komiteen, siden det er 5 plasser er sannsynligheten for at en ansatt som Per skal bli med lik $\frac{5}{50} = 0.1$.

(b) $E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 5 \cdot \frac{35}{50} = 3.5$. Ved tilsvarende trekninger i det lange løp vil gjennomsnittlig antall fagforeningsmedlemmer i komiteen være 3.5.

$\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) = \frac{50-5}{50-1} \cdot 5 \cdot \frac{35}{50} \cdot \left(1 - \frac{35}{50}\right) = \frac{27}{28} = 0.964$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{27}{28}} \approx 0.982$

Oppgave 6 V08

$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 10 + 5 = 15$
$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X + Y) \overset{\text{uavh.}}{=} \text{Var}(X) + \text{var}(Y) = 2^2 + 3^2 = 13$
Z er normalfordelt og vi har da at $Z \sim N\left(15, \sqrt{13}\right)$
$P(Z \leq 12.5) = G\left(\frac{12.5-15}{\sqrt{13}}\right) = G(-0.69) = 0.2451$

Vår 2009

Oppgave 1 V09

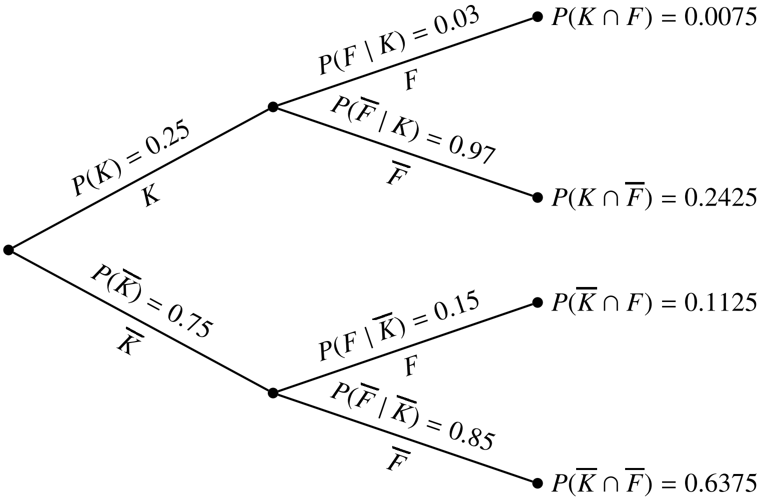
(a) Av 10 personer skal vi velge 4, antall muligheter blir $\binom{10}{4} = 210$.

(b) Vi lar X være antall kvinner i utvalget. For at utvalget skal ha flere kvinner enn menn må $X \geq 3$. Vi får da:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} \\ &= \frac{10 \cdot 5}{210} + \frac{5 \cdot 1}{210} = \frac{11}{42} \approx 0.262 \end{aligned}$$

Oppgave 2 V09

(a) Vi tegner sannsynlighetstre.



(b) $P(K \cap F) = 0.0075$
$P(K \mid \bar{F}) = \frac{P(K \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0.2425}{0.2425+0.6375} = 0.276$

Oppgave 4 V09

Vi setter opp tabellen:

Kategori	1	2	3	4	5	
p_i	0.15	0.25	0.05	0.40	0.15	
Antall, O	46	76	18	183	77	$n = 400$
$E = n \cdot p_i$ $(n = 400)$	60	100	20	160	60	

Vi forkaster antakelsen om at de oppgitte andelene fortsatt gjelder dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelingen med $5 - 1 = 4$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 9.49$. Vi får:

$$q = \frac{(46-60)^2}{60} + \frac{(76-100)^2}{100} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(183-160)^2}{160} + \frac{(77-60)^2}{60} = 17.35$$

Dette betyr at vi forkaster antakelsen om at de oppgitte andelene fortsatt gjelder, av tallene ser vi at det er færre som reiser utenlands og flere som planlegger billig norgesferie og ikke ferie.

Høst 2009

Oppgave 4 H09

(a) Et tilnærmet 95 % konfidensintervall betyr at vi må finne 0.975 fraktilen i $N(0, 1)$ fordelingen, den er $k = 1.96$. Videre er $\hat{p} = \frac{37}{100} = 0.37$, konfidensintervallet blir:

$$\hat{p} \pm \cdot k \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = [0.275, 0.465]$$

(b) Forkast H_0 dersom $X \geq k$. Når H_0 er rett er $E(X) = np = 30$ og $\text{Var}(X) = np(1-p) = 21$.

$$\begin{aligned} P_{H_0}(X \geq k) &= 1 - P_{H_0}(X \leq k-1) \\ &= 1 - G\left(\frac{k-1+0.5-30}{\sqrt{21}}\right) = 0.95 \end{aligned}$$

Dette gir at

$$G\left(\frac{k-1+0.5-30}{\sqrt{21}}\right) = 0.95.$$

Nå er $G(1.6449) = 0.95$. Vi løser likningen

$$\begin{aligned} \frac{k-1+0.5-30}{\sqrt{21}} &= 1.6449 \\ k &= 30 + 1 - 0.5 + 1.6449 \cdot \sqrt{21} \approx 38.08 \end{aligned}$$

Forkast H_0 dersom $X \geq 39$.

Oppgave 6 H09

Ordner observasjonene i stigende rekkefølge:

$$31, 39, 4, 44, 45, 49, 49, 53, 66$$

$m = q_2 = 45$, $q_1 = 42$ og $q_3 = 49$.

Vår 2010

Oppgave 2 V10

Når H_0 er rett er $\bar{X} \sim N\left(10, \frac{5}{\sqrt{100}}\right)$. Signifikansnivået blir:

$$P_{H_0}(\bar{X} \leq 9.02) = G\left(\frac{9.02 - 10}{\frac{5}{\sqrt{100}}}\right) = G(-1.96) = 0.025$$

Signifikansnivået er 2.5 %.
Når $\mu = 8$ er $\bar{X} \sim N\left(8, \frac{5}{\sqrt{100}}\right)$. Styrken blir:

$$\pi(8) = P_{\mu=8}(\bar{X} \leq 9.02) = G\left(\frac{9.02 - 8}{\frac{5}{\sqrt{100}}}\right) = G(2.04) = 0.9793$$

Oppgave 6 V10

(a) $E(X) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 = 1.9$
$E(X^2) = 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.3 = 4.5$
$\mathrm{Var}(X) = 4.5 - 1.9^2 = 0.89$

(b)

$$P(Y = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$
$$P(Y = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$
$$P(Y = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{10}$$
$$P(Y = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$$

$E(Y) = n \cdot \frac{M}{N} = 3 \cdot \frac{4}{10} = 1.2$
$\mathrm{Var}(Y) = \frac{N-n}{N-1} na(1-a) = \frac{10-3}{10-1} 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.56$

Oppgave 7 V10

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{(4 \cdot \frac{1}{2})^0}{0!} e^{-4 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= 1 - e^{-2} = 0.865 \end{aligned}$$

Vi er borte i a minutter, det vil si $\lambda t = 4 \cdot \frac{a}{60} = \frac{a}{15}$.

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{a}{15}} &= 0.25 \\ e^{-\frac{a}{15}} &= 0.75 \\ -\frac{a}{15} &= \ln(0.75) \\ a &= (-15)\ln(0.75) = 4.3 \end{aligned}$$

Han kan være borte i litt over 4 minutter.

Høst 2010

Oppgave 2 H10

(a) Vi lar Y være antall pasienter som ankommer akuttmottaket i løpet av en halvtime, vi har da at Y følger Poissonfordelingen med $\lambda = 7$ og $t = 0.5$.

$$P(Y = 3) = \frac{(7 \cdot 0.5)^3}{3!} e^{-7 \cdot 0.5} = 0.216$$

Deretter regner vi ut

$$\begin{aligned}
P(Y = 2) &= \frac{(7 \cdot 0.5)^2}{2!} e^{-7 \cdot 0.5} = 0.185 \\
P(Y = 1) &= \frac{(7 \cdot 0.5)^1}{1!} e^{-7 \cdot 0.5} = 0.106 \\
P(Y = 0) &= \frac{(7 \cdot 0.5)^0}{0!} e^{-7 \cdot 0.5} = 0.030 \\
P(Y \leq 3) &= 0.216 + 0.185 + 0.106 + 0.030 = 0.537 \\
P(Y \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.537 = 0.463
\end{aligned}$$

(b) I følge oppgaveteksten er X Poissonfordelt med $\lambda = 7$ og $t = 1$, vi får da $E(X) = \lambda t = 7 \cdot 1 = 7$
$\text{Var}(X) = \lambda t = 7 \cdot 1 = 7$

Oppgave 3 H10

(a) Beregner sannsynligheten

$$P(X < 21\,500) = G\left(\frac{21\,500 - 25\,000}{4\,000}\right) = G(-0.88) = 0.1894,$$

og

$$\begin{aligned}
P(21\,500 < X < 27\,000) &= P(X < 27\,000) - P(X \leq 21\,500) \\
&= G\left(\frac{27\,000 - 25\,000}{4\,000}\right) - G\left(\frac{21\,500 - 25\,000}{4\,000}\right) \\
&= G(0.50) - G(-0.88) \\
&= 0.6915 - 0.1894 = 0.5021
\end{aligned}$$

(b) Vi må ha at

$$\begin{aligned}
P(X > k) &= 1 - P(X \leq k) \\
&= 1 - G\left(\frac{k - 25\,000}{4\,000}\right) = 0.05
\end{aligned}$$

Da må

$$G\left(\frac{k - 25\,000}{4\,000}\right) = 0.95,$$

Vi har at $G(1.6449) = 0.95$, da blir:

$$\begin{aligned} \frac{k - 25\,000}{4\,000} &= 1.6449 \\ k &= 25\,000 + 1.6449 \cdot 4\,000 = 31\,580 \end{aligned}$$

(c) $H_0 : \mu = 25\,000$, sier at strømforbruket er som før.

$H_1 : \mu < 25\,000$, sier at forventet strømforbruk til en husholdning er blitt mindre. Dette tyder på strømsparing i husholdningene og at kampanjen har hatt effekt.

(d) Vi forkaster H_0 dersom $\bar{X} \leq k$. Signifikansnivå 5 % gir:

$$P_{H_0}\left(\bar{X} < k\right) = G\left(\frac{k - 25\,000}{\frac{4000}{\sqrt{100}}}\right) = 0.05$$

Nå er $G(-1.6449) = 0.05$, dermed får vi:

$$\begin{aligned} \frac{k - 25\,000}{\frac{4000}{\sqrt{100}}} &= -1.6449 \\ k &= 25\,000 - 1.6449 \cdot \frac{4\,000}{\sqrt{100}} = 24\,342 \end{aligned}$$

Vi forkaster H_0 dersom $\bar{X} \leq 24342$, vi fikk $\bar{x} = 24\,100$ og kan altså forkaste H_0.

Oppgave 7 H10

(a) Vi regner

$$P(X = 5) = \binom{50}{5} \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^{45} = 0.030$$

Finner $E(X) = np = 50 \cdot 0.2 = 10$ og $\text{Var}(X) = np(1 - p) = 50 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 8$, får da:

$$P(X \leq 12) \approx G\left(\frac{12 + 0.5 - 10}{\sqrt{8}}\right) = G(0.88) = 0.8106$$

(b) Her er $\mu = 10$ og $\sigma^2 = 8$, da blir $\sigma = \sqrt{8} \approx 2.8$ og

$$\begin{aligned} \mu - \sigma &= 10 - 2.8 = 7.2 \\ \mu + \sigma &= 10 + 2.8 = 12.8. \end{aligned}$$

Da får vi

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(7.2 < X < 12.8) \\
&= P(X \leq 12) - P(X \leq 7) \\
&\approx G\left(\frac{12 + 0.5 - 10}{\sqrt{8}}\right) - G\left(\frac{7 + 0.5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \\
&= G(0.88) - G(-0.88) = 0.8106 - 0.1894 = 0.6212
\end{aligned}
$$

Vår 2011

Oppgave 1 V11

(a) Her er $\lambda = 0.5$ og $t = 1$, da blir

$$
P(X = 2) = \frac{(0.5 \cdot 1)^2}{2!} \cdot e^{-0.5 \cdot 1} = \frac{0.5^2}{2!} \cdot e^{-0.50} = 0.076
$$

Vi regner også ut

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 0.303 \\
P(X = 0) &= 0.607
\end{aligned}
$$

Da blir

$$
\begin{aligned}
P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\
&= 1 - [0.607 + 0.303 + 0.076] \\
&= 1 - 0.986 = 0.014
\end{aligned}
$$

(b) Her er $\lambda = 0.5$ og $t = 5$, da blir

$$
P(X = 4) = \frac{(0.5 \cdot 5)^4}{4!} \cdot e^{-0.5 \cdot 5} = \frac{2.5^4}{4!} e^{-2.5} = 0.134
$$

Oppgave 2 V11

Forkast H_0 dersom $X \leq k$. Nivåkravet gir

$$
\begin{aligned}
P_{H_0}(X \leq k) &\approx G\left(\frac{k + 0.5 - 150 \cdot 0.3}{\sqrt{150 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) \\
&= G\left(\frac{k + 0.5 - 45}{\sqrt{31.5}}\right) = 0.05
\end{aligned}
$$

Tabell 2 gir at $G(-1.6449) = 0.05$, da må vi ha

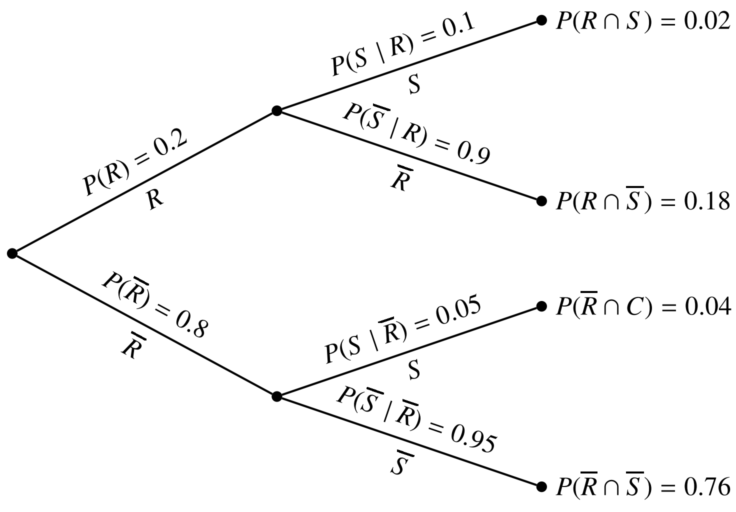
$$\frac{k + 0.5 - 45}{\sqrt{31.5}} = -1.6449$$
$$k = 45 - 0.5 - 1.6449 \cdot \sqrt{31.5} \approx 35.3$$

Vi forkaster H_0 dersom $X \leq 35$.
Styrken i alternativet $p = 0.2$ blir

$$\begin{aligned}\pi(0.2) &= P(X \leq 35)\\ &\approx G\left(\frac{35 + 0.5 - 150 \cdot 0.2}{\sqrt{150 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right)\\ &= G(1.12) = 0.8686\end{aligned}$$

Oppgave 3 V11

R er at kunden har stor skaderisiko og S er at kunden har hatt skade. Sannsynlighetstreet blir:



(a) Vi får

$$\begin{aligned}P(S) &= P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)\\ &= P(R) \cdot P(S|R) + P(\bar{R}) \cdot P(S|\bar{R})\\ &= 0.2 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.05\\ &= 0.02 + 0.04 = 0.06\end{aligned}$$

(b) Her blir

$$P(R|S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0.02}{0.06} = 0.333$$

Oppgave 4 V11

(a) Setter opp tabell

i	1	2	3
p_i	0.84	0.14	0.02
O	353	44	3
E	336	56	8

Vi forkaster antakelsen om gyldig sannsynlighetsfordeling dersom

$$Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$$

der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelingen med $3-1 = 2$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 5.99$. Vi beregner

$$\begin{aligned} q &= \frac{(353-336)^2}{336} + \frac{(44-56)^2}{56} + \frac{(3-8)^2}{8} \\ &= 0.86 + 2.57 + 3.13 = 6.56 \end{aligned}$$

Vi får forkastning. Ser at av de 400 som har gjennomgått kurset er antall bilførere med skader lavere enn forventet.

