Eksamensoppgaver - løsninger

Øystein Strøm

28. januar 2018

Innhold

Kapittel 1

Eksamen 2010

1.1

Vi ser at nåverdien av obligasjonen, $PV = B$ består av en rekke av like betalinger og en avsluttende betaling av pålydende. Dermed kan vi skrive PV som

$$PV = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{1.1}$$

der K er de årlige rentebetalinger og M er pålydende. r er markedsrenten og viser altså investorenes alternative investeringsmulighet. Vi ser at K'ene danner en rekke som kan tilnærmes med en annuitet. Vi kan dermed skrive (1.1)

$$PV = \frac{(1+r)^T - 1}{r(1+r)^T} K + \frac{1}{(1+r)^T} M \tag{1.2}$$

I tabell 1.1 er det gjort en del beregninger som man kan støtte seg på i underpunktene.

Rentefaktoren er definert som

$$\text{Rentefaktor} = R = \frac{1}{(1+r)^t} \tag{1.3}$$

Tabell 1.1 Utregning av obligasjonens verdi og dens durasjon når pålydende er 1000, kupongrenten er 6.0% og markedsrenten er 7.5%.

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdi	Andel NV	Dura-sjon
1	60	0.9302	55.81	0.0594	0.0594
2	60	0.8653	51.92	0.0553	0.1105
3	60	0.8050	48.30	0.0514	0.1543
4	60	0.7488	44.93	0.0478	0.1913
5	60	0.6966	41.79	0.0445	0.2225
5	1000	0.6966	696.56	0.7416	3.7078
Summer			939.31	1.0000	4.4458

1.1.1

Tabell 1.1 er obligasjonens nåverdi vist i kolonnen for Nåverdi. Det viser seg altså at

$$PV = B = 939.31$$

Dette er også dens pris.

1.1.2

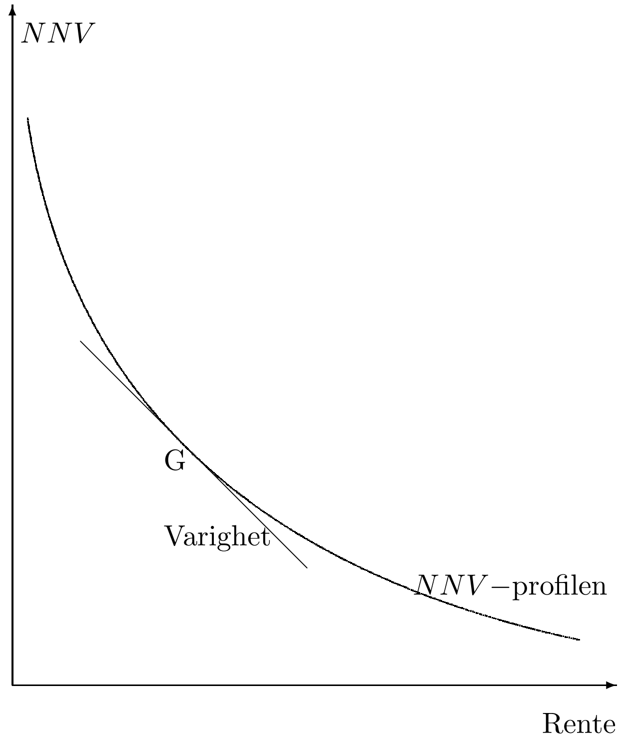
Forholdet mellom varighet og NNV er vist i figur 1.1. Varigheten er altså stigningsforholdet i $NNV-$profilen ved tangeringspunktet G for en gitt rente. Dermed vil selvsagt varigheten endres alt etter hvilket rentenivå man holder til i. For det andre viser det seg at avstanden mellom varigheten og $NNV-$profilen øker med renteendringen. Jo større renteendring, jo større er misforholdet. Dette tar vi hensyn til med konveksitet. Konveksiteten tetter igjen, så å si, hullet mellom varighet og $NNV-$profilen. Mens varigheten representerer den deriverte i punktet, er konveksiteten den annenderiverte, og viser hvilken retning endringen tar, dvs. om endringen øker eller avtar.

Det viser seg at prisendringen på obligasjonen kan skrives:

$$\frac{\partial B}{\partial r}\frac{1}{B} = \frac{-1}{(1+r)}D \tag{1.4}$$

hvor D er *Macaulay's varighet* eller *durasjon* og defineres på følgende måte:

$$D = \frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{tK}{(1+r)^t} + \frac{TM}{(1+r)^T}\right] \tag{1.5}$$



Figur 1.1: Illustrasjon av $NNV-$profilen og varighet: Varighet er stigningsforholdet til $NNV-$profilen for et gitt rentenivå.

En viktig tolkning av varighet er at den viser den gjennomsnittlige tid til forfall for obligasjonen, der årets kontantstrøm viser hvilken vekt hvert enkelt år har. Definer hvert ledd i kontantstrømmen sin nåverdi med $PV(K_t) = K/(1+r)^t$. Multipliser deretter hvert ledd i (1.5) med $1/B$. Dermed har vi:

$$D = \frac{1 \times PV(K_1)}{B} + \frac{2 \times PV(K_2)}{B} + \ldots + \frac{T \times PV(K_T)}{B} + \frac{T \times PV(M_T)}{B} \tag{1.6}$$

Varigheten er regnet ut i tabell 1.1. I tabellen er den siste metoden fra (1.6) brukt. Det viser seg altså at

$D = 4.4458$

1.1.3

Vi tar utgangspunkt i (1.4) og omformer for å få frem enkle termer. I praktiske anvendelser brukes gjerne differanseuttrykket d i stedet for den deriverte ∂. Fra (1.4) har vi:

$$\frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = -\frac{1}{1+r}D \tag{1.7}$$

som er den relative *kursfølsomheten* eller *volatilitet* overfor renteendringer. Den skrives gjerne uten det negative fortegnet. I oppgaven er volatiliteten:

$$\text{Volatilitet} = \frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = \frac{4.4458}{1.075} = 4.1356$$

En manipulering av (1.7) gir obligasjonens omtrentlige prosentvise prisendring:

$$\frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+r}dr = -\text{Volatilitet} \times \text{Renteendring} \tag{1.8}$$

Innsetting gir nå direkte:

$$\frac{dB}{B} = -4.1356 \times 0.01 = -0.041356$$

Den nye prisen blir dermed:

$$B = 939.31 \times (1 - 0.041356) = 900.46$$

Den nye prisen i markedet ventes altså å være <u>904.46</u>. Resultatet er rimelig; når kapitalkostnaden øker, er investorene villige til å betale en lavere pris for obligasjonen enn før renteoppgangen.

1.1.4

Obligasjonen omsettes for 900 i markedet. Vi skal finne avkastningen frem til forfall. Vi skal altså finne obligasjonens avkastning y fra sammenhengen

$$900 = \frac{60}{1+y} + \frac{60}{(1+y)^2} + \frac{60}{(1+y)^3} + \frac{60}{(1+y)^4} + \frac{1060}{(1+y)^5}$$

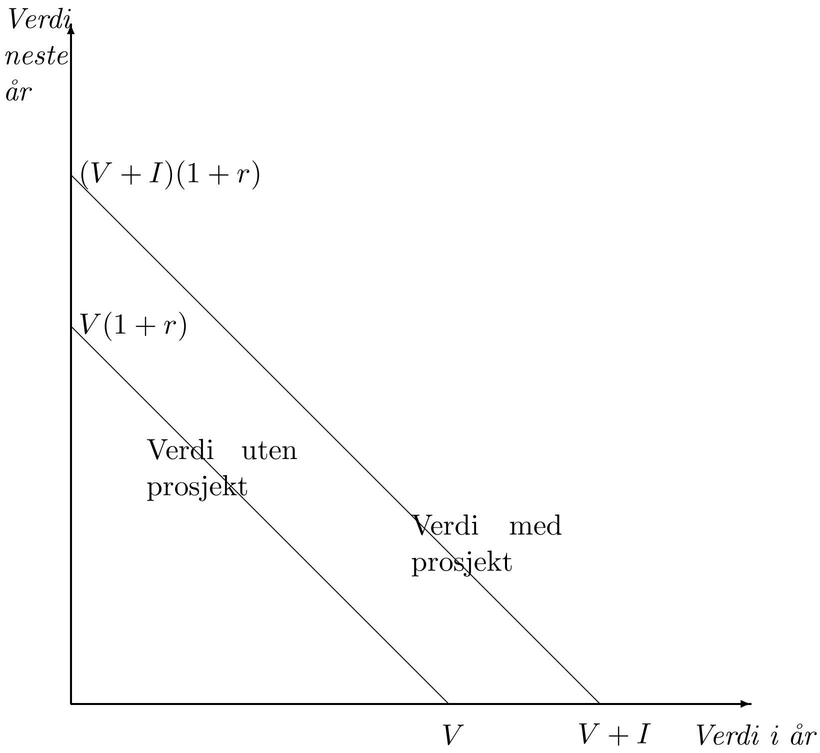
Vi ser dette er det samme som å finne internrenten til uttrykket. Legg merke til at siste periodes kontantstrøm er 1060. Vi bruker prøving og feiling eller kalkulator og finner at $y = 0.0854$, dvs. <u>8.54%</u>.

1.2

1.2.1

Et beslutningskriterium som sier at vi skal velge de prosjekter som har positiv netto nåverdi høres enkelt ut. Hvem sine målsettinger ønsker vi å maksimere? Her går vi ut fra at det er investorenes målsettinger som skal maksimeres. Videre forutsetter vi at investorene mener deres nytte stiger når deres formue tiltar. Men investorene kan jo samtidig ha svært ulike *tidspreferanser*: Noen ønsker å forbruke det de har i dag, andre vil vente. Kan så ulike investorer enes om ett beslutningskriterium, til og med et så enkelt som å velge positive NNV-prosjekter?

Definer V som selskapets verdi og I et investeringsprosjekt. Vi forutsetter at selskapet er 100% egenkapitalfinansiert. Figur 1.2 kan gi et foreløpig svar.



Figur 1.2: Effekten av et prosjekt med positiv netto nåverdi: Forbruket kan økes. Hvor stor andel som forbrukes i år og hvor mye som spares til neste år avgjøres av hver aksjonærs konsumplan

I og med at aksjonærene ikke behøver å samordne sine konsumplaner, blir også beslutningsprosessen enklere. Eierne kan være svært uenige seg imellom om hvordan forbruket skal fordeles over tid, men de vil alle være enige i at positive NNV-prosjekter skal gjennomføres. Det gir alle muligheter for høyere konsum, enten dette skjer med det samme ("pengene brenner i lomma", personen er et "ødeland") eller i kommende perioder ("Onkel Skrue").

Gitt at kapitalmarkedene fungerer, leder dette til vår enkle beslutningsregel: *Velg de prosjektene som har positiv netto nåverdi.* I en bedrift fører dette til et enkelt oppdrag for administrerende direktør. Vi oppsummerer:

1. Økonomidirektøren bør handle i eiernes interesser. Hver aksjonær ønsker tre ting:
   (a) Å bli så rik som mulig, dvs. maksimere nåværende formue.
   (b) Å omforme formue til den konsumplanen eieren foretrekker.
   (c) Å velge risikoprofilen til konsumplanen etter egne ønsker.
2. Eierne behøver ikke administrasjonens råd om hvordan man kan oppnå sin foretrukne konsumplan. Det klarer eierne på egen hånd, forutsatt at kapitalmarkedene fungerer. Videre kan eierne selv avgjøre om de vil satse penger på mer eller mindre risikable prosjekter.
3. Finansdirektøren kan kun hjelpe eierne på en måte, det er ved øke markedsverdien til hver eiers andel. Det gjøres ved å investere i prosjekter med positiv netto nåverdi.

Disse enkle reglene også har implikasjoner for selskapets strategi, for eksempel om selskapet skal velge å investere i ulike typer virksomheter for å spre risikoen, eller om man skal holde seg til et forretningsområde som man kjenner.

1.2.2

Nåverdiregelen er grei, men er den enkel å gjennomføre i praksis? Det kan pekes på fire forhold:

1. Kapitalmarkedene fungerer.
2. Tjenlige lover, offentlige reguleringer og skatter.
3. Prinsipal-agent-problemet: Eiere og ledelse har ikke nødvendigvis sammenfallende interesser.
4. Stakeholder-problemet: Er det riktig å "bare" maksimere eiernes interesser.

Dette kan jo drøftes vidt og bredt.

Kapitalmarkedene. En forutsetning for nåverdiregelen, er at kapitalmarkedet fungerer. Ett av hovedformålene med kapitalmarkedet er å overføre, allokere, verdier fra i dag til senere perioder. Det enkelte individ og den enkelte virksomhet må ha tillit til at oppsparte midler kan brukes i senere perioder. Bankene må være villige til å låne ut penger når pengene trenges.

Høsten 2007 fikk vi erfare at dette ikke er noen selvfølge. Bankene var uvillige til å låne penger til hverandre, og det økonomiske liv i det hele tatt var i ferd med å bli kvalt.

Det offentlige. Lover og det offentliges reguleringer og skattlegging er av avgjørende betydning. Investorer må være trygge på at deres verdier ikke konfiskeres av makthavere. Det må være stabile rammebetingelser for næringsvirksomhet.

Eiere og ledere. Eiere og ledelse har ikke nødvendigvis de samme interesser. Den som skal gjennomføre positive netto nåverdiprosjekter tenker på sine egne interesser såvel som eiernes. Dette er *prinsipal-agent-problemet* som ble beskrevet i Jensen and Meckling (1976).