(b) Lager ny tabell:

	Røyker	Røyker ikke	Antall	Andel
Ingen ulykker	35 (58.7)	170 (146.1)	205	0.343
En ulykke	79 (77.1)	190 (192.1)	269	0.451
To eller flere ulykker	57 (35.2)	66 (87.8)	123	0.206
Sum	171	426	597	1.000

Vi forkaster antakelsen om uavhengighet dersom

$$Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$$

der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelingen med $(2-1)\cdot(3-1) = 2$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 5.99$. Vi beregner

$$\begin{aligned} q &= \frac{(35-58.7)^2}{58.7} + \frac{(170-146.1)^2}{146.1} \\ &+ \frac{(79-77.1)^2}{77.1} + \frac{(190-192.1)^2}{192.1} \\ &+ \frac{(57-35.2)^2}{35.2} + \frac{(66-87.8)^2}{87.8} \\ &= 9.57 + 3.91 \\ &+ 0.05 + 0.02 \\ &+ 13.50 + 5.41 = 32.46 \end{aligned}$$

Vi forkaster antakelsen om uavhengighet. Av de som ikke røyker er det fler enn forventet som har ingen ulykker og færre enn forventet som har to eller flere ulykker.

Oppgave 5 V11

(a) Vi beregner

$$P(X < 14000) = G\left(\frac{14000 - 12000}{3500}\right) = G(0.57) = 0.7157$$

og

$$\begin{aligned} P(10000 < X < 14000) &= P(X < 14000) - P(X < 9000) \\ &= G\left(\frac{14000 - 12000}{3500}\right) - G\left(\frac{9000 - 12000}{3500}\right) \\ &= G(0.57) - G(-0.86) \\ &= 0.7157 - 0.1949 = 0.5208 \end{aligned}$$

(b) Vi lar Y være samlet inntekt i 10 dagersperioden, må anta uavhengighet, da blir $\mu = 10 \cdot 12000 = 120000$ og $\sigma = \sqrt{10} \cdot 3500$. Vi får

$$P(Y \leq 110000) = G\left(\frac{110000 - 120000}{\sqrt{10} \cdot 3500}\right) = G(-0.90) = 0.1841$$

(c) Alternativhypotesen blir $H_1 : \mu > 12000$. Vi beregner gjennomsnittet

$$\bar{x} = \frac{16179 + \cdots + 15149}{6} = \frac{92451}{6} = 15408.5$$

Av Minitab utskriften ser vi at $s = 1204$.

Vi forkaster H_0 dersom

$$T = \frac{\bar{X} - 12000}{\frac{s}{\sqrt{6}}} \geq k,$$

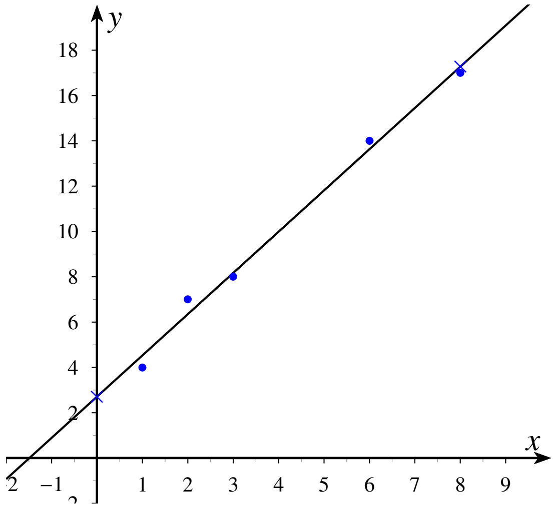
der k er 0.95 fraktilen i t fordelingen med $6 - 1 = 5$ frihetsgrader. Tabell 4 gir $k = 2.0150$. Vi får

$$t = \frac{15408.5 - 12000}{\frac{1204}{\sqrt{6}}} = 6.9345$$

Vi forkaster H_0.

Oppgave 6 V11

(a) Spredningsdiagrammet (med inntegnet regresjonslikning)ser slik ut.



Setter opp følgende tabell.

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	4	-3	-6	9	36	18
2	7	-2	-3	4	9	6
3	8	-1	-2	1	4	2
6	14	2	4	4	16	8
8	17	4	7	16	49	28
20	50	0	0	34	114	62

Korrelasjonskoeffisienten blir

$$r = \frac{62}{\sqrt{34}\sqrt{114}} = 0.996$$

(b) Her får vi

$$\hat{b} = \frac{62}{34} = 1.82$$

$$\hat{a} = 10 - \frac{62}{34} \cdot 4 = 2.71$$

Regresjonslikningen blir

$$y = 2.71 + 1.82x$$

Setter inn $x = 4$ og får $y = 10$.

For å tegne linja kan vi bruke punktene $(0, 2.71)$ og $(8, 17.27)$.

(c) Lager tabell for å estimere standardavviket i modellen:

x	y	$\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
1	4	4.53	0.2809
2	7	6.35	0.4225
3	8	8.17	0.0289
6	14	13.63	0.1369
8	17	17.27	0.0729
			0.9421

$$s = \sqrt{\frac{1}{5-2} \cdot 0.9421} = 0.5603$$

Konfidensintervallet er

$$\hat{b} \pm k \frac{s}{\sqrt{M}}$$

der k er 0.975 fraktilen i t–fordelingen med 5-2=3 frihetsgrader, den er 3.1824 (fra tabell 4). Konfidensintervallet blir

$$1.82 \pm 3.1824 \cdot \frac{0.5603}{\sqrt{34}} = (1.51, 2.13).$$

Oppgave 7 V11

(a) Vi beregner

$$\hat{p} = \frac{106}{500} = 0.212$$

og

$$\sigma = \sqrt{\frac{0.212 \cdot 0.788}{500}} = 0.018$$

(b) 0.975 fraktilen i $N(0, 1)$ fordelingen er 1.96, konfidensintervallet blir

$$0.212 \pm 1.96 \cdot 0.018 = (0.177, 0.247)$$

Høst 2011

Oppgave 1 H11

(a) Her er $X \sim N(15\,500, 2\,000)$. Vi finner

$$\begin{aligned} P(14\,000 < X < 15\,000) &= P(X < 15\,000) - P(X \leq 14\,000) \\ &= G\left(\frac{15\,000 - 15\,500}{2\,000}\right) - G\left(\frac{14\,000 - 15\,500}{2\,000}\right) \\ &= G(-0.25) - G(-0.75) = 0.4013 - 0.2266 = 0.1747 \end{aligned}$$

(b) $H_0 : \mu = 15\,500$

$H_1 : \mu > 15\,500.$

(c)

$$
\begin{aligned}
P_{H_0}(\bar{X} \geq k) &= 1 - P_{H_0}(\bar{X} < k) \\
&= 1 - G\left(\frac{k - 15\,500}{\frac{2\,000}{\sqrt{20}}}\right) = 0.05
\end{aligned}
$$

Da må $G\left(\frac{k-15\,500}{\frac{2\,000}{\sqrt{20}}}\right) = 0.95$, tabell 2 gir at $G(1.6449) = 0.95$. Dette gir:

$$
\begin{aligned}
\frac{k - 15\,500}{\frac{2\,000}{\sqrt{20}}} &= 1.6449 \\
k &= 15\,500 + 1.6449 \cdot \frac{2\,000}{\sqrt{20}} = 16\,235.6
\end{aligned}
$$

Kritisk verdi ble 16 235.6 og vi forkater H_0 dersom $\bar{x} \geq 16\,235.6$. Vi fikk $\bar{x} = 16\,100$, dette gir dermed ikke grunnlag for å forkaste H_0.

(d) Styrken blir

$$
\begin{aligned}
P_{\mu=16\,500}(\bar{X} \geq 16\,235.6) &= 1 - P_{\mu=16\,500}(\bar{X} < 16\,235.6) \\
&= 1 - G\left(\frac{16\,235.6 - 16\,500}{\frac{2\,000}{\sqrt{20}}}\right) \\
&= 1 - G(-0.59) = 1 - 0.2776 = 0.7224
\end{aligned}
$$

(e) Konfidensintervallet har form $\bar{X} \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. I et 95 % konfidensintervall vil k tilfredstille $G(k) = 0.975$ og tabell 2 gir $k = 1.9600$. Vi får

$$
16\,100 \pm 1.9600 \cdot \frac{2\,000}{\sqrt{20}} = [15\,223.5, 16\,976.5]
$$

Oppgave 2 H11

(a) Beregner

$$P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0.8^8 \cdot 0.2^2 = 0.302$$
$$P(X=9) = \binom{10}{9} \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 = 0.268$$
$$P(X=10) = \binom{10}{10} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^0 = 0.107$$
$$P(X \geq 8) = 0.302 + 0.268 + 0.107 = 0.677$$

(b) På grunn av uavhengighet får vi

$$P(X_1 > 8 \cap X_2 > 8) = P(X_1 > 8) \cdot P(X_2 > 8) = [P(X > 8)]^2 = [P(X \geq 9)]^2 = 0.375^2 = 0.141.$$

(Her regner vi ut $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0.268 + 0.107 = 0.375$.)

Oppgave 3 H11

Setter opp en tabell

	Hjemme	Kantina	Sosialsoner	Lesesal	
p	0.4	0.2	0.3	0.1	
O	145	83	101	71	$n = 400$
$E = np$	160	80	120	40	

Vi forkaster antakelsen om lik sannsynlighetsfordeing dersom $\chi^2 = \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelingen med $4 - 1 = 3$ f.g. Tabell 5 gir $k = 7.81$. Vi begerner

$$q = \frac{(145-160)^2}{160} + \frac{(83-80)^2}{80} + \frac{(101-120)^2}{120} + \frac{(71-40)^2}{40}$$
$$= 1.406 + 0.113 + 3.008 + 24.025 = 28.552$$

Vi forkaster den opprinnelige sannsynlighetsfordelingen. Bruk av lesesalen har økt. Bruk av sosialsoner (og hjemme) har avtatt.

Oppgave 4 H11

(a) Vi lar Y være antallet av de utvalgte med vesentlig dårligere kvalitet.

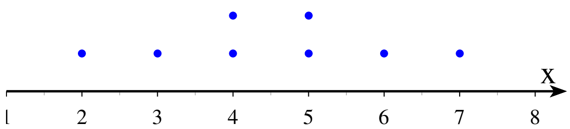
$$P(Y=0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{9}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{1 \cdot 126}{495} = 0.255$$
$$P(Y=1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \cdot 84}{495} = 0.509$$

(b) Y er hypergeometrisk fordelt med $N = 12$, $M = 3$, $n = 4$ og $a = \frac{3}{12} = 0.25$, da blir

$$E(Y) = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{3}{12} = 1$$
$$\text{Var}(Y) = \frac{N-n}{N-1} na(1-a) = \frac{12-4}{12-1} \cdot 4 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.545$$

Oppgave 5 H11

(a) Prikkdiagrammet ser slik ut



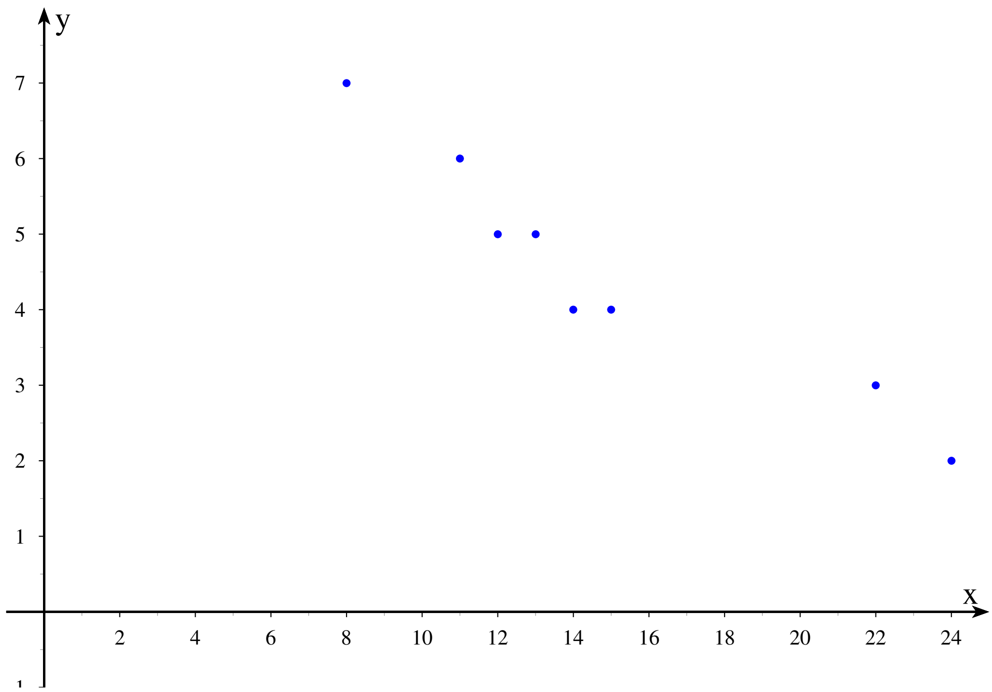
Gjennomsnittet blir

$$\bar{x} = \frac{2+3+2\cdot 4+2\cdot 5+6+7}{8} = \frac{36}{8} = 4.5$$

Standardavviket blir

$$s = \sqrt{\frac{1}{8-1}((2-4.5)^2+(3-4.5)^2+2\cdot(4-4.5)^2+2\cdot(5-4.5)^2+(6-4.5)^2+(7-4.5)^2)} = 1.604$$

(b) Spredningsdiagrammet ser slik ut



Her må korrelasjonskoeffisienten være negativ, $r < 0$.

Oppgave 6 H11

Sannsynligheten for at du ikke hoster i løpet av en time blir

$$P(X = 0) = \frac{(0.5 \cdot 1)^0}{0!} e^{-0.5 \cdot 1} = 0.607.$$

Sannsynligheten for at du hoster akkurat en gang i løpet av 4 timer blir

$$P(X = 1) = \frac{(0.5 \cdot 4)^1}{1!} e^{-0.5 \cdot 4} = 0.271.$$

Oppgave 7 H11

Estimat for defektsannsynlighet

$$\hat{p} = \frac{7}{100} = 0.07.$$

Estimat for standardavviket til estimatoren

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{0.07 \cdot 0.93}{100}} = 0.026$$

Konfidensintervall

$$0.07 \pm 1.9600 \cdot 0.026 = [0.019, 0.121]$$

Vår 2012

Oppgave 1 V12

(a) Sannsynligheten for akkurat 4 oppringninger i løpet av en time

$$P(X = 4) = \frac{(6 \cdot 1)^4}{4!} \cdot e^{-6 \cdot 1} = 0.134.$$

Sannsynligheten for 3 eller flere oppringninger i løpet av en time

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - \left(\frac{6^0}{0!} \cdot e^{-6} + \frac{6^1}{1!} \cdot e^{-6} + \frac{6^2}{2!} \cdot e^{-6} \right) \\ &= 1 - (0.002 + 0.015 + 0.045) = 0.938 \end{aligned}$$

(b) Sannsynligheten for akkurat 14 oppringninger i løpet av en 3 timers periode.

$$P(X = 14) = \frac{(6 \cdot 3)^{14}}{14!} \cdot e^{-6 \cdot 3} = 0.065.$$

Oppgave 2 V12

Vi utvider tabellen.