Stakeholderne. Et annet problem er om maksimering av netto nåverdi er hva som er et riktig beslutningskriterium. Det fremhever jo eiernes interesse og ikke andre gruppers, slik som ansatte eller lokalsamfunnet. Spørsmålet er om man skal maksimere aksjonærverdier eller interessentverdier, de såkalte "shareholder value vs. stakeholder value".

1.3

1.3.1

Det kan vises at verdien V av et selskap uten gjeld er det samme som verdien til et selskap med gjeld, dvs. $V_L = V_U$, når det ikke er skatt i økonomien. Dette er Miller og Modiglianis proposisjon 1 for tilfellet uten skatt:

$$V = \frac{E(EBIT)}{r_T} = \frac{E(EBIT)}{r_U} \tag{1.9}$$

Her er r_T kapitalkostnaden for totalkapitalen og r_U er kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld.

Selskapets verdi er gitt av (1.9). Vi trenger en beregning av overskudd før renter $EBIT$ og av kapitalkostnaden. Vi finner først $EBIT$.

Tabell 1.2 Beregning av overskudd før renter (EBIT)

Salgsinntekter	1500
Variable kostnader	-400
Faste betalbare kostnader	-200
Avskrivninger	-500
EBIT	400

Kapitalkostnaden er gitt i proposisjon av Miller og Modigliani. Kapitalkostnaden for egenkapitalen er altså:

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,\frac{D}{E} \tag{1.10}$$

Når selskapet er gjeldfritt, kan r_U finnes fra kapitalverdimodellen:

$$r_U = r_f + (E\,(r_m) - r_f)\,\beta \tag{1.11}$$

Oppgaven gir opplysninger om at $\beta = 1.25$ når $D = 0.00$. Risikofri rente $r_f = 4.5\%$ og avkastningen på børsen $r_m = 12.5\%$. β er selskapets systematiske risiko.

Innsetting gir nå:

$$k = 4.5 + (12.5 - 4.5)1.25 = 14.50$$

målt i prosent. Vi har altså at $r_U = 14.50\%$.

Selskapets verdi er altså gitt av (1.9). Innsetting av $EBIT$ fra tabell 1.2 og kapitalkostnaden $r_U = 14.50\%$ gir nå selskapets verdi:

$$V = \frac{400}{0.145} = 2759$$

Vi har vist verdien for Dal. Siden selskapets verdi er uavhengig av kapitalstrukturen når det ikke er skatt, vil også Engs verdi være 2.759. Siden $EBIT$ er lik for de to selskapene, inntreffer dette når kapitalkostnadene er like, dvs. når $r_T = r_U$. La oss se nærmere på dette.

Totalkapitalens kostnad er gitt av

$$r_T = r_E\frac{E}{V} + r_D\frac{D}{V} \tag{1.12}$$

Vi finner da først r_E:

$$r_E = 14.5 + (14.5 - 6.0)\frac{0.50}{0.50} = 23.0$$

når gjeldsandelen er 50%. Innsetting i (1.12) gir da:

$$r_T = 23.0 \cdot 0.50 + 6.0 \cdot 0.50 = 14.50$$

Kapitalkostnaden er altså den samme som r_U, dvs. for selskapet uten gjeld. Dermed er også selskapets verdi den samme.

1.3.2

Vi antar nå at vi ikke kjenner verdien til Eng.

De to selskapene Dal og Eng er altså identiske på alle måter untatt når det gjelder deres kapitalstruktur. Dal har samlet egenkapital $E_U = 2.759$, og dette er jo lik verdien av selskapets eiendeler V_U. Eng har gjeld på 50% av selskapets verdi. Selskapets verdi er jo lik summen av gjeld og egenkapital: $E_L + D = V_L$.

Fjell vurderer å investere 10% i Dal eller Eng. I Dal vil han altså betale $0,1 \cdot E_U = 0,1 \cdot V_U$, og han vil motta 10% av selskapets overskudd, $EBIT$. Transaksjonene og betalingene er vist i tabell 1.3.

Tabell 1.3 Strategi 1: Kjøp 10% av Dal

Transaksjon	Investering	Del av overskudd
Kjøp 0.10 av 2,759	$0.10 \cdot 2,750 = 276$	$0.10 \cdot EBIT$
= Kjøp 0.10 av E_U	$= 0.10 \cdot V_U$	

Fjell sammenligner strategien med en annen: Kjøp samme andel av selskapet Eng. Kall dette strategi 2. Renten på Engs gjeld r er 6.0%, og gjelden altså $D = 0.5 \times V_L$. Tabell 1.4 viser nå transaksjoner og betalinger.

Tabell 1.4 Strategi 2: Kjøp 10% av Eng

Transaksjon	Investering	Del av overskudd
Kjøp 0,10 av E_L	$0.10 \cdot E_L = 0.10 \cdot (V_L - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - 0.10 \cdot 0.50 \cdot V_L)$
		$0.10 \cdot (EBIT - r_D)$

Investeringen er altså $0.10 \cdot E_L = 0.10 \cdot (V_L - D)$ siden $E_L = V_L - D$.

1.3.3

Nå prøver Fjell en tredje strategi. Han låner på egen hånd et beløp tilsvarende 10% av Engs lån til 6.00% rente, dvs. $0.1D$ til $r = 0.060$. Deretter bruker Fjell lånebeløpet og egne midler til å kjøpe 10% av Dal, $0.1V_U$. Strategien er vist i tabell 1.5.

Sammenlign nå strategiene 2 og 3. Vi legger merke til at Fjells andel av overskuddet er det samme i strategi 2 og 3, dvs. $0.10 \cdot (EBIT - rD)$. I strategi 2 mottar Fjell sin belønning som en kontantutbetaling på 10% av $(EBIT - rD)$, mens han i strategi 3 får den samme belønning, denne gangen som en kombinasjon av kontantutbetaling på $0.10 \cdot EBIT$ fra Dal minus rentebetalingen på egen hånd, $0.060 \cdot rD$. Nettoutbetalingene er i begge tilfeller den samme.

Tabell 1.5 Strategi 3: Kjøp 10% av Dal med lånte midler

Transaksjon	Investering	Del av overskudd
Lån $0.10D$	$-0.10D$	$-0.10rD$
Kjøp 0.10 av V_U	$0.10 \cdot V_U$	$0.10 \cdot EBIT$
Sum	$= 0.10 \cdot (V_U - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - rD)$

Investeringen ved hver strategi er satt opp i tabell 3.4.

Tabell 1.6 Kostnadene ved strategiene 2 og 3

Strategi 2	Strategi 3
$0.10 \times (V_L - D)$	$0.10 \times (V_U - D)$

Det viser seg altså at det eneste som skiller de to investeringene, er at V_U brukes i strategi 3 mens V_L er i strategi 2. Siden andelen av overskuddet er likt i de to strategiene, må også investeringene som skal til for å skaffe seg tilgang til overskuddene, være like. Det skjer bare når $V_U = V_L$. Altså: siden andelen av overskuddet er likt i de to strategiene må også investeringene være like. Det skjer når selskapenes verdi er like. Dette gir Modigliani and Miller (1958) første proposisjon.

1.4

En *kjøpsopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe et bestemt antall aksjer på et bestemt tidspunkt eller før, til en på forhånd avtalt pris (utøvelsesprisen).

Definisjon 1.1: Kjøpsopsjonen

1.4.1

Vi skal altså bruke den binomiske modellen. Forutsetningene for modellen er følgende:

1. Markedene er perfekte og komplette, dvs. det er ingen arbitrasjemuligheter og alle eiendeler prises. Videre: Ingen transaksjonskostnader, ingen krav til delinnbetaling og ingen skatter. Andeler av eiendeler kan kjøpes.
2. Hver periodes rente r_f og hver periodes positive endring u og negative endring d er kjent.

Vi kaller den positive endringen en oppbevegelse og den negative en nedbevegelse.

Den binomiske opsjonsformelen er dermed:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}c_{1,u} + \frac{u - r_f}{u-d}c_{1,d}\right] = \frac{1}{1+r_f}\left[qc_{1,u} + (1-q)c_{1,d}\right] \quad (1.13)$$

$C_{1,u}$ er kjøpsopsjonens verdi når prisen har gått opp (u), og ned (d) for $c_{1,d}$. u er den positive prisendringen, d den negative. Videre defineres

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u-d} \quad (1.14)$$

q omdanner de to mulige utfallene for opsjonens verdi i hakeparentesen i ligning (1.13) til en "sikkerhetsekvivalent" kontantstrøm. Siden forutsetning 2 gir at prisbevegelsene er faste i hver periode, er også q en fast størrelse uansett tallet på perioder.

1.4.2

I løpet av en periode kan altså aksjen stige til $100 \cdot 1.1 = 110$ eller falle til $100 \cdot 0.95 = 95$. Nå har vi at opsjonene er verdt i periode 1:

$$C_u = \max[100 \cdot 1.10 - 100.0] = 10.00$$

og

$$C_d = \max[100 \cdot 0.95 - 100.0] = 0.00$$

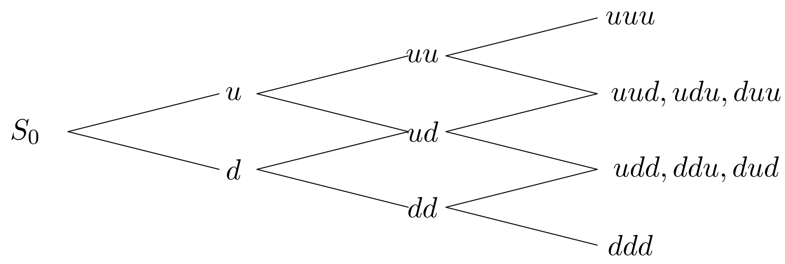
Innsetting i (1.13) gir dermed:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.05)}{0.10-(-0.05)}10.00 + \frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.05)}0.00\right] \\ &= \frac{1}{1.05} \times \frac{0.10}{0.15}10.00 \\ &= 6.35 \end{aligned}$$

Prisen på kjøpsopsjonen i dag er altså 6.35.

1.4.3

Det er nå lettest å bruke den binomiske formelen med de sikkerhetsekvivalente sannsynlighetene q og $1-q$. Først gir vi en oversikt over prisprosessen når vi har tre perioder. Hvor mange muligheter finnes for at aksjekursen kan havne i en av de fire aksjekursene når $T = 3$? C_{uuu} og C_{ddd} kan opplagt bare realiseres på en måte, ved at det enten er bare oppganger eller bare nedganger. C_{uud} kan realiseres på tre måter: $uud = udu = duu$ og C_{udd} har også tre muligheter: $udd = ddu = dud$. Mulighetene er nå illustrert i figur 1.3.



Figur 1.3: Tallet på mulige opp- og nedganger i en binomisk prosess over tre perioder.

Analogt til opsjonsformelen for to perioder har vi altså:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^3}\left[q^3 C_{uuu} + 3q^2(1-q)C_{uud} + 3q(1-q)^2 C_{udd} + (1-q)^3 C_{ddd}\right] \tag{1.15}$$

Vi får altså nå et nytt ledd, siden aksjekursen jo kan bevege seg to ganger ned og en gang opp. Verdiene for opsjonen når $T = 3$ er nå:

$C_{uuu} =$	$\max[100 \cdot 1.10^3 - 100.0] =$	33.10
$C_{uud} =$	$\max[100 \cdot 1.10^2 \cdot 0.95 - 100.0] =$	14.95
$C_{udd} =$	$\max[100 \cdot 1.10 \cdot 0.95^2 - 100.0] =$	0.00
$C_{ddd} =$	$\max[100 \cdot 0.95^3 - 100.0] =$	0.00

Videre trenger vi verdiene for q og $1-q$. Det er enkelt å beregne at $q = 2/3$ og $(1-q) = 1/3$. Dermed har vi for de to positive verdiene C_{uuu}, C_{uud} fra formelen:

$$q^3 C_{uuu} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 33.10 = 9.81$$

$$3q^2(1-q)C_{uud} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} 14.95 = 6.64$$

Innsetting i (1.15) gir dermed:

$$C_0 = \frac{1}{1.05^3}\left[9.81 + 6.64\right] = 14.21$$

Opsjonsverdien øker tydelig med tiden til forfall.

1.4.4

Mens lenger tid til forfall gir <u>flere</u> sjanser til at opsjonen er ITM, gir høyere volatilitet <u>større</u> sjanser. Volatilitet betyr kursfluktuasjon. Jo høyere kursfluktuasjonene er, jo mer verdt vil en positiv endring være. Dermed er også opsjonen mer verdt. Grunnen er at verdier under innløsningskursen har verdi null, verdier over teller med hele sin verdi.

Kapittel 2

Kontinuasjonseksamen vår 2011

2.1

Nåverdien av en risikofri obligasjon med årlige renteutbetaliner er generelt:

$$PV = B = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{2.1}$$

der K er de årlige rentebetalinger og M er pålydende. r er markedsrenten og viser altså investorenes alternative investeringsmulighet. Vi kan forutsette risikofrihet siden dette er statsobligasjoner.

Den høyeste pris jeg ville betale er nåverdien av de fremtidige betalingene.

Tabell 2.1 Utregning av obligasjonens pris

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdi
1	5	0.9390	4.69
2	5	0.8817	4.41
3	5	0.8278	4.14
4	5	0.7773	3.89
5	5	0.7299	3.65
5	100	0.7299	72.99
Sum			93.77

KS er kontantstrøm. Rentefaktoren er definert som

$$\text{Rentefaktor} = R = \frac{1}{(1+r)^t} \tag{2.2}$$

Jeg ville altså betale maksimalt 93.77 for en obligasjon med de kjennetegn gitt i oppgaven.