Kvalitetsklasse	Topp	Høy	Medium	Lav
Sannsynlighet p_i	0.38	0.32	0.26	0.04
Observert O	222	171	98	9
Forventet $E = np_i$, $n = 500$	190	160	130	20

Vi forkaster antakelsen om samme sannsynlighetsfordeling dersom

$$Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k = 7.81.$$

Der kritisk verdi er funnet i tabell 5 som 0.95 fraktilen i χ^2 fordelingen med 4-1=3 frihetsgrader. Vi får

$$\begin{aligned} q &= \frac{(222-190)^2}{190} + \frac{(171-160)^2}{160} + \frac{(98-130)^2}{130} + \frac{(9-20)^2}{20} \\ &= 5.389 + 0.756 + 7.877 + 6.050 = 20.072 \end{aligned}$$

Vi forkaster antakelsen om lik sannsynlighetsfordeling. Det ser ut som at ny maskin har høyere sannsynlighet for topp kvalitet og lavere sannsynlighet for medium og lav

Oppgave 3 V12

(a) Vi lar R være begivenheten at det reklameres på telefonen, da er $P(R) = 0.20$. Videre er N begivenheten at du får ny telefon, det er oppgitt at $P(N|R) = 0.40$. Da blir sannsynligheten for at du reklamere og får ny telefon lik

$$P(R \cap N) = P(R) \cdot P(N|R) = 0.20 \cdot 0.40 = 0.08.$$

(b) Vi lar X være antallet som byttes i ny telefon. Da er $X\text{bin} \sim (15, 0.08)$ og sannsynligheten for at akkurat 2 blir byttet i ny telefon er

$$P(X=2) = \binom{15}{2} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^{13} = 0.227.$$

Oppgave 4 V12

(a) Nullhypotesen er vedien som står på pakken, $H_0 : p = 0.7$. Alternativhypotesen er mistanken vår, $H_1 : p < 0.7$. Vi forkaster H_0 dersom $X \leq k$. Når H_0 er rett er $X \sim \text{bin}(200, 0.7)$ som gir at $\text{E}(X) = np = 200 \cdot 0.7 = 140$ og $\text{Var}(X) = np(1-p) = 200 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 42$.

$$P_{H_0}(X \leq k) \approx G\left(\frac{k + 0.5 - 140}{\sqrt{42}}\right) = 0.05$$

Tabell 2 gir at

$$G(-1.6449) = 0.05.$$

Da blir

$$\frac{k + 0.5 - 140}{\sqrt{42}} = -1.6449$$

$$k = 140 - 0.5 - 1.6449 \cdot \sqrt{42} = 128.8$$

Testen blir at vi forkaster H_0 dersom $X \leq 128$.

(b) Vi regner

$$\begin{aligned} p - \text{verdien} &= P_{H_0}(X \leq 133) \\ &\approx G\left(\frac{133 + 0.5 - 140}{\sqrt{42}}\right) \\ &= G(-1.00) = 0.1587. \end{aligned}$$

Det vil si at vi ikke kan forkaste på 5 % nivå. (Beregningen vår viser at vi kan forkaste på 15.87 % nivå.)

(c) I alternativet $p = 0.6$ blir $X \sim \text{bin}(200, 0.6)$ som gir at $\text{E}(X) = np = 200 \cdot 0.6 = 120$ og $\text{Var}(X) = np(1 - p) = 200 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 48$. Styrken blir da

$$\begin{aligned} \pi(0.6) &= P_{p=0.6}(\text{Forkast}H_0) \\ &= P_{p=0.6}(X \leq 128) \\ &\approx G\left(\frac{128 + 0.5 - 120}{\sqrt{48}}\right) \\ &= G(1.23) = 0.8907. \end{aligned}$$

Oppgave 5 V12

(a) Her er $X \sim N(160, 18)$. Sannsynligheten for timelønn under 170 er

$$P(X < 170) = P(X \leq 170) = G\left(\frac{170 - 160}{18}\right) = G(0.56) = 0.7123.$$

Sannsynligheten for en timelønn mellom 140 og 180 er

$$\begin{aligned} P(140 < X < 180) &= P(X < 180) - P(X \leq 140) \\ &= P(X \leq 180) - P(X \leq 140) \\ &= G\left(\frac{180 - 160}{18}\right) - G\left(\frac{140 - 160}{18}\right) \\ &= G(1.11) - G(-1.11) \\ &= 0.8665 - 0.1335 = 0.7330 \end{aligned}$$

(b) Sorterer i stigende rekkefølge

115	125	132	134	143	145	151	154
157	166	182	184	197	218	224	230

Medianen blir $m = \frac{154+157}{2} = 155.5$

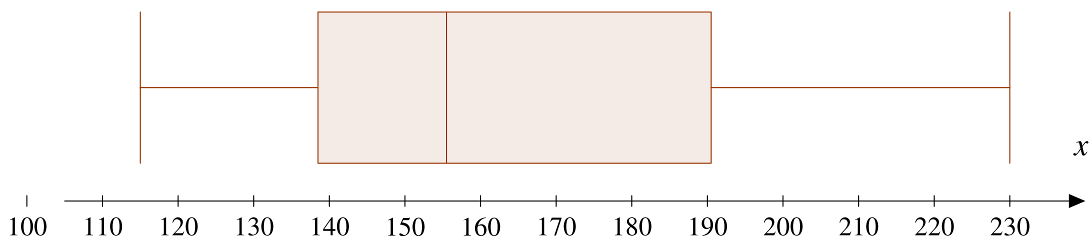
Kvartilene blir

$q_1 = \frac{134+143}{2} = 138.5$

$q_2 = m = 155.5$

$q_3 = \frac{184+197}{2} = 190.5$

Boksdiagrammet ser slik ut



(c) Variasjonsbredden er $230 - 115 = 115$.

Gjennomsnittet blir

$$\bar{x} = \frac{115 + 125 + \cdots + 230}{16} = \frac{2657}{16} = 166.06.$$

Fra Minitab ser vi at standardavviket er $s = 36.14$.

(d) Konfidensintervallet har formen

$$\bar{X} \pm k\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Vi har at $\bar{x} = 166.06$, $s = 36.14$ og $n = 16$. k finnes som 0.975 fraktilen i t–fordelinga med $16 - 1 = 15$ frihetsgrader, tabell 4 gir at den er $k = 2.1315$. Vårt konfidensintervall blir

$$166.06 \pm 2.1315 \cdot \frac{36.14}{\sqrt{16}} = [146.80, 185.32].$$

Oppgave 6 V12

(a) Forventningen blir

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9.$$

Beregner først

$$\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 = 1.3.$$

Dermed blir variansen

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.3 - 0.9^2 = 0.49.$$

(b) Her blir $\mathrm{E}(Y) = np = 3 \cdot 0.2 = 0.6$ og $\mathrm{Var}(Y) = np(1-p) = 3 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.48$.
Da blir

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0.9 + 0.6 = 1.5.$$

På grunn av uavhengighet har vi at

$$\mathrm{Var}(X+Y) \overset{\text{Uavh.}}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 0.49 + 0.48 = 0.97.$$

(c) Her blir

$$\mathrm{E}(R) = 100\mathrm{E}(X) = 100 \cdot 0.9 = 90.$$

På grunn av uavhengighet blir

$$\mathrm{Var}(R) \overset{\text{Uavh.}}{=} 100\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot 0.49 = 49.$$

Sentralgrensesetningen sier at S er tilnærmet normalfordelt. Verdimengden til R består av hele tall, $V_R = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 200\}$. Når vi normaltilnærmer er det dermed vanlig / mest korrekt å bruke halvkorreksjon eller heltallskorreksjon, uttrykk B velges derfor.

Høst 2012

Oppgave 1 H12

(a) Sannsynligheten blir

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{25}{6}}{\binom{30}{8}} \approx 0.303.$$

(b) Dette er en hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling med parametre $N = 30$, $M = 5$ og $n = 8$. Da blir

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= na = n\frac{M}{N} = 8 \cdot \frac{5}{30} = \frac{4}{3} \approx 1.333 \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{N-n}{N-1} \cdot na(1-a) = \frac{30-8}{30-1} \cdot 8 \cdot \frac{5}{30} \cdot \left(1 - \frac{5}{30}\right) \approx 0.843 \\
\sigma &= \sqrt{0.843} \approx 0.918 \\
\mu \pm \sigma &= \frac{4}{3} \pm 0.918 = (0.415, 2.25)
\end{aligned}$$

Da blir

$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(0.415 < X < 2.25) \\
&= P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \frac{\binom{5}{1}\binom{25}{7}}{\binom{30}{8}} + 0.303 = 0.714
\end{aligned}$$

Oppgave 2 H12

(a) Her er $X \sim N(2\,100, 500)$. Vi beregner

$$\begin{aligned}
P(2\,000 < X < 2\,500) &= P(X < 2\,500) - P(2\,000) \\
&= G\left(\frac{2\,500 - 2\,100}{500}\right) - G\left(\frac{2\,000 - 2\,100}{500}\right) \\
&= G(0.80) - G(-0.20) \\
&= 0.7881 - 0.4207 = 0.3674
\end{aligned}$$

(b) Her må

$$P(X < k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - G\left(\frac{k - 2\,100}{500}\right) = 0.10.$$

Da følger det at

$$G\left(\frac{k - 2\,100}{500}\right) = 0.90.$$

Tabell 2 gir at $G(1.2816) = 0.90$, som fører til

$$\begin{aligned}
\frac{k - 2\,100}{500} &= 1.2816 \\
k &= 2\,100 + 1.2816 \cdot 500 = 2\,740.8.
\end{aligned}$$

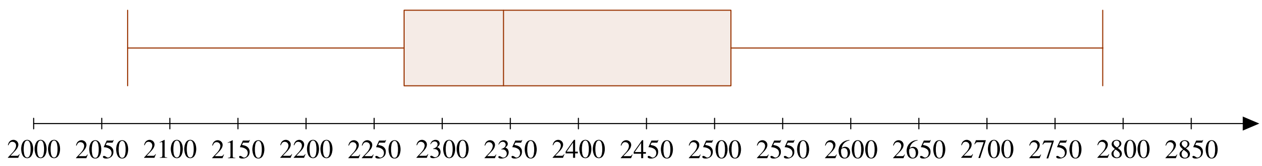
Sannsynligheten for å løpe lengre enn 2 740.8 meter på Cooper-testen er 0.1.

(c) Vi sorterer etter størrelse og får:

$$2\,069 \quad 2\,265 \quad 2\,272 \quad 2\,301 \quad 2\,345 \quad 2\,398 \quad 2\,512 \quad 2\,588 \quad 2\,785$$

Når vi har 9 observasjoner i stigende rekkefølge blir medianen nummer 5, altså er $m = 2\,345$. Første kvartil er medianen av de fem minste observasjonene, altså er $q_1 = 2\,272$. Tilsvarende blir tredje kvartil medianen av de 5 største observasjonene, altså er $q_3 = 2\,512$.

Boksdiagrammet ser slik ut



(d) Effekt av treningsopplegget fører til bedre kondis og man løper lengre i løpet av 12 minutter og dermed har Bernt rett alternativ hypotese.

(e) Forkast H_0 dersom

$$T = \frac{\bar{X} - 2\,100}{\frac{S}{\sqrt{9}}} \geq k,$$

der k er 0.95 fraktilen i t–fordelingen med $9 - 1 = 8$ f.g. Tabell 4 gir $k = 1.8595$. Vi får

$$t = \frac{2\,392.8 - 2\,100}{\frac{210}{\sqrt{9}}} \approx 4.1829,$$

som betyr at vi forkaster H_0. Konklusjonen blir at den nye treningsformen har hatt den ønskede effekt.

Oppgave 3 H12

Vi utvider tabellen

Antall forstyrrelser	0	1	2	3 eller flere	
p_i	0.3	0.3	0.3	0.1	
O	53	23	19	5	$n = 100$
$E = np_i$	30	30	30	10	

Vi forkaster gyldigheten av den opprinnelige sannsynlighetsfordelingen dersom

$$Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k,$$

der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelingen med $4-1=3$ f.g. Tabell 5 gir $k = 7.81$. Beregner

$$q = \frac{(53-30)^2}{30} + \frac{(23-30)^2}{30} + \frac{(19-30)^2}{30} + \frac{(5-10)^2}{10} = 25.8.$$

Vi får forkastning og vi ser at antall forelesninger uten forstyrrelser har økt og antallet med forstyrrelser har avtatt. Kampanjen har hatt ønsket effekt.

Oppgave 4 H12

La p være sannsynligheten for å sekser. Vi tester $H_0 : p = \frac{1}{6}$ mot $H_1 : p < \frac{1}{6}$. Vi beregner

$$\begin{aligned} p-\text{verdi} &= P_{H_0}(X \leq 7) \\ &= G\left(\frac{7+0.5-80\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) \\ &= G(-1.75) = 0.041 < 0.05. \end{aligned}$$

Det vil si at vi forkaster H_0 og konkluderer med at terningen gir for få seksere.
Alternativt Vi kan finne testens kritiske verdi.

$$P_{H_0}(X \leq k) = G\left(\frac{k+0.5-80\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) = 0.05$$

Tabell 2 gir at G(-1.6449)=0.05, da må

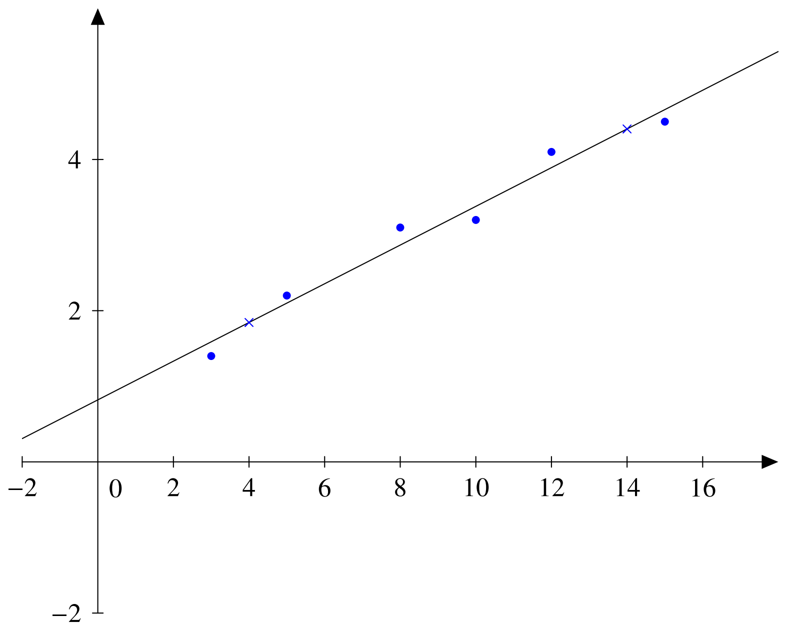
$$\frac{k+0.5-80\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}} = -1.6449$$

$$k = 80\cdot\frac{1}{6} - 0.5 - 1.6449\sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = 7.35.$$

Dette betyr at vi forkaster dersom $X \leq 7$ og vi får forkastning da $x = 7$.

Oppgave 5 H12

(a) Spredningsdiagrammet ser slik ut (med inntegnet regresjonslikning fra b)



Beregner, for eksempel ved hjelp av en tabell:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 8.83\\ \bar{y} &= 3.08\\ \sum(x-\bar{x})^2 &= 98.83\\ \sum(y-\bar{y})^2 &= 6.67\\ \sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) &= 25.28\end{aligned}$$

Korrelasjonskoeffisienten blir

$$r = \frac{25.28}{\sqrt{98.83}\sqrt{6.67}} \approx 0.985$$

(b) Parametrene i regresjonslikninga blir

$$\hat{b} = \frac{25.28}{98.83} = 0.256$$
$$\hat{a} = 3.08 - 0.256 \cdot 8.83 = 0.820$$

Da blir $y = 0.820 + 0.256x$. Setter inn $x = 4$ og får $y = 1.8$ og $x = 14$ gir $y = 4.4$, da kan vi tegne inn regresjonslikningen. Videre gir $x = 7$ at $y = 2.6$. En spurv på 7 dager har vingelengde 2.6 cm i følge denne modellen.

Oppgave 6 H12

(a) Beregner

$$P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 \neq 0.1 = P(A \cap A)$$

Noe som viser at A og B ikke er uavhengige.

(b) Her blir

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

Oppgave 7 H12

(a) Her er $X \sim \text{bin}(10, 0.2)$.