2.1.1

Hvis markedsrenten var 5%, ville jeg være villig til å betale 100,00 for obligasjonen. Markedsrente og kupongrente vil nå være like. Den kupongrente som brukes for å skape rentekontantstrømmen i obligasjonen er altså den samme som brukes for å diskontere kontantstrømmen tilbake til dagens verdi. De to utligner hverandre og vi står tilbake med obligasjonens pålydende verdi, 100.00.

2.1.2

Når det ikke betales renter, har vi en nullkupongobligasjon, og dagens verdi er dermed:

$$PV = \frac{M}{(1+r)^T} \tag{2.3}$$

Spørsmålet er hva varigheten er for en slik obligasjon. *Macaulay's varighet* eller *durasjon* D kan generelt defineres på følgende måte:

$$\begin{aligned} D &= \left[\frac{1K}{(1+r)^1} + \frac{2K}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{TK}{(1+r)^T} + \frac{TM}{(1+r)^T}\right]\frac{1}{B} \\ &= \frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{tK}{(1+r)^t} + \frac{TM}{(1+r)^T}\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

hvor vi skriver B (pris) i stedet for PV for å forenkle og for å understreke at dette er en markedspris. Nå faller altså alle K-leddene bort, dvs. vi står tilbake med:

$$D = \frac{1}{B}\frac{TM}{(1+r)^T}$$

men siden B for en nullkupong-obligasjon er definert ved:

$$B = \frac{M}{(1+r)^T}$$

ender det med at

$$D = T \tag{2.5}$$

for en nullkupongobligasjon. Varigheten øker altså med tid til forfall. Varigheten til vår obligasjon er dermed 5.

2.2

2.2.1

Først vises definisjonene av forventet avkastning og standardavvik for enkeltaksjene, og for korrelasjonskoeffisienten mellom dem.

Forventet avkastning er definert ved

$$E\left(r_j\right) = p_1 r_{j1} + p_2 r_{j2} + \ldots + p_n r_{jn} \tag{2.6}$$

der p_i er sannsynligheten for at tilstand i vil inntreffe, $i = 1, \ldots, n$.

Definisjonen på standardavvik er

$$\sigma_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(r_{ji} - E\left(r_j\right)\right)^2} \tag{2.7}$$

Korrelasjonskoeffisienten ρ_{12} er definert ved:

$$\text{Korrelasjonskoeffisient} = \frac{\text{Kovarians}}{\text{Standardavvik(1)} \times \text{Standardavvik(2)}}$$

eller i symboler

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Som det går frem av formlene, må vi gjennom beregning av kovariansen.

Beregning av forventning og varians til aksjene er gitt i tabellene nedenfor. Legg merke til at avkastningene er i prosentform.

Tabell 2.2 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 1

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Høy	0.2	-30	-6	-38	1444	288.8
Middels	0.5	10	5	2	4	2
Lav	0.3	30	9	22	484	145.2
		$E(r_1) =$	8		$\sigma_1^2 =$	436.0
					$\sigma_1 =$	20.9

Tabell 2.3 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 2

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Høy	0.2	10	2	5	25	5
Middels	0.5	15	7.5	10	100	50
Lav	0.3	-15	-4,5	-20	400	120
		$E(r_2) =$	5		$\sigma_2^2 =$	175
					$\sigma_2 =$	13.2

I tabellene til Prosjekt 1 og 2 er

$$\text{Avvik}_i = (\text{Avkastning}_i - \text{Forventet avkastning})$$

eller i symboler

$$\text{Avvik}_i = r_{1i} - E(r_1)$$

for aksje 1 og tilsvarende for aksje 2. Det gjenstår å understreke at i antyder hvilken tilstand man er i, slik at i tar en av verdiene (Høy, Middels, Lav)

Beregningen av kovarians er vist i tabell (2.4).

Tabell 2.4 Beregning av kovarians mellom aksje 1 og 2

Tilstand	Sanns.	Avv1	Avv2	Prod
Høy	0.2	-38	5	-38.0
Middels	0.5	2	10	10.0
Lav	0.3	22	15	-132.0
			$\sigma_{12} =$	-160.0

Korrelasjonen mellom aksjene er dermed:

$$\rho_{12} = \frac{-160}{20.9 \cdot 13.2} = -0.5792$$

2.2.2

Porteføljens varians σ_p^2 er gitt ved:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \tag{2.8}$$

der w er andelen av investeringen plassert i 1, $(1-w)$ er andelen av investeringen plassert i 2. Vi ønsker å minimere denne variansen og finne den såkalte minimum-varians-porteføljen (MVP). Vi kan gå frem på to måter:

1. Vi kan regne ut mange verdier av σ_p^2 for dermed å peile oss inn på den laveste verdien.

2. Vi kan derivere σ_p^2 med hensyn på w. Minimum vil finnes der hvor den deriverte er lik null.

Følger vi den første fremgangsmåten, må vi regne ut flere verdipar av avkastning og risiko for gitte porteføljevekter. Vi vet likevel at når $w = 1.0$, er $E(r_p) = 5.0$ og $\sigma_p = 13.2$, og når $w = 0.0$, er $E(r_p) = 8.0$ og $\sigma_p = 20.9$. Det gir oss to punkter. Det er også lett å finne et tredje punkt, som er gitt av den likeveide porteføljen, dvs. $w = (1-w) = 0.5$. Da har vi forventet avkastning:

$$E(r_p) = 0.5(8.0 + 5.0) = 6.5.$$

Risikoen har vi fra kvadratroten av (2.8):

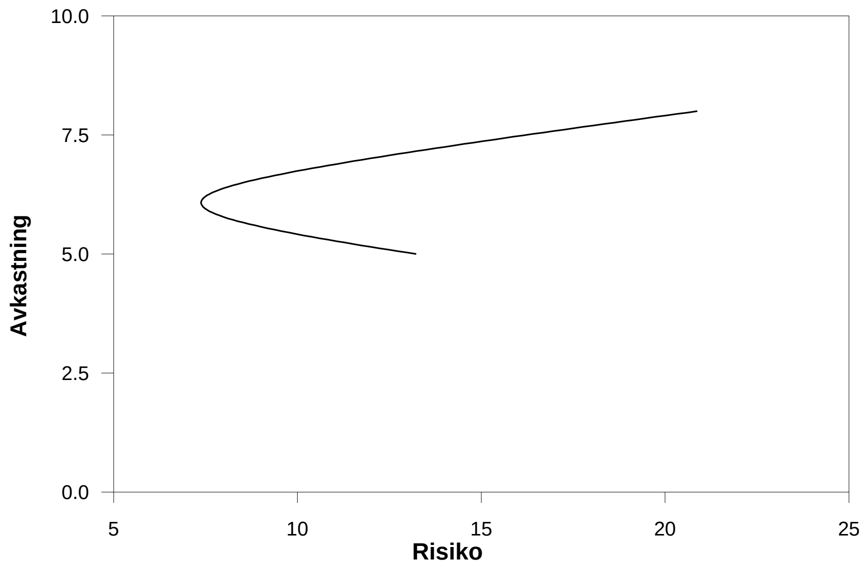
$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{0.5^2 \cdot 436 + 0.5^2 \cdot 175 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-160)} \\ &= 0.5\sqrt{436 + 175 - 320} = 0.5 \cdot 17.06 = 8.53\end{aligned}$$

I neste steg ville vi velge en $w > 0.50$ for å se om risikoen øker eller faller. Faller den, prøves en enda lavere w, øker den, prøves en høyere w. Slik kan vi etter hvert peile oss inn til MVP. Tar vi alle punkter for w fra 0.0 til 1.0, får vi en porteføljefront som er vist i figur 2.1:

La oss nå bruke analyse for å finne den porteføljevekten w som definerer MVP. Det er mest liketilt å gjøre dette med porteføljevariansen. Begynn med å skrive om uttrykket for variansen:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w\sigma_{12} - 2w^2\sigma_{12}\end{aligned}$$

Her har vi altså brukt kovariansen i stedet for korrelasjonskoeffisienten. Den



Figur 2.1: Porteføljefronten for oppgave 2

deriverte av denne er

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12} - 4w\sigma_{12} = 0|\frac{1}{2} \\ &= w\sigma_1^2 + w\sigma_2^2 - 2w\sigma_{12} = \sigma_2^2 - \sigma_{12}\end{aligned}$$

som impliserer at

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{2.9}$$

Bruker vi denne formelen i oppgaven, har vi at

$$w = \frac{175 - (-160)}{436 + 175 - 2(-160)} = 0.3598$$

Vi ville altså sette ca. 36% av formuen i aksje 1 og resten i aksje 2, hvis vi ønsket å oppnå MVP.

Det viser seg at porteføljens standardavvik i MVP er

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left(0.3598^2 \cdot 436 + (1-0.3598)^2 \cdot 175 + 2 \cdot 0.3598 \cdot (1-0.3598) \cdot (-160)\right)^{0.5} \\ &= (56.45 + 71.72 - 73.71)^{0.5} \\ &= (54.46)^{0.5} \\ &= 7.38\end{aligned}$$

Den lavest mulige porteføljevariansen er dermed 7.38.

2.2.3

Systematisk risiko er den delen av total risiko som investorene ikke kan fjerne ved å diversifisere sin portefølje. Risikoen er systematisk i den forstand at den berører hele økonomien. Ingen slipper unna. Den diversifiserbare risikoen kalles også for bedriftsspesifikk risiko.

Systematisk risiko er den relevante risiko i kapitalverdimodellen. Siden annen risiko kan diversifiseres, vil ikke investorene oppnå en kompensasjon for den bedriftsspesifikke risikoen de påtar seg.

Ønsker man å illustrere dette nærmere, kan figuren for sammenhengen mellom total risiko og antall eiendeler i porteføljen brukes. Videre kan det vises at den relevante risikoen for et prosjekt dreier seg om kovariansen mellom prosjektet og alle andre eiendeler i økonomien.

2.2.4

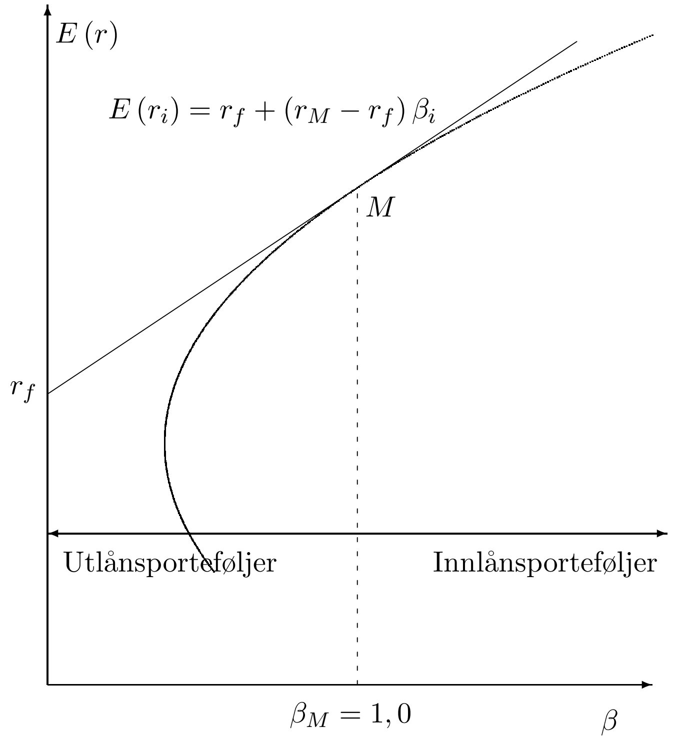
> *Polonius til sin sønn Laertes:*
>
> Neither a borrower nor a lender be,
> For loan oft loses both itself and friend,
> And borrowing dulls the edge of husbandry.
>
> Hamlet Act 1, scene 3

Polonius tror altså på KVM. Denne er illustrert i figur 2.2 som også viser effisiensgrensen for risikable eiendeler. KVM innebærer at markedslinjen vil tangere denne effisiensgrense og skape en ny effisiensgrense, en rett linje mellom den risikofrie avkastningen r_f og tangeringspunktet på effisiensgrensen M.

Polonius sitt råd er altså å tilpasse seg i M, her vil Laertes hverken låne penger til andre (til venstre for M) eller låne penger av andre (til høyre for M).

2.3

1. Hva er aksjekursen for de tre forslagene?
2. Hvilken utbyttepolitikk vil aksjonærene foretrekke?



Figur 2.2: Markedslinjen er effisiensgrense når en risikofri avkastning inkluderes

Oppgaven er en anvendelse av Miller og Modigliani's teori om at et selskaps dividendepolitikk ikke spiller noen rolle for selskapets verdi.

Det forutsettes at kapitalmarkedene er perfekte og at betalingsmåten ikke spiller noen rolle.

Rennren skaper altså en fri kontantstrøm (K) på 48 i overskuelig fremtid. Verdien av disse er da:

$$PV(K) = \frac{48}{0.12} = 400.00$$

Inkludert de 20 i ledig likviditet betyr dette at selskapet er verdt $EV = 420.00$, der EV er selskapsverdi eller "enterprise value".

2.3.1

Forslag 1: Utbytte

Hva er aksjekursen dersom den ledige likviditeten utbetales som utbytte?

Utbetalingen av 2.00 i ekstraordinært utbytte vil ikke gå ut over kapasiteten til å betale dividende i fremtiden. Med en årlig $K = 48$ betyr dette et utbytte pr. aksje på 4,80. Inkludert det ekstraordinære utbyttet er dermed aksjekursen:

$$
\begin{aligned}
S_{med} &= \text{Ekstraordinært utbytte} + PV(\text{Fremtidige utbytter}) \\
&= 2.00 + \frac{4.80}{0.12} = 42.00
\end{aligned}
$$

S_{med} antyder at prisen i dag inkluderer det ekstraordinære utbyttet. Det er denne prisen som er relevant i sammenligningen med andre alternativer. Vi kan også beregne aksjekursen S_{ex} dagen etter utbetalt ekstraordinært utbytte. Den vil da selvsagt være $S_{ex} = 40.00$.