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= \binom{10}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^8 = 0.302 \\
P(X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \binom{10}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^{10} + \binom{10}{1} 0.2^1 \cdot 0.8^9 + 0.302 \\
&= 0.8^{10} + 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8^9 + 0.302 = 0.678
\end{aligned}$$

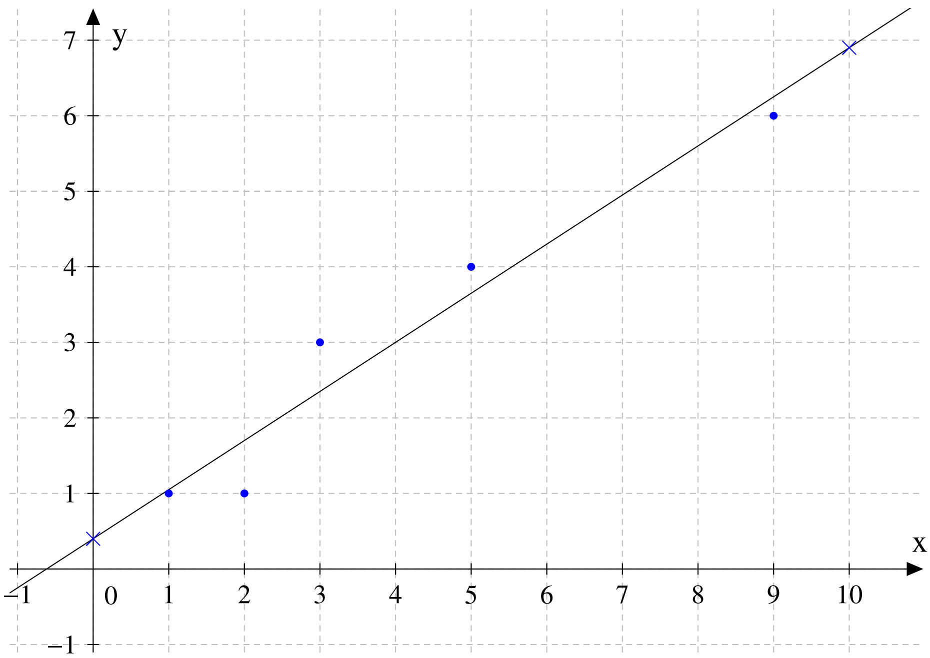
(b) Her blir

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= np = 10 \cdot 0.2 = 2 \\
\text{Var}(X) &= np(1 - p) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6 \\
\sigma_x &= \sqrt{1.6} \approx 1.26
\end{aligned}$$

Vår 2013

Oppgave 1 V13

(a) Spredningsdiagram med inntegnet regresjonslinje ser slik ut



For å beregne korrelasjonskoeffisienten beregner vi

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	1	-3	-2	9	4	6
2	1	-2	-2	4	4	4
3	3	-1	0	1	0	0
5	4	1	1	1	1	1
9	6	5	3	25	9	15
20	15	0	0	40	18	26

Her er $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{20}{5} = 4$ og $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{15}{5} = 3$.
Fra beregningene i tabellen kan vi finne korrelasjonskoeffisienten

$$\frac{\sum[(x-\bar{x})(y-\bar{y})]}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2}} = \frac{26}{\sqrt{40}\sqrt{18}} = 0.969$$

Her er $r > 0$ som betyr at tendensen er at når x øker så øker også y. Korrelasjonskoeffisienten er også nær 1 som indikerer sterk lineær samvariasjon.

(b) Vi beregner

$$\hat{b} = \frac{\sum[(x-\bar{x})(y-\bar{y})]}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{26}{40} = 0.65.$$

og

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 3 - 0.65 \cdot 4 = 0.4$$

Likninga til regresjonslinja blir $y = 0.4 + 0.65x$. $x = 0$ gir $y = 0.4$ og $x = 10$ gir $y = 6.9$. Da kan vi tegne linja inn i spredningsdiagrammet.

Oppgave 2 V13

Vi setter opp en tabell

	Br	Gu	R	Bl	O	Gr	
p_i	0.10	0.15	0.10	0.25	0.25	0.15	
O	70	87	64	115	106	86	$n = 528$
$E = np_i$	52.8	79.2	52.8	132	132	79.2	

Vi forkaster antakelsen om realistisk sannsynlighetsfordeling dersom

$$Q = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \geq k,$$

der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelinga med $6 - 1 = 5$ frihetsgrader. Tabell 5 gir at $k = 11.07$. Vi beregner

$$\begin{aligned} q &= \frac{(70 - 52.8)^2}{52.8} + \frac{(87 - 79.2)^2}{79.2} + \frac{(64 - 52.8)^2}{52.8} + \frac{(115 - 132)^2}{132} + \frac{(106 - 132)^2}{132} + \frac{(86 - 79.2)^2}{79.2} \\ &= 5.603 + 0.768 + 2.376 + 2.189 + 5.121 + 0.584 \\ &= 16.641 \end{aligned}$$

Vi forkaster antakelsen om realistisk sannsynlighetsfordeling. Vi ser at spesielt brun har flere enn forventet og orange har færre enn forventet.

Oppgave 3 V13

(a) For at $X \sim \text{bin}(41, 0.9)$ må vi kunne se på de 41 billettkjøpene som uavhengige av hverandre. For hvert billettkjøp dukker enten passasjeren opp (S) ellers så dukker ikke passasjeren opp (F). Sannsynligheten for at en pasasjer dukker opp må være konstant lik 0.9.

Vi beregner

$$P(X = 41) = \binom{41}{41} \cdot 0.9^{41} \cdot 0.1^0 = 0.9^{41} = 0.013.$$

Og

$$P(X \leq 40) = 1 - P(X = 41) = 1 - 0.013 = 0.987.$$

(b) Hvis $X \leq 40$ blir $Y = 41\,000$. Hvis $X = 41$ blir $Y = 41\,0010 - 5\,000 = 36\,000$. Sannsynlighetsfordelingen til Y er gitt ved

y	36 000	41 000
$P(Y = y)$	0.013	0.987

Forventningen til Y blir da

$$E(Y) = 36\,000 \cdot 0.013 + 41\,000 \cdot 0.987 = 40\,935.$$

Oppgave 4 V13

(a) Her er $X \sim N(20, 7)$. Vi beregner

$$P(X < 25) = P(X \leq 25) = G\left(\frac{25-20}{7}\right) = G(0.71) = 0.7611,$$

og

$$P(X > 35) = 1 - P(x \leq 35) = 1 - G\left(\frac{35-20}{7}\right) = 1 - G(2.14) = 1 - 0.9838 = 0.0162.$$

(b) Vi setter $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, da blir $Y \sim N(4 \cdot 20, \sqrt{4} \cdot 7) = N(80, 14)$. Sannsynligheten for at saksbehendleren blir ferdig før arbeidsdagens slutt er

$$P(Y \leq 70) = G\left(\frac{70-80}{14}\right) = G(-0.71) = 0.2389.$$

(c) Gjennomsnittet blir

$$\bar{x} = \frac{5 + 18 + \cdots + 14}{9} = \frac{143}{9} = 15.89.$$

Vi sorterer i stigende rekkefølge og får

$$5 \quad 9 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 18 \quad 20 \quad 24 \quad 25$$

Observasjonen i midten, den 5. observasjonen er medianen. $m = 15$.

Variasjonsbredde: $25 - 5 = 20$.

Standardavviket: $s = 6.60$ (fra Minitab)

Variansen blir da: $\mathrm{Var} = 6.60^2 = 43.56$.

(d) Nullhypotesen blir $H_0 : \mu = 20$, altså at forventet saksbehandlingstid er som før. Den alternative hypotesen blir $H_1 : \mu < 20$, altså at forventet saksbehandlingstid er blitt kortere etter effektiviseringstiltakene er gjennomført.

(e) Effektiviseringstiltak kan også påvirke standardavviket, derfor gjennomfører vi en t–test.

Vi forkaster H_0 dersom

$$T = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq k,$$

der k er 0.05 fraktilen i t–fordelingen med $9 - 1 = 8$ frihetsgrader. Fra tabell 4 finner vi 0.95 fraktilen, den er 1.8595. Siden t–fordelingen er symmetrisk blir 0.05 fraktilen -1.8595. Vi beregner

$$t = \frac{15.89 - 20}{\frac{6.60}{\sqrt{9}}} = -1.8682.$$

Vi forkaster H_0, effektiviseringstiltakene ser ut til å ha hatt effekt.

Oppgave 5 V13

(a) Konfidensintervallet har formen

$$\frac{X}{n} \pm k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Her er $n = 200$, $x = 37$ slik at $\hat{p} = \frac{37}{200} = 0.185$. Videre er k lik 0.975 fraktilen i $N(0,1)$ fordelingen, tabell 2 gir at $k = 1.9600$.

Konfidensintervallet blir

$$0.185 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.185(1-0.185)}{200}} = (0.131, 0.239).$$

(b) Vi skal teste $H_0 : p = 0.08$ mot $H_1 : p > 0.08$. Forkast H_0 dersom $X \geq k$. Vi beregner

$$\begin{aligned} P_{H_0}(X \geq k) &= 1 - P_{H_0}(X \leq k-1) \\ &\approx 1 - G\left(\frac{k - 1 + 0.5 - 200 \cdot 0.08}{\sqrt{200 \cdot 0.08 \cdot 0.92}}\right) = 0.05 \end{aligned}$$

Da må

$$G\left(\frac{k - 1 + 0.5 - 200 \cdot 0.08}{\sqrt{200 \cdot 0.08 \cdot 0.92}}\right) = 0.95,$$

tabell 2 gir $G(1.6449) = 0.95$.

Vi får

$$\begin{aligned} \frac{k - 1 + 0.5 - 200 \cdot 0.08}{\sqrt{200 \cdot 0.08 \cdot 0.92}} &= 1.6449 \\ k = 16 - 0.5 + 1 + 1.6449 \cdot \sqrt{14.72} &\approx 22.8 \end{aligned}$$

Vi forkaster altså H_0 dersom $X \geq 23$.

(c) Styrken i alternativet er

$$\begin{aligned} \pi(0.10) &= P_{p=0.10}(X \geq 23) \\ &= 1 - P_{p=0.10}(X \leq 22) \\ &= 1 - G\left(\frac{22 + 0.5 - 200 \cdot 0.10}{\sqrt{200 \cdot 0.10 \cdot 0.90}}\right) \\ &= 1 - G(0.59) = 1 - 0.7224 = 0.2776 \end{aligned}$$

Oppgave 6 V13

(a) Vi beregner

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.2 = 1.1 \\
\mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.7 + 2^2 \cdot 0.2 = 1.5 \\
\mathrm{Var}(X) &= 1.5 - 1.1^2 = 0.29
\end{aligned}$$

Og

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 1 \\
\mathrm{E}(Y^2) &= 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.6 \\
\mathrm{Var}(Y) &= 1.6 - 1^2 = 0.6
\end{aligned}$$

(b) Simultanfordelingen blir

		X			
		0	1	2	
	0	0.03	0.21	0.06	0.3
Y	1	0.04	0.28	0.08	0.4
	2	0.03	0.21	0.06	0.3
		0.1	0.7	0.2	1.0

Her blir

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) = 0.03 + 0.28 + 0.06 = 0.37.$$

Videre blir

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 1.1 + 1 = 2.1.$$

På grunn av uavhengighet blir

$$\mathrm{Var}(X+Y) \overset{\text{Uavh.}}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 0.29 + 0.6 = 0.89.$$

Høst 2013

Oppgave 1 H13

Her er $X \sim N(5, 0.15)$.

(a) Beregner

$$\begin{aligned} P(X < 4.9) &= P(X \leq 4.9) \\ &= G\left(\frac{4.9 - 5}{0.15}\right) \\ &= G(-0.67) = 0.2514. \end{aligned}$$

Deretter beregner vi

$$\begin{aligned} P(4.8 < X < 5.2) &= P(X < 5.2) - P(X \leq 4.8) \\ &= P(X \leq 5.2) - P(X \leq 4.8) \\ &= G\left(\frac{5.2 - 5}{0.15}\right) - G\left(\frac{4.8 - 5}{0.15}\right) \\ &= G(1.33) - G(-1.33) \\ &= 0.9082 - 0.0918 = 0.8164. \end{aligned}$$

(b) Skal finne k slik at $P(X < k) = 0.05$, da må

$$P(X < k) = P(X \leq k) = G\left(\frac{k - 5}{0.15}\right) = 0.05.$$

Tabell 2 gir at $G(-1.6449) = 0.05$, da må

$$\begin{aligned} \frac{k - 5}{0.15} &= -1.6449 \\ k &= 5 - 1.6449 \cdot 0.15 \approx 4.75. \end{aligned}$$

(c) Setter $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$, under forutsetning av uavhengighet blir

$$Y \sim N(10 \cdot 5,\ \sqrt{10} \cdot 0.15) = N(50,\ \sqrt{10} \cdot 0.15) \approx N(50, 0.47).$$

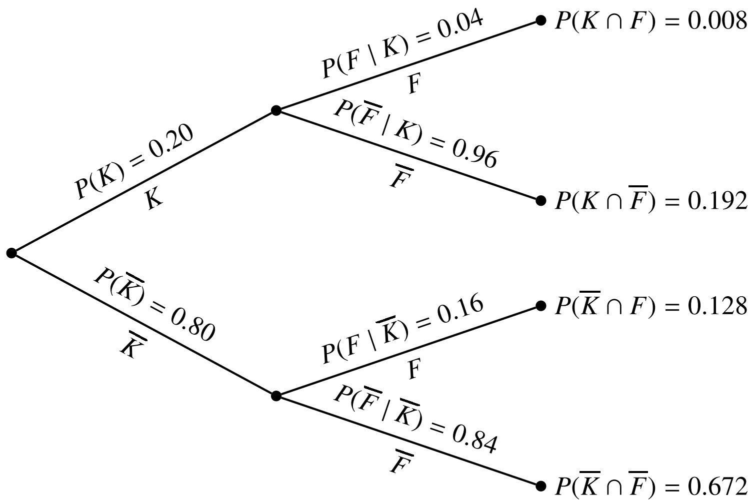
Vi får

$$\begin{aligned} P(Y < 45) &= P(Y \leq 45) \\ &= G\left(\frac{45 - 50}{\sqrt{10} \cdot 0.15}\right) \\ &= G(-10.54) \approx 0. \end{aligned}$$

Å ligge mer enn 10.54 standardavvik under forventningen er så og si umulig.

Oppgave 2 H13

(a) Sannsynlighetstreet ser slik ut:



(b) Vi får

$$P(K \cap F) = P(K) \cdot P(F|K) = 0.20 \cdot 0.04 = 0.008.$$

Her får vi

$$\begin{aligned} P(K|\overline{F}) &= \frac{P(K \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} \\ &= \frac{P(K) \cdot P(\overline{F}|K)}{P(K \cap \overline{F}) + P(\overline{K} \cap \overline{F})} \\ &= \frac{P(K) \cdot P(\overline{F}|K)}{P(K) \cdot P(\overline{F}|K) + P(\overline{K}) \cdot P(\overline{F}|\overline{K})} \\ &= \frac{0.20 \cdot 0.96}{0.20 \cdot 0.96 + 0.80 \cdot 0.84} = \frac{0.192}{0.192 + 0.672} \approx 0.222. \end{aligned}$$

Oppgave 3 H13

(a) 1. Ved tilfeldig trekning kan vi se på dette som 15 uavhengige delforsøk.
2. I hvert delforsøk kan vi avgjøre om man er overvektig (S) eller ikke (F).
3. Sannsynligheten for overvektig person er konstant lik 0.25 i hvert delforsøk

(b) Her blir

$$P(X = 4) = \binom{15}{4} \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^{11} \approx 0.225.$$

Vi beregner

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\
&= 1 - \left(\binom{15}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^{14}\right) \\
&= 1 - (0.013 + 0.067) = 0.920.
\end{aligned}
$$

(c) Her er $Y \sim \text{bin}(100, 0.25)$, vi får

$$
\begin{aligned}
\text{E}(Y) &= np = 100 \cdot 0.25 = 25. \\
\text{Var}(Y) &= np(1-p) = 100 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 18.75.
\end{aligned}
$$

$$
P(Y = 30) = \binom{100}{30} \cdot 0.25^{30} \cdot 0.75^{70} = 0.046.
$$

Her har vi brukt C knappen på kalkulatoren for å beregne $\binom{100}{30}$. Neste sannsynlighet regnes ut ved hjelp av normaltilnærming

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 30) &= 1 - P(Y \leq 29) \\
&= 1 - G\left(\frac{29 + 0.5 - 25}{\sqrt{18.75}}\right) \\
&= 1 - G(1.04) \\
&= 1 - 0.8508 = 0.1492.
\end{aligned}
$$

Det er rimelig å bruke normaltilnærming siden $\text{Var}(X) > 2$ og den standardiserte variabelen $z = 1.04$ oppfyller $-2.5 < z < 2.5$.