Forslag 2: Tilbakekjøp av aksjer

Hva om styret i stedet besluttet å bruke de ledige 20 til å kjøpe tilbake aksjer? Aksjekursen er altså 42.00, og man kan dermed kjøpe tilbake

$$\text{Tilbakekjøpte aksjer} = \frac{20.000.000}{42.00} = 476.190$$

Gjenværende aksjer i selskapet er altså nå 10 millioner fratrukket 476,190 som er 9,523,810. Det fremtidige utbyttet pr. aksje blir dermed:

$$\text{Utbytte pr. aksje} = \frac{48.00}{9.523810} = 5.04$$

som gir aksjekursen

$$S_{tilbakekjp} = \frac{5.04}{0.12} = 42.00$$

Tilbakekjøpet gir altså den samme aksjekursen før utdeling som et ordinært utbytte.

Forslag 3: Utstedelse og høyt utbytte

Fra neste år kan altså Rennren betale et utbytte på 4.80 pr. aksje. Hva om man ønsker å betale dette beløpet allerede i dag? Man mangler altså 28 millioner for å klare det. Disse kan hentes enten fra tilsvarende lavere investeringer eller fra innhenting av ny kapital. Investeringene har positiv netto nåverdi, må vi forutsette. De ligger bla. til grunn for antatte utbyttebetalinger. For ikke å ødelegge aksjonærverdier, må ny kapital hentes inn gjennom utstedelse av nye aksjer.

Med en aksjekurs på 42.00 kan Rennren selge

$$\text{Nyutstedte aksjer} = \frac{28,000,000}{42.00} = 666,667,$$

dvs. selskapet har nå 10,666,667 aksjer. Utbyttet på disse aksjene vil i fremtiden være

$$\text{Utbytte pr. aksje} = \frac{48.00}{10.666667} = 4.50$$

Aksjekursen vil nå være

$$S_{med} = 4.50 + \frac{4.50}{0.12} = 42.00$$

Igjen er virkningen på aksjekursen den samme som for de andre alternativene.

2.3.2

Hva vil aksjonærene foretrekke? Siden aksjekursen er den samme i dag uansett hvilket forslag man lander på, vil vi vente at investorene ikke bryr seg om hvilket forslag som velges. Vi kan sjekke om dette gjelder for aksjonærer med ulike preferanser.

Se først på forslag 1: Betal utbytte. Anta en aksjonær har 4000 aksjer og ikke handler i aksjen. Etter utbyttebetalingene vil vedkommende sitte igjen med

Aksjer	$40.00 \times 4,000 =$	160,000
Utbytte	$2.00 \times 4,000 =$	8,000
Til sammen		168,000

Velges tilbakekjøp, har investoren

$$\text{Aksjer} = 42.00 \times 4,000 = 168,000$$

Det samme beløpet vil fremkomme hvis man velger forslag 3. De tre forslagene er også på denne måten likeverdige.

Anta nå at en aksjonær foretrekker tilbakekjøp, men at forslag 1 er vedtatt. Aksjonæren kan da kjøpe nye aksjer for de 8,000 i utbytte. Det gir $8,000/40.00 = 200$ nye aksjer. Verdien av disse og de gamle er:

$$\text{Aksjer} = 40.00 \times 4,200 = 168,000$$

Antar vi i stedet at tilbakekjøp ble vedtatt, men at aksjonæren ønsker en kontantutbetaling på 4,000. Da må det selges $4,000/42.00 = 95.24$ aksjer. Vi runder av til 95, slik at investoren nå sitter igjen med 3,905 aksjer og en kontantbeholdning på 4,000. Verdien av dette er da:

Aksjer	$42.00 \times 3,905 =$	164,010
Kontanter	$42.00 \times 95.00 =$	3,990
Til sammen		168,000

Aksjonæren kan altså på egen hånd omgjøre enhver beslutning om utbytte eller tilbakekjøp til å passe med egne konsum- og spareplaner.

2.4

Oppgaven tester put-call-pariteten:

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f}X = P_0 + S_0 \tag{2.10}$$

2.4.1

Vi bruker altså diskret diskontering i (A.16), dvs. jeg bruker 1/1.10. Innsetting i (A.16) gir:

$$\begin{aligned} 1.00 + \frac{55.00}{1.10} &= 7.00 + 44.00 \\ 51.00 &= 51.00 \end{aligned}$$

Put-call-pariteten er altså oppfylt, og det finnes ingen handlestrategi som kan gi en risikofri arbitrasjegevinst.

2.4.2

Nå er $P_0 = 6.00$. Fra forrige deloppgave vet vi nå at pariteten ikke er oppfylt. Vi kan kjøpe den billige salgsopsjonen og en aksje i dag og finansiere med lån og utstedelse av en kjøpsopsjon. Vi har dermed situasjonen i tabell 2.5.

Tabell 2.5 Realisering av risikofri arbitrasjegevinst

Handlinger i dag $T = 0$	Betalinger
Kjøp aksje, betal S_0	-44.00
Kjøp salgsopsjon, betal P_0	-6.00
Utsted en kjøpsopsjon, motta C_0	1.00
Ta opp lån $X/1.1$	50.00
Samlet kontantstrøm $t = 0$	1.00

Arbitrasjegevinsten på 1.00 realiseres i dag. Samtidig sikrer (A.16) at kontantstrømmen ved forfall er lik null. Vi tjener penger i dag og betaler ikke noe ved forfall.

Kapittel 3

Eksamen 2011

3.1

3.1.1

Utgangspunktet er dividendemodellen som gir en kapitalkostnad som, med forbehold om konstant vekst i utbyttet, er:

$$r_E = \frac{Div_1}{S_0} + g \tag{3.1}$$

g er altså vekstraten i dividendeutbetalingene. I denne oppgaven er $g = 0$. Det viser seg at $g = (S_1 - S_0)/S_0$, eller at veksthastigheten i dividendeutbalingene er lik veksttakten i aksjens verdi.

Vi kan bruke eksemplet vårt med $g = 0\%$. Da er kapitalkostnaden:

$$r_E = \frac{8}{64} + 0.00 = 0.125$$

Kapitalkostnaden er altså 12.5%.