Oppgave 4 H13

Vi gjør tabellen ferdig

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
15.20	15.05	-0.41	-0.43	0.1681	0.1849	0.1763
15.40	15.30	-0.21	-0.18	0.0441	0.0324	0.0378
15.75	15.60	0.14	0.12	0.0196	0.0144	0.0168
15.50	15.45	-0.11	-0.03	0.0121	0.0009	0.0033
15.80	15.65	0.19	0.17	0.0361	0.0289	0.0323
15.90	15.80	0.29	0.32	0.0841	0.1024	0.0928
15.70	15.50	0.09	0.02	0.0081	0.0004	0.0018
$\overline{x} \approx 15.61$	$\overline{y} \approx 15.48$	-0.02	-0.01	0.3722	0.3643	0.3611

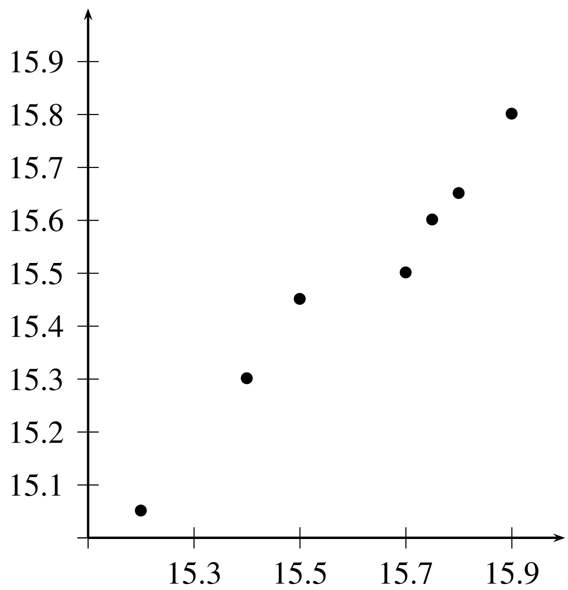
(a) Ordner bensinprisene fra Shell i stigende rekkefølge

$$15.20 \quad 15.40 \quad 15.50 \quad 15.70 \quad 15.75 \quad 15.80 \quad 15.90$$

Den midterste observasjonen er medianen, og da blir $m = 15.70$.
Gjennomsnittet blir $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{109.25}{7} \approx 15.61$.
Standardavviket

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.3722}{7-1}} \approx 0.249$$

(b) Spredningsdiagrammet



Korrelasjonskoeffisienten

$$r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{0.3611}{\sqrt{0.3722} \cdot \sqrt{0.3643}} = 0.9806.$$

Korrelasjonskoeffisienten er positiv, det betyr at lave priser på den ene stasjonen henger sammen med lave priser på den andre. Tilsvarende for høye priser. Korrelasjonskoeffisienten er nær 1, og det betyr at den lineære sammenhengen er tilnærmet perfekt.

Oppgave 5 H13

Vi forkaster H_0 dersom $\overline{X} \leq k$. Vi skal ha at $P_{H_0}(\overline{X} \leq k) = 0.025$, standardisering gir at $G\left(\frac{k-15}{\frac{3.7}{\sqrt{49}}}\right) = 0.025$. Tabell 2 gir at $G(-1.9600) = 0.025$, da må

$$\frac{k-15}{\frac{3.7}{\sqrt{49}}} = -1.9600$$

$$k = 15 - 1.9600 \cdot \frac{3.7}{\sqrt{49}} \approx 14.0.$$

Testen blir at vi forkaster hvis $\overline{X} \leq 14.0$. Vi fikk $\overline{x} = 14.8$ og har dermed ikke grunn til å forkaste. Oppgaven kan alternativt løses ved å beregne p–verdien.

Oppgave 6 H13

(a) Beregner

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1\,000 + 1\,000 + \cdots + 200}{16} = \frac{10\,750}{16} = 671.875.$$

Et 95 % konfidensintervall for μ er gitt ved

$$\left[\overline{X} - k\frac{S}{\sqrt{16}}, \overline{X} + k\frac{S}{\sqrt{16}}\right],$$

der k er 0.975 fraktilen i t–fordelinga med $16-1 = 15$ frihetsgrader. Tabell 5 gir at $k = 2.1314$ og vi får da

$$671.875 \pm 2.1314 \cdot \frac{297.75}{\sqrt{16}} = [513, 831].$$

(b) Vi forkaster H_0 dersom

$$T = \frac{\overline{X} - 500}{\frac{S}{\sqrt{16}}} \geq k,$$

der k er 0.95 fraktilen i t–fordelinga med $16-1 = 15$ frihetsgrader. Tabell 4 gir at $k = 1.7531$. Vi beregner

$$t = \frac{671.875 - 500}{\frac{297.75}{\sqrt{16}}} = 2.3090.$$

Konklusjonen blir at vi forkaster H_0, forventet beløp på julegaver er større enn 500.

Oppgave 7 H13

(a) Antall seksere i løpet av 3 terningkast er binomisk fordelt med $n = 3$ og $p = \frac{1}{6}$, vi får

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0.5787,$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72} \approx 0.3472,$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72} \approx 0.0694,$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216} \approx 0.0046.$$

Vi setter opp tabellen

Antall seksere	0	1	2	3
Sannsynlighet p	0.5787	0.3472	0.0694	0.0046
Forventet $E = np$, $n = 100$	57.87	34.72	6.94	0.46
Observert O	48	35	15	2

For at betingelsene for χ^2–testen skal være oppfylt må vi slå sammen de to siste kategoriene for å få at forventet antall er mer enn 5 i hver kategori. Vi får da

Antall seksere	0	1	2 eller 3
Sannsynlighet p	0.5787	0.3472	0.0740
Forventet $E = np$, $n = 100$	57.87	34.72	7.4
Observert O	48	35	17

Vi forkaster den opprinnelige sannsynlighetsfordelingen dersom

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \geq k,$$

der k er 0.99 fraktilen i χ^2–fordelinga med $3 - 1 = 2$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 9.21$. Vi får

$$q = \frac{(48 - 57.87)^2}{57.87} + \frac{(35 - 34.72)^2}{34.72} + \frac{(17 - 7.4)^2}{7.4} = 1.68 + 0.00 + 12.45 = 14.13$$

Vi forkaster den opprinnelige sannsynlighetsfordelinga og ser at spesielt kategorien 2 og 3 seksere bidrar til dette.

(b) Jens har kastet terningen 300 ganger og fått $1 \cdot 35 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 2 = 71$ seksere. Vi vil teste $H_0 : p = \frac{1}{6}$ mot $H_1 : p > \frac{1}{6}$ på 5 % nivå. Vi beregner p–verdien og får

$$
\begin{aligned}
p\text{–verdien} &= P_{H_0}(X \geq 71) \\
&= 1 - P_{H_0}(X \leq 70) \\
&= 1 - G\left(\frac{70 + 0.5 - 300 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{300 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) \\
&= 1 - G(3.18) \\
&= 1 - 0.9993 = 0.0007
\end{aligned}
$$

Dette betyr at vi forkaster H_0, vi konkluderer med at terningen gir for mange seksere.

Vi kunne også ha regnet ut kritisk verdi på testen.

Vår 2014

Oppgave 1 V14

Her er $X \sim N(0.5, 0.3)$.

(a) Beregner

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 0) &= G\left(\frac{0 - 0.5}{0.3}\right) \\
&= G(-1.67) = 0.0475.
\end{aligned}
$$

At vekttapet er mindre enn eller lik null betyr at man ikke går ned i vekt.

$$
\begin{aligned}
P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= G\left(\frac{1 - 0.5}{0.3}\right) \\
&= 1 - G(1.67) \\
&= 1 - 0.9525 = 0.0475
\end{aligned}
$$

Vi kunne også sett dette ved å bruke at 0 og 1 ligger symmetrisk om forventninga 0.5, dermed må $P(X > 1) = P(X < 0) = P(X \leq 0) = 0.0475$.

(b) La X_1 X_2, X_3 og X_4 være vekttapet i uke 1, 2, 3 og 4. Samla vekttap er da $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

På grunn av uavhengighet er $Y \sim N(4 \cdot 0.5,\ \sqrt{4} \cdot 0.3) = N(2, 0.6)$. Vi kan da beregne

$$\begin{aligned}
P(Y > 3) &= 1 - P(Y \leq 3) \\
&= 1 - G\left(\frac{3-2}{0.6}\right) \\
&= 1 - G(1.67) \\
&= 1 - 0.9525 = 0.0475.
\end{aligned}$$

(c) Student A beregner sannsynligheten for at samla vekttap i løpet av de to ukene er over 2 kg. Da kan for eksampel $x_1 = 0.8$ og $x_2 = 1.3$. Dette tilfredsstiller ikke oppgaveteksten som sier at vekttapet i hver uke skal være på 1 kilo eller mer.

Student B vil beregne sannsynligheten for at vekttapet er over 1 kg både i uke 1 og uke 2. Vi er derfor enig med student B.

$$\begin{aligned}
P(\{X_1 > 1\} \cap \{X_2 > 1\}) &\overset{\text{uavh.}}{=} P(X_1 > 1) \cdot P(X_2 > 1) \\
&\overset{\text{fra (a)}}{=} 0.0475 \cdot 0.0475 = 0.0023.
\end{aligned}$$

Oppgave 2 V14

Vi setter opp en tabell

	Svært fornøyd	Tilfreds	Misfornøyd	
p	0.6	0.3	0.1	
O	81	42	27	n=150
$E = n \cdot p$	90	45	15	

Vi forkaster H_0, altså antakelsen om realistisk sannsynlighetsfordeling dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2-fordelinga med $3 - 1 = 2$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 5.99$. Vi beregner

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{(81-90)2}{90} + \frac{(42-45)^2}{45} + \frac{(27-15)^2}{15} \\
&= 0.90 + 0.20 + 9.60 = 10.70
\end{aligned}$$

Vi forkaster antakelsen om realistiske prosentandeler. Undersøkelsen tyder på at andelen som er misfornøyd er større enn 10 % (og dermed må andelen i tilfreds eller svært fornøyd være mindre enn oppgitt).

Oppgave 3 V14

Gjennomsnittet blir

$$\bar{x} = \frac{347 + 731 + \cdots + 492}{10} = \frac{5238}{10} = 523.8$$

Vi har altså at $n = 10$ og $s = 185.3$. Konfidensintervallet er på formen

$$\left[\bar{X} - k \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Her er k 0.975 fraktilen i t-fordelinga med $10 - 1 = 9$ frihetsgrader. Tabell 4 gir $k = 2.2622$. Vi får

$$5.23.8 \pm 2.2622 \cdot \frac{185.3}{\sqrt{10}} = [391.2, 656.4].$$

Oppgave 4 V14

(a) Vi beregner

$$\binom{10}{3} = 10C3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120,$$
$$\binom{8}{3} = 8C3 = 56.$$

Vi kan ta ut 120 forskjellige utvalg, av disse er det 56 som inneholder ingen fordervede egg.

(b) X er antall forderva egg i utvalget. X er hypergeometrisk fordelt. Fordi vi har en populasjon på $N = 10$, av dem er $M = 2$ spesielle (forderva). Vi trekker et tilfeldig utvalg på $n = 3$. Her får vi

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \cdot 8}{120} = \frac{1}{15} \approx 0.067$$

$P(x = 3) = 0$ fordi det er umulig å få 3 forderva egg i utvalget.

(c) Vi beregner:

$$\mathrm{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N} = na = 3 \cdot \frac{2}{10} = 3 \cdot 0.2 = 0.6,$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{N - n}{N - 1} \cdot na(1 - a) = \frac{10 - 3}{10 - 41} \cdot 3 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = \frac{28}{75} \approx 0.37,$$
$$\sigma_X = \sqrt{\frac{28}{75}} \approx 0.61.$$

Oppgave 5 V14

(a) Her er $H_0 : p = 0.03$ og $H_1 : p > 0.03$. Her er $n = 200$, når H_0 er sann vil $\mathrm{E}(X) = np = 200 \cdot 0.03 = 6$ og $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 200 \cdot 0.03 \cdot 0.97 = 5.82$. Vi forkaster H_0 dersom

$X \geq k$. Vi beregner

$$\begin{aligned} P_{H_0}(X \geq k) &= 1 - P_{H_0}(X \leq k-1) \\ &\approx 1 - G\left(\frac{k-1+0.5-6}{\sqrt{5.82}}\right) = 0.05 \end{aligned}$$

Da må

$$G\left(\frac{k-1+0.5-6}{\sqrt{5.82}}\right) = 0.95$$

Tabell 2 gir at $G(1.6449) = 0.95$, da må

$$\begin{aligned} \frac{k-1+0.5-6}{\sqrt{5.82}} &= 1.6449 \\ k &= 6 - 0.5 + 1 + 1.6449 \cdot \sqrt{5.82} \approx 10.47 \end{aligned}$$

Vi forkaster H_0 dersom $X \geq 11$. Vi fikk $x = 9$ og kan dermed ikke forkaste H_0.

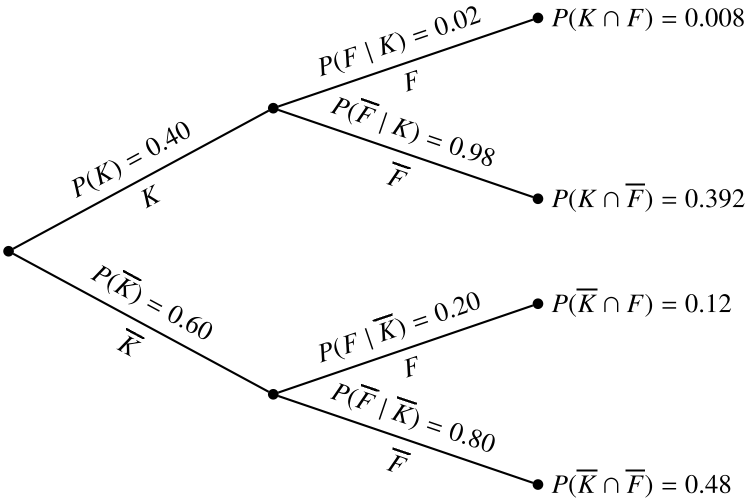
NB: Oppgaven kan også løses ved å beregne p-verdien til observasjonen. Men siden vi i neste oppgave skal beregne styrken til testen må vi finne kritisk verdi uansett.

(b) Vi skal finne styrken i alternativet $p = 0.08$. Når $p = 0.08$ blir $\mathrm{E}(X) = np = 200 \cdot 0.08 = 16$ og $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 200 \cdot 0.08 \cdot 0.92 = 14.72$. Styrken blir

$$\begin{aligned} \pi(0.08) &= P_{p=0.08}(X \geq 11) \\ &= 1 - P_{p=0.08}(X \leq 10) \\ &= 1 - G\left(\frac{10+0.5-16}{\sqrt{14.72}}\right) \\ &= 1 - G(-1.43) \\ &= 1 - 0.0764 = 0.9236. \end{aligned}$$

Oppgave 6 V14

(a) Sannsynlighetstreet ser slik ut:



(b) Vi får

$$P(K \cap F) = P(K) \cdot P(F|K) = 0.40 \cdot 0.02 = 0.008.$$

Vi beregner først

$$P(\overline{F}) = P(K \cap \overline{F}) + P(\overline{K} \cap \overline{F}) = 0.392 + 0.48 = 0.872.$$

Da får vi

$$P(K \mid \overline{F}) = \frac{P(K \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0.392}{0.872} \approx 0.450.$$

Oppgave 7 V14

Her har vi

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad x = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

(a) Her er $\lambda t = 7 \cdot 1 = 7$.

$$P(X = 5) = \frac{7^5}{5!} e^{-7} = 0.128.$$

videre får vi

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - \left[\frac{7^0}{0!} \cdot e^{-7} + \frac{7^1}{1!} \cdot e^{-7} + \frac{7^2}{2!} \cdot e^{-7} \right] \\ &= 1 - [0.001 + 0.006 + 0.022] \\ &= 0.971 \end{aligned}$$

(b) Her blir $\lambda t = 7 \cdot 3 = 21$.

$$P(X = 16) = \frac{21^{16}}{16!} \cdot e^{-21} = 0.052$$

Oppgave 8 V14

Vi lager en tabell

	Deltar	Deltar ikke	Sum	Andel
Kvinne	35 (28.8)	9 (15.2)	44	0.303
Mann	60 (66.2)	41 (34.9)	101	0.697
	95	50	145	1.000

Vi forkaster antakelsen om uavhengighet dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2-fordelinga med $(2-1)(2-1) = 1 \cdot 1 = 1$ frihetsgrad. Tabell 5 gir $k = 3.84$. Vi beregner

$$\begin{aligned} q &= \frac{(35-28.8)^2}{28.8} + \frac{(9-15.2)^2}{15.2} + \frac{(60-66.2)^2}{66.2} + \frac{(41-34.9)2}{34.9} \\ &= 1.33 + 2.53 + 0.58 + 1.07 = 5.51. \end{aligned}$$

Vi forkaster antakelsen om uavhengighet og ser at kvinner deltar i større grad enn deres andel av de ansatte skulle tilsi. For mennene deltar en mindre andel enn deres andel av de ansatte skulle tilsi.

Høst 2014

Oppgave 1 H14

I denne oppgaven kan det være lurt å tegne et sannsynlighetstre. I oppgaveteksten får vi oppgitt sannsynlighetene $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ og $P(B|\bar{A}) = 0.5$.

a)

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6} = 0.5$$

b) $P(B|\bar{A}) = 0.5$ gir $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}) = 1 - 0.5 = 0.5$. Dermed blir $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$.Vi kan da finne

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \bar{\cup} B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Oppgave 2 H14

a) A er tiden Anders bruker og vi har $A \sim N(20, 5)$.

$$P(A < 17) = P(A \leq 17) = G\left(\frac{17-20}{5}\right) = G(-0.60) = 0.2743$$

$$\begin{aligned} P(16 < A < 24) &= P(A < 24) - P(A \leq 16) \\ &= P(A \leq 24) - P(A \leq 16) \\ &= G\left(\frac{24-20}{5}\right) - G\left(\frac{16-20}{5}\right) \\ &= G(0.80) - G(-0.80) \\ &= 0.7881 - 0.2119 = 0.5762 \end{aligned}$$

b) Vi setter $Y = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Da blir

$$\mathrm{E}(Y) = 4\mathrm{E}(A) = 4 \cdot 20 = 80$$

På grunn av uavhengighet blir

$$\mathrm{Var}(Y) = 4\mathrm{Var}(A) = 4 \cdot 5^2 = 100$$

Dermed blir

$$\sigma_Y = \sqrt{100} = 10$$

c) B er tiden Berit bruker og vi har at $B \sim N(16, 4)$. Vi skal finne sannsynligheten for $B < A$ som er det samme som sannsynligheten for $B - A < 0$. Vi setter $D = B - A$, på grunn av uavhengighet blir D normalfordelt og vi har:

$$\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}(B + (-1)A) = \mathrm{E}(b) + (-1)\mathrm{E}(A) = 16 - 20 = -4$$

Videre blir (forutsetter uavhengighet)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}(B + (-1)A) \\ &= \mathrm{Var}(B) + (-1)^2\mathrm{Var}(A) \\ &= \mathrm{Var}(B) + \mathrm{Var}(A) \\ &= 4^2 + 5^2 = 41 \end{aligned}$$

Det betyr at $D \sim N(-4, \sqrt{41})$. Vi får

$$P(B < A) = P(D < 0) = P(D \leq 0) = G\left(\frac{0-(-4)}{\sqrt{41}}\right) = G(0.62) = 0.7324$$

Oppgave 3 H14

a) Her blir

$H_0 : \mu = 240$. Forventet tidsbruk er som før.

$H_1 : \mu < 240$. Forventet tidsbruk er gått ned etter kurset.

b) Vi utfører en t–test. Testobservatoren er

$$T = \frac{\bar{X}240}{\frac{S}{\sqrt{25}}}$$

Vi forkaster H_0 dersom $T \leq k$ der k er 0.05 fraktilen i t–fordelinga med $25 - 1 = 24$ frihetsgrader. Tabell 4 gir at 0.95 fraktilen i denne fordelinga er 1.7109. Symmetrien i fordelinga gir dermed at vi forkaster dersom $T \leq -1.7109$. Vi får

$$t = \frac{198 - 240}{\frac{48}{\sqrt{25}}} = -4.375$$

Vi forkaster H_0. Kurset har hatt den ønskede effekten.

Oppgave 4 H14

a) Det er binomisk fordeling fordi

1. Hver deloppgave er et uavhengig delforsøk. Antall deloppgaver er 15 og da er $n = 15$.
2. Hvert delforsøk har to utfall: rett svar (S) eller galt svar (F).
3. Siden vi tipper er sannsynligheten for rett svar konstant i hvert delforsøk. $p = \frac{1}{5} = 0.2$.

b) Vi får

$$P(Y = 3) = \binom{20}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^{17} = 0.190$$

Vider blir

$$\begin{aligned} P(Y > 3) &= 1 - P(Y \leq 3) \\ &= 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 2)) \\ &= 1 - (0.122 + 0.270 + 0.285 + 0.190) \\ &= 0.133 \end{aligned}$$

Forventning

$$\mathrm{E}(Y) = np = 20 \cdot 0.1 = 2$$

Varians og standardavvik

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= np(1 - p) = 20 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 1.8 \\ \sigma_Y &= \sqrt{1.8} \approx 1.34 \end{aligned}$$

Oppgave 5 H14

Vi setter opp en tabell

Karakter	A	B	C–D–E	
p	0.36	0.43	0.21	
O	24	31	75	$n = \sum O = 130$
E $= np$ der $n = 126$	46.8	55.9	27.3	

Testobervatoren er

$$Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

Vi forkaster den opprinnelige sannsynlighetsfordelinga dersom $Q \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelinga med $3 - 1 = 2$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 5.99$. Vi får

$$q = \frac{(24-46.8)^2}{46.8} + \frac{(31-55.9)^2}{55.9} + \frac{(75-27.3)^2}{27.3} = 11.11 + 11.09 + 83.34 = 105.54$$

Vi forkaster den opprinnelige sannsynlighetsfordelinga. Vi ser at bruken av A og B har gått ned og bruken av de andre karakterene har gått opp. Kampanjen har hatt den ønskede effekten.

Oppgave 6 H14

a) Gjennomsnittet

$$\bar{x} = \frac{9+6+9+7+11+12+2+10+7}{9} = \frac{73}{7} \approx 8.11$$

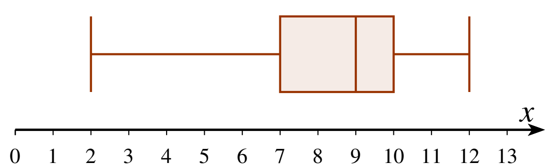
Sorterer i stigende rekkefølge.

2 6 7 7 9 9 10 11 12

Medianen er observasjonen i midten, altså nummer 5. Vi får $m = q_2 = 9$.

Første kvartil er den midterste av de 5 minste, vi får $q_1 = 7$. Tredje kvartil er den midterste av de 5 største, vi får $q_3 = 10$.

Boksdiagrammet blir



b) Konfidensintervallet er gitt ved

$$\bar{X} \pm k\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Fra a har vi $\bar{x} = 8.11$. k er 0.99 fraktilen i t–fordelinga med $9 - 1 = 8$ frihetsgrader, tabell 4 gir $k = 2.8965$. Det empirsike standardavviket er oppgitt til $s = 3.02$ og $n = 9$. Vi får

$$8.11 \pm 2.8965\frac{3.02}{\sqrt{9}} = [5.19.11.03]$$

Oppgave 7 H14

Vi får

$$P(X \leq 2) = P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 2) = 0.2 + 0.1 + 0.3 = 1.9$$

Forventninga

$$\mathrm{E}(X) = (-2) \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.1 = 0.8$$

Regner først ut

$$\mathrm{E}(X^2) = (-2)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.3 + 5^2 \cdot 0.1 = 9.3$$

Variansen blir

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 9.3 - 1.9^2 = 5.69$$

Oppgave 8 H14

a) Totalt antall er $25 + 22 = 47$. Antall forskjellige festkomiteer er

$$\binom{47}{4} = 178\ 365$$

Antall forskjellige festkomiteer med 2 jenter og 2 gutter er

$$\binom{25}{2} \cdot \binom{22}{2} = 69\ 300$$

b) Antall forskjellige ryddekomiteer er

$$\binom{35}{3} = 6545$$

Antall forskjellige ryddekomiteer der Frode er med

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{34}{2} = 561$$

Sannsynligheten for at Frode må rydde

$$P(F) = \frac{561}{6545} = \frac{3}{35} \approx 0.086$$

Vår 2015

Oppgave 1 V15

Her er $\lambda = 6$ og $P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$

a) Her er $t = 1$, slik at $\lambda t = 6$.

$$P(X = 7) = \frac{6^7}{7!} e^{-6} = 0.138$$

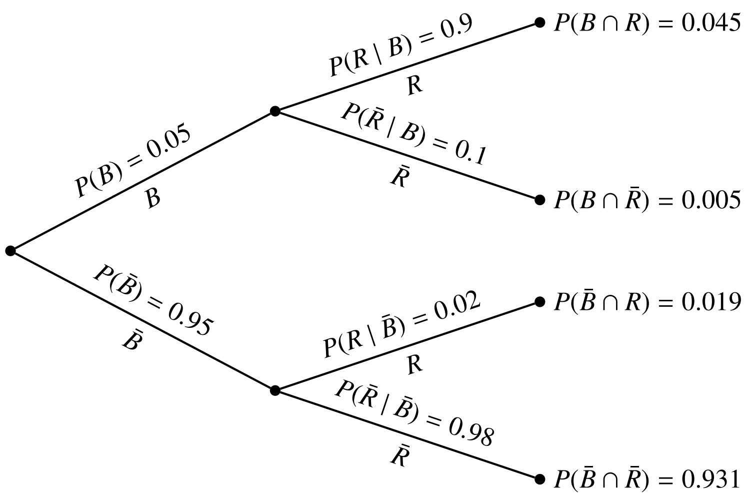
$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{6^0}{0!} e^{-6} + \frac{6^1}{1!} e^{-6} + \frac{6^2}{2!} e^{-6} + \frac{6^3}{3!} e^{-6} \\ &= 0.151 \end{aligned}$$

b) Her blir $t = \frac{0.5}{8} = \frac{1}{16}$, slik at $\lambda t = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$ Vi får

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{0.375^0}{0!} e^{-0.375} \\ &= 0.31 \end{aligned}$$

Oppgave 2 V15

a) Sannsynlighetstreet ser slik ut:



Vi får

$$P(R) = P(B \cap R) + P(\bar{R} \cap R) = 0.045 + 0.019 = 0.064$$

b) Vi får

$$P(B \mid R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{0.045}{0.064} \approx 0.703$$

Oppgave 3 V15

a) $P(X < 290) = P(X \leq 290) = G\left(\frac{290-350}{70}\right) = G(-0.86) = 0.1949$

$$\begin{aligned} P(290 < X < 410) &= P(X < 410) - P(X \leq 290) \\ &= P(X \leq 410) - P(X \leq 290) \\ &= G\left(\frac{410-350}{70}\right) - G\left(\frac{290-350}{70}\right) \\ &= G(0.86) - G(-0.86) \\ &= 0.8051 - 0.1949 = 0.6102 \end{aligned}$$

b) $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$, nå sier setning 9.6 at

$Y \sim N(5 \cdot 350,\ \sqrt{5} \cdot 70) = N(1750,\ \sqrt{5} \cdot 70) \approx N(1750, 156.5)$.

Forventet total kjørelengde er 1 750 km.

$$\begin{aligned} P(Y > 1900) &= 1 - P(Y \leq 1900) \\ &= 1 - G\left(\frac{1900-1750}{\sqrt{5} \cdot 70}\right) \\ &= 1 - G(0.96) \\ &= 1 - 0.8315 = 0.1685 \end{aligned}$$

c) For Anders regner vi ut: $P(Y > 1920) = 1 - G(1.09) = 1 - 0.8621 = 0.1379$.

For Bertil regner vi ut: $P(Y > 2100) = 1 - G(2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125$.

Å ha en ukentlig kjørelengde lik eller lengre enn Anders ser vi at har stor sannsynlighet, ut fra dette er det ingen grunn til å mistenke Anders for privat bruk av budbilen. Sannsynligheten for å kjøre like langt eller lengre enn Bertil ser vi at er svært lav, vi har derfor grunn til å undersøke hva den relativt lange kjørelengden til Bertil skyldes.

Oppgave 4 V15

a) Det er rimelig å bruke binomisk modell fordi:

   (i) Ved å velge kundene tilfeldig kan vi se på dette som 80 uavhengige enkeltforsøk.

   (ii) Hvert enkeltforsøk har to utfall: Maten serveres inne 10 minutter (S) eller det tar lengre tid enn 10 minutter for å få maten servert (F).

   (iii) Sannsynligheten for (S) er konstant lik 0.9 i hvert enkeltforsøk.

   H_0 utrykker situasjonen slik bedriften reklamerer for den, mens H_1 uttrykker mistanken om at færre enn 90 % av kundene får maten innen 10 minutter etter bestilling.

b) Forkast H_0 dersom $X \leq k$. Nivåkravet gir $P_{H_0}(X \leq k) = G\left(\frac{k+0.5-80\cdot 0.9}{\sqrt{80\cdot 0.9\cdot 0.1}}\right) = 0.05$. Tabell 2 gir $G(-1.6449) = 0.05$, da får vi:

$$\frac{k + 0.5 - 72}{\sqrt{7.2}} = -1.6449$$

$$k = 72 - 0.5 - 1.6449 \cdot \sqrt{7.2} \approx 67.09$$

   Kritisk verdi blir 67.

(c) p–verdien $= P_{H_0}(X \leq 64) = G\left(\frac{65+0.5-72}{\sqrt{7.2}}\right) = G(-2.42) = 0.0078 = 0.78\%$

   Man kan klart forkaste på 5 % nivå.

Oppgave 5 V15

Vi fyller ut tabellen:

	Bilulykke	Ikke bilulykke	Sum	Andel
Bruker	25 (31.4)	300 (293.3)	325	0.419
Bruker ikke	50 (43.6)	400 (406.7	450	0.581
Sum	75	700	775	1.000

Forkaster antakelsen om at det er uavhengighet dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$, der k er 0.975 fraktilen i χ^2–fordelingen med $(2-1)\cdot(2-1) = 1$ frihetsgrader, tabell 5 gir at $k = 5.02$
Vi får: $q = \frac{(25-31.4)^2}{31.4} + \frac{(50-43.6)^2}{43.6} + \frac{(300-293.3)^2}{293.3} + \frac{(400-406.7)^2}{406.7} = 2.51$
Vi har ikke grunnlag for å forkaste antakelsen om uavhengighet mellom variablene.

Oppgave 6 V15

Vi setter opp tabellen:

Blodtype	A	B	AB	0	
Antall, O	89	18	12	81	$n = 200$
p_i	0.41	0.10	0.04	0.45	
$E = n \cdot p_i$ $(n = 200)$	82	20	8	90	

Vi forkaster antakelsen om at de oppgitte andelene fortsatt gjelder dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelingen med $4 - 1 = 3$ frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 7.81$. Vi får:

$$q = \frac{(89-82)^2}{82} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(12-8)^2}{8} + \frac{(81-90)^2}{90} = 3.70$$

Vi har altså ikke grunnlag for å hevde at de oppgitte andelene ikke gjelder.

Oppgave 7 V15

a) Gjennomsnittet blir

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{32 + 20 + \cdots + 43}{9} = \frac{449}{9} \approx 49.89$$

Variansen er kvadratet av standardavviket, vi får:

$$\text{var} = 23.04^2 = 530.84$$

Variasjonsbredden blir $82 - 20 = 62$

b) Sorterer etter størrelse og får:

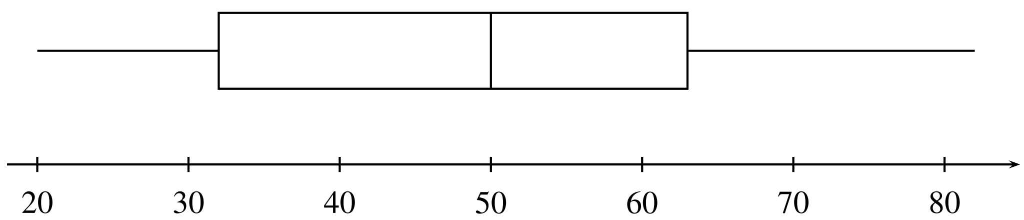
20 22 32 43 50 56 63 81 82

Medianen blir: $m = 50$

Første kavartil er lik medianen av de 5 minste observasjonene, den blir: $q_1 = 32$.

Tredje kvartil blir medianen av de 5 største observasjonene, den blir: $q_3 = 63$.

Boksdiagramment ser slik ut:



c) Vi har $\bar{x} = 49.89$ og $s = 23.04$. 99 % – fraktilen i t–fordelingen med 9-1=8 frihetsgrader er $k = 2.8964$. 98% konfidensintervallet blir:

$\left[49.89 - 2.8964\frac{23.04}{\sqrt{9}}, 49.89 + 2.8964\frac{23.04}{\sqrt{9}}\right] = [27.65, 72.13]$

Høst 2015

Oppgave 1 H15

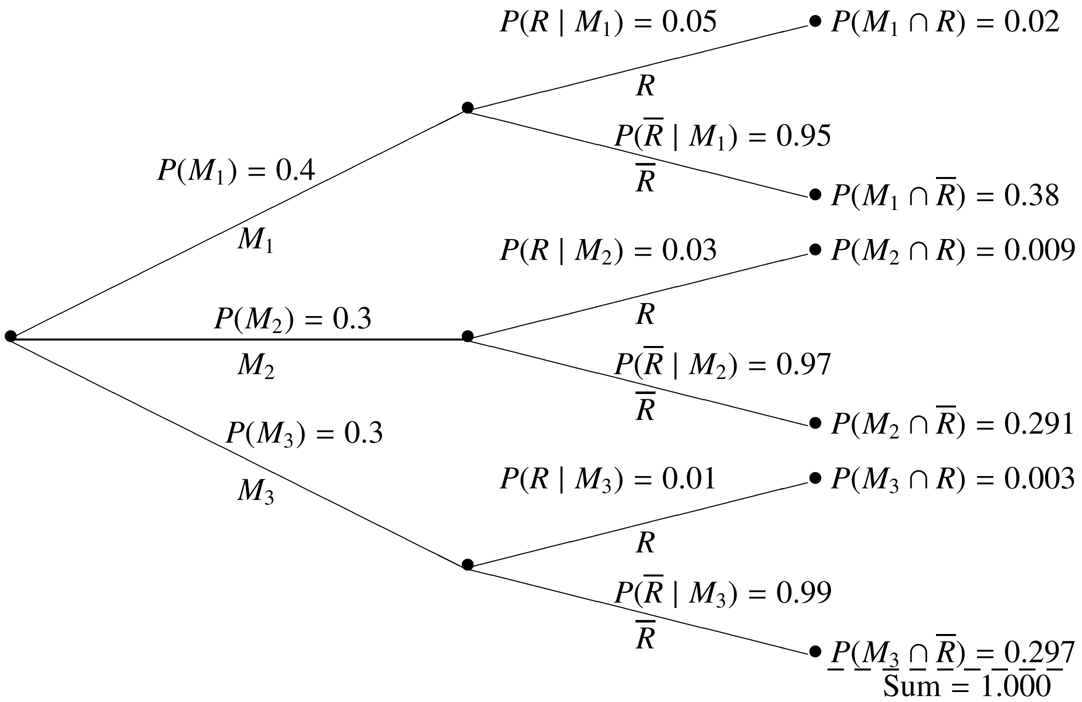
a) M_1: alarmen er montert av montør M1. Tilsvarende for M_2 og M_3.

R: Det reklameres på monteringen av alarmen.

Følgende er oppgitt:

$$P(M_1) = 0.4$$
$$P(M_2) = P(M_3) = 0.3$$
$$P(R \mid M_1) = 0.05$$
$$P(R \mid M_2) = 0.03$$
$$P(R \mid M_3) = 0.01$$

Vi tegner sannsynlighetstre:



b) Sannsynligheten for at det reklameres på montert bilalarm blir da:

$$P(R) = P(M_1 \cap R) + P(M_2 \cap R) + P(M_3 \cap R) = 0.02 + 0.009 + 0.003 = 0.032$$

c) Sannsynligheten for at montør 1 har montert en alarm gitt at det er kommet reklamasjon på monteringen:

$$P(M_1|R) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0.02}{0.032} = 0.625$$

Oppgave 2 H15

a)

$$P(X < 260) = P(X \leq 260) = G\left(\frac{260-300}{25}\right) = G(-1.60) = 0.0548$$

$P(260 \leq X \leq 310) = P(X \leq 310) - P(X < 260) = G\left(\frac{310-300}{25}\right) - G(-1.60)$
$= G(0.40) - G(-1.60) = 0.6554 - 0.0548 = 0.6006 \approx 0.601$

b) Vi setter $R = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$. Da blir $R \sim N\left(10 \cdot 300,\ \sqrt{10} \cdot 25\right)$. Dette gir:

$$P(R < 2800) = P(R \leq 2800) = G\left(\frac{2800 - 10 \cdot 300}{\sqrt{10} \cdot 25}\right) = G(-2.53) = 0.0057$$

c) Nullhypotesen blir: H_0: $\mu = 300$. Denne sier at kjøttinnholdet er som før, det lave gjennomsnittlige kjøttinnholdet i de 10 boksene skyldes helt normale tilfeldige svingninger. Alternativhypotesen blir: H_1: $\mu < 300$. Denne sier at kjøttinnholdet i lapskausboksene virkelig er blitt mindre.

d) Setter $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}$. Da er $\overline{X} \sim N\left(300, \frac{25}{\sqrt{10}}\right)$. Vi forkaster H_0 dersom $\overline{X} \leq k$.

$$P_{H_0}\left(\overline{X} \leq k\right) = G\left(\frac{k-300}{25/\sqrt{10}}\right) \leq 0.05$$

Dette gir:

$$\frac{k-300}{25/\sqrt{10}} \leq -1.6449 \Leftrightarrow k \leq 300 - 1.6449 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} \approx 287$$

Vi forkaster altså H_0 dersom $\overline{X} \leq 287$. Vi observerte at $\bar{x} = 289$. Dette gir ikke grunnlag for å forkaste H_0.

e) Et 90 %-konfidensintervall for μ når σ er ukjent er gitt ved: $\left[\overline{X} - k\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} - k\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, der k er 95 %-fraktilen i t-fordelinga med $n-1$ frihetsgrader. Vi finner 95%-fraktilen i t-fordelinga med $10 - 1 = 9$ frihetsgrader, den er 1.8331.

Vi beregner

$$\bar{x} = \frac{294 + 217 + \cdots + 304}{10} = \frac{2688}{10} = 268.8$$

Videre er det oppgitt at $s = 58.1$.

Et 90 %-konfidensintervall blir da:

$$\left[268.8 - 1.8331\frac{58.1}{\sqrt{10}},\ 268.8 + 1.8331\frac{58.1}{\sqrt{10}}\right] = [235.1\ ,\ 302.5]$$

Oppgave 3 H15

Vi har oppgitt: $P(L) = 0.10$ $P(D) = 0.07$ $P(L \cap D) = 0.02$
Siden $P(L) \cdot P(D) = 0.1 \cdot 0.07 = 0.007 \neq 0.2 = P(L \cap D)$, er ikke L og D uavhengige.
$P(D\,|L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0.02}{0.1} = 0.2$

Oppgave 4 H15

Antall menn i utvalget, X blir hypergeometrisk fordelt med $N = 30$, $M = 18$ og $n = 5$.
$P(X = 1) = \frac{\binom{18}{1}\cdot\binom{12}{4}}{\binom{30}{5}} = \frac{18\cdot 495}{142506} = 0.063$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) &= 1 - \left(\frac{\binom{18}{0} \cdot \binom{12}{5}}{\binom{30}{5}} + 0.063 \right) \\
&= 1 - \left(\frac{1 \cdot 792}{142506} + 0.063 \right) = 0.932
\end{aligned}
$$

Oppgave 5 H15

a) Gjennomsnittsfarten blir: $\overline{x} = \frac{61+51+50+51+53+45+46+41+63}{9} = \frac{461}{9} = 51.22.$

Standardavviket blir

$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt{\frac{1}{9-1}\left[(61-51.22)^2 + (51-51.22)^2 + \cdots (63-51.22)^2\right]} \\
&= 7.16
\end{aligned}
$$

Vi ordner observasjonene etter størrelse:

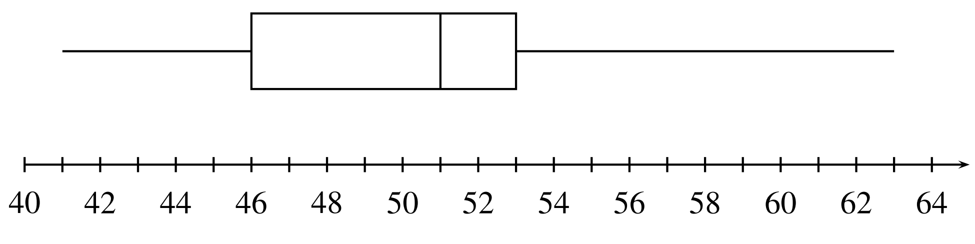
41 45 46 50 51 51 53 61 63

Vi har 9 observasjoner. Medianen er da observasjon nummer 5: $m = 51$.

Første kvartil er medianen av de 5 minste observasjonene. Vi får $q_1 = 46$.

Tredje kvartil er medianen av de 5 største observasjonene. Vi får $q_3 = 53$

b) Boksdiagrammet ser slik ut:



Høyre hale er betraktelig lengre enn venstre hale. Det er også skjevhet i den sentrale fordelinga i og med at medianen ligger nærmere tredje kvartil enn første kvartil.

Oppgave 6 H15

a)

$$P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - G\left(\frac{14-15}{7}\right) =$$
$$1 - G(-0.14) = 1 - 0.4443 = 0.5557$$

$P(X < k) = G\left(\frac{k-15}{7}\right) = 0.30$. Tabell 2 gir nå at $G(-0.5244) = 0.30$. Vi løser likningen $\frac{k-15}{7} = -0.5244$ og får $k = 15 - 0.5244 \cdot 7 = 11.3$

b) Setning 9.6 gir at $\bar{X} \sim N\left(15, \frac{7}{\sqrt{16}}\right) = N\left(15, \frac{7}{4}\right)$.

$$P(\bar{X} > 15.3) = 1 - P(\bar{X} \leq 15.3) = 1 - G\left(\frac{15.3-15}{\frac{7}{4}}\right) =$$
$$1 - G(0.17) = 1 - 0.5675 = 0.4325$$

$P(\bar{X} < k) = G\left(\frac{k-15}{\frac{7}{4}}\right) = 0.30$. Tabell 2 gir $G(-0.5244) = 0.30$. Vi løser likningen $\frac{k-15}{\frac{7}{4}} = -0.5244$ og får $k = 15 - 0.5244 \cdot \frac{7}{4} = 14.0823$.

c) Vi bruker egenskapene til lineærkombinasjoner av uavhengige variable og får:

$$E(Y) = E(2 \cdot X_1 + (-3) \cdot X_2) = 2 \cdot E(X_1) + (-3) \cdot E(X_2) =$$
$$2 \cdot 15 - 3 \cdot 15 = -15$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2 \cdot X_1 + (-3) \cdot X_2) = 2^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) + (-3)^2 \cdot \mathrm{Var}(X_2) =$$
$$4 \cdot 7^2 + 9 \cdot 7^2 = 13 \cdot 7^2 = 637$$

Vår 2016

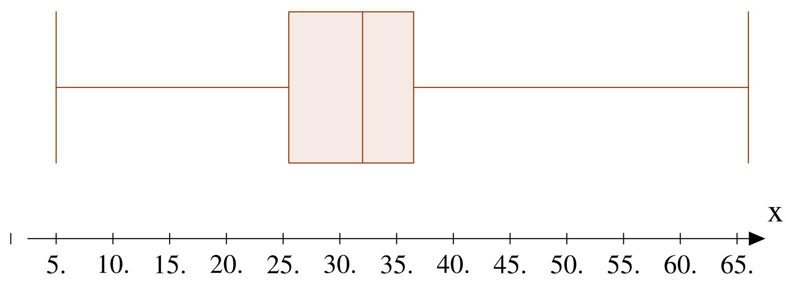
Oppgave 1 V16

a) Antall timer foran TV'en fra størst til minst:

5 16 20 21 30 31 32 32 34 35 35 38 41 43 66

$m = q_2 = 32$

$q_1 = \frac{21+30}{2} = 25.5$
$q_3 = \frac{35+38}{2} = 36.5$
Boksdiagrammet ser slik ut:



b) Her er $n = 15$, vi beregner $\bar{x} = \frac{5+6+\cdots+66}{15} = \frac{479}{15} \approx 31.93$.

Vi har oppgitt at empirisk standardavvik er $s = 13.81$.

For å lage et 95 % konfidensintervall må vi finne 0.975 fraktilen i t-fordelinga med $15-1 = 14$ frihetsgrader, den er $k = 2.1448$.

Konfidensintervallet blir

$$\left[31.93 - 2.1448 \cdot \frac{13.81}{\sqrt{15}}, 31.93 + 2.1448 \cdot \frac{13.81}{\sqrt{15}}\right] = [24.28, 39.58]$$

Oppgave 2 V16

Her er

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Intensiteten er $\lambda = 0.7$ per døgn. For å finne sannsynligheten for 2 eller færre tilfeller av forsvunnet bagasje i løpet av ett døgn, setter vi $t = 1$ døgn, da blir $\lambda t = 0.7 \cdot 1 = 0.7$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{0.7^0}{0!} e^{-0.7} + \frac{0.7^1}{1!} e^{-0.7} + \frac{0.7^2}{2!} e^{-0.7} \\ &= 0.497 + 0.348 + 0.122 = 0.967 \end{aligned}$$

For å finne sannsynligheten for 4 tilfeller av forsvunnet bagasje i løpet av en 5 døgns periode, setter vi $t = 5$ døgn, da blir $\lambda t = 0.7 \cdot 5 = 3.5$.

$$P(X = 4) = \frac{3.5^4}{4!} e^{-3.5} = 0.189$$

Oppgave 3 V16

i	1	2	3	4	5
p_i	0.04	0.12	0.23	0.34	0.27
$E = np_i$ der $n = 200$	8	24	46	68	54
O	2	11	59	73	55

Vi ser at $E \geq 5$ i alle kategorier, dermed er forutsetningen for å bruke χ^2–testen er oppfylt.
Vi forkaster dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$ der k er 0.95 fraktilen i χ^2–fordelinga med $5 - 1 = 4$ frihetsgrader. Tabell 5 gir at $k = 9.49$. Vi får

$$\begin{aligned} q &= \frac{(2-8)^2}{8} + \frac{(11-24)^2}{24} + \frac{(59-46)^2}{46} + \frac{(73-68)^2}{68} + \frac{(55-54)^2}{54} \\ &= 4.50 + 7.04 + 3.67 + 0.37 + 0.02 = 15.6 \end{aligned}$$

Vi kan forkaste, vi ser at spesielt kategori 1 og 2 (sjelden bruk) har avtatt og at kategori 3 (ukentlig bruk) har økt. (Kategori 4 og 5 – hyppig bruk virker uendret).

Oppgave 4 V16

a) Her er $X \sim N(1000, 200)$ Da blir:

$$P(X < 880) = P(X \leq 880) = G\left(\frac{880 - 1000}{200}\right) = G(-0.60) = 0.2743$$

Deretter får vi:

$$\begin{aligned} P(880 < X < 1360) &= P(X < 1360) - P(X \leq 880) \\ &= P(X \leq 1360) - P(X \leq 880) \\ &= G\left(\frac{1360 - 1000}{200}\right) - G\left(\frac{880 - 1000}{200}\right) \\ &= G(1.80) - G(-0.60) \\ &= 0.9641 - 0.2743 = 0.6898 \end{aligned}$$

b) Vi setter samlet levetid til de 4 brødristerne som $Y = X_1 + X_2 + X_3 + x_4$. Vi må anta uavhengighet, da er $Y \sim N(4 \cdot 1000, \sqrt{4} \cdot 200) = N(4000, 400)$. Sannsynligheten for at samla levetid er mer enn 4250 dager blir:

$$\begin{aligned} P(Y > 4250) &= 1 - G(Y \leq 4250) \\ &= 1 - G\left(\frac{4250 - 4000}{400}\right) \\ &= 1 - G(0.63) \\ &= 1 - 0.7357 = 0.2643 \end{aligned}$$

c) Kravet til garantitida er

$$P(X < k) = P(X \leq k) = G\left(\frac{k-1000}{200}\right) = 0.02$$

Av tabell 2 ser vi at $G(-2.0537) = 0.02$, da blir
$\frac{k-1000}{200} = -2.0537$, som gir $k = 1000 - 2.0537 \cdot 200 = 589.26$.
Garantitiden må settes til 589 dager.

d) Her lar vi $H_0 : \mu = 1000$, altså at forventet levetid er som før. Alternativhypotesa blir $H_1 : \mu > 1000$, vi ønsker å vise at forventet levetid er blitt lengre når vi bruker den nye komponenten.

Forkast H_0 dersom $T = \frac{\bar{X}-1000}{\frac{S}{\sqrt{10}}} \geq k$. Signifikansnivå på 2.5 % gir at k er 0.975 fraktilen i t–fordelinga med $10 - 1 = 9$ frihetsgrader. Tabell 4 gir $k = 2.2622$.

Vi beregner gjennomsnittet i stikkprøven:

$$\bar{x} = \frac{1103 + 894 + 952 + \cdots + 1113}{10} = \frac{10\,907}{10} = 1090.7$$

Vi får $t = \frac{1090.7-1000}{\frac{120.8}{\sqrt{10}}} = 2.3743$. Det betyr at vi har grunnlag til å forkaste H_0. Undersøkelsen vår viser at vi har grunn til å hevde at levetida er blitt lengre.

Oppgave 5 V16

a) $H_0 : p = 0.50$ er situasjonen slik den har vært. $H_1 : p < 0.50$ uttrykker at etter forenklinga i kjøpsprosessen så er det blitt færre som ikke fullfører påbegynt kjøpsprosess.

Vi forkaster H_0 dersom $X \leq k$. Når H_0 er rett vil $X \sim \text{bin}(300, 0.50)$. Da blir $E(X) = np = 300 \cdot 0.50 = 150$ og $\text{Var}(X) = np(1-p) = 300 \cdot 0.50 \cdot 0.50 = 75$. Signifikans kravet gir

$$P_{H_0}(X \leq k) \approx G\left(\frac{k + 0.5 - 150}{\sqrt{75}}\right) = 0.05$$

Tabell 2 gir $G(-1.6449) = 0.05$, da må

$$\frac{k + 0.5 - 150}{\sqrt{75}} = -1.6449$$

$$k = 150 - 0.5 - 1.6449 \cdot \sqrt{75} \approx 135.3$$

Vi forkaster altså H_0 dersom $X \leq 135$.

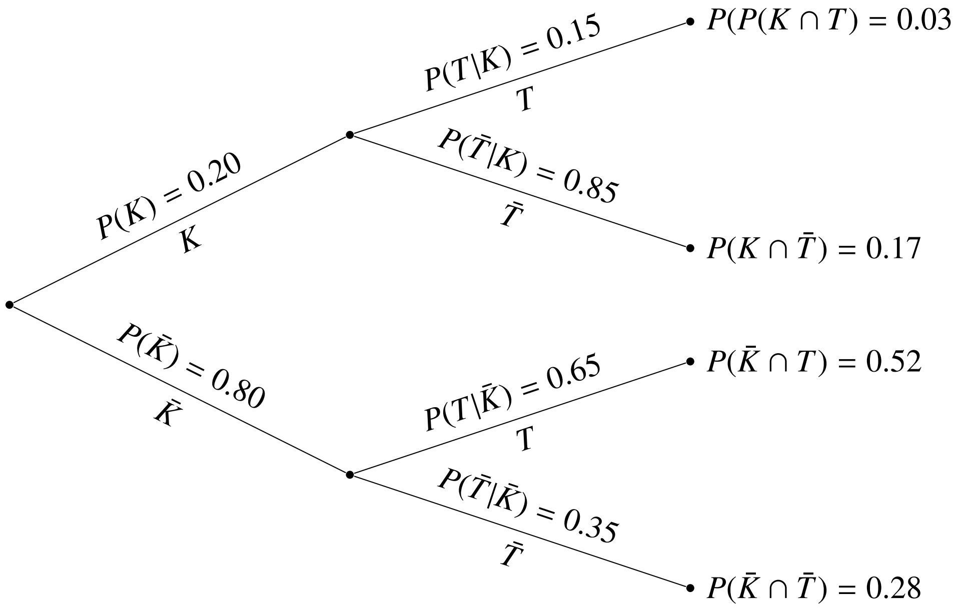
b) Her får vi

$$\begin{aligned} p - \text{verdi} &= P_{H_0}(X \leq 128) \\ &\approx G\left(\frac{128 + 0.5 - 150}{\sqrt{75}}\right) \\ &= G(-2.48) = 0.0066 \end{aligned}$$

Vi ser at begge kravene til å bruke normaltilnærming er oppfylt. Når variansen er så stor som i dette tilfellet vil vi også få godt resultat om vi fraviker fra kravet om at $|z| \leq 2.50$.

Oppgave 6 V16

a) Sannsynlighetstreet ser slik ut:



$$\begin{aligned} P(T) &= P(K \cap T) + P(\bar{K} \cap T) \\ &= P(K)P(T|K) + P(\bar{K})P(T|\bar{K}) \\ &= 0.20 \cdot 0.15 + 0.80 \cdot 0.65 \\ &= 0.55 \end{aligned}$$

b) Her får vi

$$P(K|T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0.03}{0.55} \approx 0.055$$

Oppgave 7 V16

a) X er hypergeometrisk fordelt med $N = 20$, $M = 5$ og $n = 3$. Vi beregner først:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1 \cdot 455}{1140} \approx 0.399$$

Sannsynligheten for at 3 av lånene som er til over pipa blir valgt ut:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{15}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{10 \cdot 1}{1140} \approx 0.009$$

b) Vi får

$$E(X) = n\frac{M}{N} = na = 3 \cdot \frac{5}{20} = 3 \cdot 0.25 = 0.75$$

Deretter

$$\text{Var}(X) = \frac{N - n}{N - 1}na(1 - a) = \frac{20 - 3}{20 - 1} \cdot 3 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \approx 0.503$$

Til slutt

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{0.503\ldots} \approx 0.709$$

Oppgave 8 V16

Vi utvider tabellen

	Skal	Kanskje	Skal ikke	sum	Andel
Jente	58 (61.4)	24 (28.6)	28 (20.0)	110	0.476
Gutt	71 (67.6)	36 (31.4)	14 (22.0)	121	0.524
Sum	129	60	42	231	

Fra tabellen over ser vi at $E \geq 5$ for alle celler, dermed er forutsetningen for testen oppfylt. Vi forkaster H_0 som sier at det er uavhengighet mellom svarkategori og kjønn dersom $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq k$. Når H_0 er sann er χ^2 tilnærmet χ^2–fordelt med $(3 - 1) \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2$ frihetsgrader. Signifikansnivå på 5 % gir at kritisk verdi er 0.95–fraktilen i χ^2 fordelinga med 2 frihetsgrader. Tabell 5 gir $k = 5.99$. Vi beregner

$$\begin{aligned} q &= \frac{(58 - 61.4)^2}{61.4} + \frac{(24 - 28.6)^2}{28.6} + \frac{(28 - 20)^2}{20} \\ &+ \frac{(71 - 67.6)^2}{67.6} + \frac{(36 - 31.4)^2}{31.4} + \frac{(14 - 22)^2}{22} \\ &= 0.188 + 0.740 + 3.200 \\ &+ 0.171 + 0.674 + 2.909 \\ &= 7.88 \end{aligned}$$

Vi forkaster H_0. Fra undersøkelsen vår ser vi at jenter svarer mer nei enn det som er forventet dersom det var uavhengighet og gutter svarer mindre nei enn det vi skulle forvente. For de andre svarkategoriene er det derimot minimale kjønnsforskjeller.

Høst 2016

Oppgave 1 H16

a) Her er $X \sim N(250, 20)$. Da blir:

$$\begin{aligned}
P(X > 215) &= P(X \leq 215) \\
&= G\left(\frac{215 - 250}{20}\right) \\
&= G(-1.75) \\
&= 0.0401
\end{aligned}$$

Videre blir:

$$\begin{aligned}
P(215 < X < 265) &= P(X < 265) - P(X \leq 215) \\
&= P(X \leq 265) - P(X \leq 215) \\
&= G\left(\frac{265 - 250}{20}\right) - G\left(\frac{215 - 250}{20}\right) \\
&= G(0.75) - G(-1.75) \\
&= 0.7734 - 0.0401 \\
&= 0.7333
\end{aligned}$$

b) Vi setter $R = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$. Vi må anta uavhengighet mellom energiinnholdet i de 6 rundstykkene, da blir $R \sim N(6 \cdot 250,\ \sqrt{6} \cdot 20) = N(1500, 20\sqrt{6})$.

$$\begin{aligned}
P(R > 1600) &= 1 - P(R \leq 1600) \\
&= 1 - G\left(\frac{1600 - 1500}{20\sqrt{6}}\right) \\
&= 1 - G(2.04) \\
&= 1 - 0.9793 \\
&= 0.0207
\end{aligned}$$

c) Juice har kaloriinnhold $Y \sim N(120, 10)$. Ninas energiinntak blir da

$$U = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2$$

Forventninga blir

$$\begin{aligned}
E(U) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2) \\
&= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(Y_1) + E(Y_2) \\
&= 250 + 250 + 250 + 120 + 120 \\
&= 990
\end{aligned}$$

Vi må deretter anta at det er uavhengighet mellom energiinnholdet, da blir variansen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(U) &\overset{\text{uavh.}}{=} \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2) \\
&= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) + \mathrm{Var}(Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2) \\
&= 20^2 + 20^2 + 20^2 + 10^2 + 10^2 \\
&= 1400
\end{aligned}$$

Ved uavhengighet er også U normalfordelt og dermed har vi vist at $U \sim N(990, \sqrt{1400})$.

d) Sannsynligheten er

$$\begin{aligned}
P(U < 950) &= P(U \leq 950) \\
&= G\left(\frac{950 - 990}{\sqrt{1400}}\right) \\
&= G(-1.07) \\
&= 0.1423
\end{aligned}$$

e) Her skal vi lage et konfidensintervall på formen $\bar{X} \pm k\frac{S}{\sqrt{n}}$. Her er k lik 0.995 fraktilen i t-fordelinga med $25 - 1 = 24$ f.g. Fra tabell 4 finner vi $k = 2.7969$. Konfidensintervallet blir

$$223.2 \pm 2.7969\frac{30.7}{\sqrt{25}} = 223.2\pm = 223.2 \pm 17.17 = [206.0, 240.4]$$

f) Hypotesene blir $H_0 : \mu = 120$, altså at energiinnholdet er som før. Mens $H_1 : \mu < 120$ er påstanden fra produsenten som vi vil undersøke.

g) Vi forkaster H_0 dersom $T = \frac{\bar{X}-120}{\frac{S}{\sqrt{16}}} < k$ der k er 0.025 fraktilen i t-fordelinga med $16 - 1 = 15$ f.g. Fra tabell 4 finner vi at 0.975 fraktilen er 2.1314, på grunn av symmetri blir testen vår å forkaste H_0 dersom $T \leq -2.1314$. Vi beregner:

$$t = \frac{114.7 - 120}{\frac{5.7}{\sqrt{16}}} = -3.7193$$

Vi forkaster H_0, vår undersøkelse støtter opp under produsentens påstand.

Oppgave 2 H16

a) Mistanken til de som jobber i kantina kan formuleres som at andelen kvinnelige studenter som kjøper lunsj i kantina er mindre enn kvinneandelen blant studentene. Alternativhypotesen blir derfor $H_0 : p < 0.55$ og nullhypotesen $H_1 : p = 0.55$. Standard testobservator i binomisk modell er X, i dette tilfellet antallet kvinner av de 100 tilfeldig valgte studentene.

b) Vi forkaster H_0 dersom $X \leq k$. Krav til signifikansnivå gir

$$P_{H_0}(X \leq k) \approx G\left(\frac{k + 0.5 - 55}{\sqrt{100 \cdot 0.55 \cdot 0.45}}\right) = 0.05$$

Fra tabell 2 har vi at $G(-1.6449) = 0.05$, det gir

$$\begin{aligned}\frac{k + 0.5 - 55}{\sqrt{100 \cdot 0.55 \cdot 0.45}} &= -1.6449 \\ k &= 55 - 0.5 - 1 - 6449\sqrt{100 \cdot 0.55 \cdot 0.45} \\ &= 46.3\end{aligned}$$

Det betyr at vi forkaster H_0 hvis $X \leq 46$.

Oppgave 3 H16

Tabell med forventet antall i de ulike cellene under forutsetning av uavhengighet mellom kjønn og menyvalg

	Meny 1	Meny 2	Meny 3	Sum	Andel
Kvinne	28 (26.2)	23 (22.4)	11 (13.4)	62	0.477
Mann	27 (28.8)	24 (24.6)	17 (14.6)	68	0.523
Sum	55	47	28	130	1.000

Her er antall frihetsgrader $(3-1)(2-1) = 2 \cdot 1 = 2$. Fra tabell 5 finner vi 0.95 fraktilen i χ^2-fordelinga med 2 frihetsgrader, den er 5.99. Vi forkaster altså H_0, som er antakelsen om uavhengighet mellom kjønn og menyvalg, dersom $Q = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \geq 5.99$.
Vi beregner:

$$\begin{aligned}q = &\frac{(28-26.2)^2}{26.2} + \frac{(23-22.4)^2}{22.4} + \frac{(11-13.4)^2}{13.4} \\ &+ \frac{(27-28.8)^2}{28.8} + \frac{(24-24.6)^2}{24.6} + \frac{(17-14.6)^2}{14.6} \\ &= 0.124 + 0.016 + 0.430 + 0.113 + 0.015 + 0.395 \\ &= 1.093\end{aligned}$$

Vi kan ikke forkaste H_0, denne registreringen kan ikke dokumentere at det er avhengighet mellom menyvalg og kjønn.

Oppgave 4 H16

Vi lar A være hendelsen at Per starter dagen med kaffe i kantina og B være hendelsen at Pål starter dagen med kaffe i kantina.

Sannsynligheten for at begge starter dagen med kaffe:

$$P(A \cap B) \overset{\text{uavh.}}{=} P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$$

Sannsynligheten for at minst en av dem starter dagen med kaffe:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$$

Oppgave 5 H16

a) Gjennomsnittet blir

$$\bar{x} = \frac{46 + 7 + \cdots + 54}{9} = \frac{508}{9} \approx 56.4$$

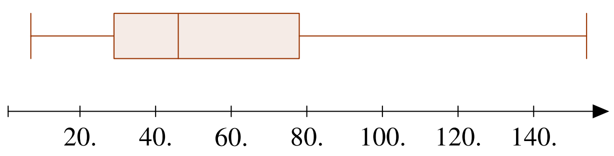
Vi sorterer fra minst til størst:

$$7 \quad 12 \quad 29 \quad 39 \quad 46 \quad 54 \quad 78 \quad 89 \quad 154$$

Medianen er den som står på 5.te plass, altså $m = 46$.

b) Første kvartil er medianen av de 5 minste: $q_1 = 29$. Andre kvartil er medianen av de 5 største: $q_3 = 78$.

Boksdiagrammet ser slik ut



Oppgave 6 H16

Her er $\lambda = 20$ og $t = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$. Da er $\lambda \cdot t = 20 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{3}$. Sannsynligheten for at det ikke kommer noen kunder er:

$$P(X = 0) = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^0}{0!} e^{-\frac{5}{3}} = e^{-\frac{5}{3}} \approx 0.189$$

Oppgave 7 H16

X er binomisk fordelt med $n = 8$ og $p = \frac{1}{4} = 0.25$. Søkt sannsynlighet:

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} 0.25^3 \cdot 0.75^5 = 0.208$$