3.1.2

Vi skal finne dagens aksjekurs S_0. Fra (3.1) ser vi at kursen er:

$$S_0 = \frac{Div_1}{r_E - g} \tag{3.2}$$

Hva om dividenden er 4? Driftsresultatet kan deles ut til aksjonærene som utbytte eller det kan holdes tilbake i bedriften, dvs. det inngår i selskapets egenkapital. **Utbytteandelen** er da årets utbytte pr. aksje delt på årets driftsresultat pr. aksje. Vi har altså:

$$\text{Utbytteandel} = \frac{Div_t}{EPS_t} \tag{3.3}$$

der

$$EPS_t = \frac{\text{Driftsresultat}_t}{\text{Antall aksjer}_t} \tag{3.4}$$

Resten av hver aksjes driftsresultatet er da **tilbakeholdsandelen**:

$$\text{Tilbakeholdsandel} = 1 - \text{Utbytteandel} = 1 - \frac{Div}{EPS} \tag{3.5}$$

Vi har da:

$$\text{Utbytteandel} = \frac{4}{8} = 0.50$$

som jo også er tilbakeholdsandelen.

Vi har videre at dersom selskapet velger å holde utbytteandelen fast på 50%, blir veksthastigheten i utbyttebetalingene g den samme som veksthastigheten i driftsresultatet. Det betyr altså at

$$g = \left(1 - \frac{Div}{EPS}\right) \times \text{Avkastning på ny investering} \tag{3.6}$$

I oppgaven:

$$g = 0.50 \cdot 0.15 = 0.075$$

Aksjekursen er da, når vi bruker (3.2):

$$S_0 = \frac{4}{0.125 - 0.075} = 80.00$$

Bedriften bør altså holde investeringsmidler tilbake og investere i virksomheten. Vi ser at dette er en enkel anvendelse av internrenteprinsippet. Siden internrenten på prosjektet (15%) er høyere enn eiernes kapitalkostnad (12.5%), bør bedriften investere i det gode prosjektet.

3.1.3

Vi bruker de samme formlene som i forrige delspørsmål, men har nå:

$$g = 0.50 \cdot 0.10 = 0.05$$

Aksjekursen er da, når vi bruker (3.2):

$$S_0 = \frac{4}{0.125 - 0.05} = 53.33$$

dvs. aksjekursen synker i forhold til utgangspunktet. Selskapet bør ikke investere, men heller betale hele driftsresultatet ut som utbytte. Eierne har bedre prosjekter enn det bedriften har.

3.2

3.2.1

Dette er Miller og Modigliani i et perfekt kapitalmarked. Dette inkluderer

1. Alle investorer har perfekt informasjon om markedsmulighetene.
2. Alle kan låne til samme rente for samme risiko.
3. Det er ingen transaksjonskostnader.
4. Alle selskapers egenkapital og gjeld er fritt omsettelige via aksjer og obligasjoner.

MM viser at:

PROPOSISJON 3.1 (MM 1 (Ingen skatter))**.** Verdien til et selskap uten gjeld er det samme som verdien til et selskap med gjeld, dvs. $V_U = V_L$, slik at $E_U = E_L + D$:

$$V = \frac{E(EBIT)}{r_A} = \frac{E(EBIT)}{r_U} \tag{3.7}$$

Dette kan vises ved vurdering av tre strategier en investor I kan velge, investere i U eller L, eller investere i U med et eget privat lån. I er på utkikk etter arbitrasjemuligheter. Forutsett at I vurderer å investere 10% i U. Han vil altså betale $0.1 \cdot E_U = 0.1 \cdot V_U$, og han vil motta 10% av selskapets kontantstrøm, $EBIT$. Siden modellen ikke inkluderer skatter, og selskapene lever evig, men har ingen vekst, er $EBIT$ det samme som kontantstrøm. Transaksjonene og betalingene er vist i tabell 3.1

Tabell 3.1 Strategi 1: Kjøp 10% av U

Transaksjon	Investering	Del av $EBIT$
Kjøp 0.10 av 500	$0.10 \cdot 500 = 50$	$0.10 \cdot EBIT$
= Kjøp 0.10 av E_U	$= 0.10 \cdot V_U$	

I sammenligner strategien med en annen: Kjøp samme andel av selskapet L. Renten på Ls gjeld r_D er 5%, og gjelden altså $D = 250$. Tabell 3.2 viser nå transaksjoner og betalinger.

Tabell 3.2 Strategi 2: Kjøp 10% av L

Transaksjon	Investering	Del av $EBIT$
Kjøp 0.10 av E_L	$0.10 \cdot E_L = 0.10 \cdot (V_L - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - 0.05 \cdot 250)$
		$= 0.10 \cdot EBIT - 1.25$
		$= 0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$

I tabellen er $EBIT$ driftsresultat før renter, som altså er kontantstrømmen i dette tilfellet. Investeringen er altså $0.10 \cdot E_D = 0.10 \cdot (V_L - D)$ siden $E_D = V_L - D$.

Nå prøver I en tredje strategi. Han låner på egen hånd et beløp tilsvarende 10% av Ls lån til 5% rente, dvs. $0.1D$ til $r_D = 0.05$. Lånerenten er altså i oppgaven forutsatt å være lik for bedrifter og investorer, og utlånsrenten er den samme som innlånsrente. Deretter bruker I lånebeløpet og egne midler til å kjøpe 10% av U, $0.1V_U$. Strategien er vist i tabell 3.3.

Tabell 3.3 Strategi 3: Kjøp 10% av U med lånte midler

Transaksjon	Investering	Del av $EBIT$
Lån $0.10D$	$-0.10D$	$-0.10 \cdot r_D D$
		$=-0.10 \cdot 0.05 \cdot 250 = -1.25$
Kjøp 0.10 av V_U	$0.10 \cdot V_U$	$0.10 \cdot EBIT$
Sum	$= 0.10 \cdot (V_U - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$

Sammenlign nå strategiene 2 og 3. Investering og kontantstrøm ved hver strategi er satt opp i tabell 3.4.

Vi legger merke til at Is andel av kontantstrømmen er det samme i strategi 2 og 3, dvs. $0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$. I strategi 2 mottar I sin belønning som en kontantutbetaling på 10% av $(EBIT - r_D D)$, mens han i strategi 3 får den samme belønning, denne gangen som en kombinasjon av kontantutbetaling på $0.10 \cdot EBIT$ fra U minus rentebetalingen på egen hånd, $0.10 \cdot r_D D$. Nettoutbetalingene er i begge tilfeller den samme.

Tabell 3.4 Kostnadene ved strategiene 2 og 3

	Strategi 2	Strategi 3
Investering	$0.10 \times (V_L - D)$	$0.10 \times (V_U - D)$
Kontantstrøm	$0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$	$0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$

Det viser seg altså at det eneste som skiller de to investeringene, er at V_U brukes i strategi 3 mens V_L er i strategi 2. Siden kontantstrømmene er like for I i de to strategiene, må også investeringene som skal til for å skaffe seg tilgang til kontantstrømmene, være like etter loven om en pris. Det skjer bare når $V_U = V_L$. Altså: Siden andelen av overskuddet i de to bedriftene gir en lik kontanstrølm for investoren i de to strategiene må også investeringene være like. Det skjer når selskapenes verdi er like. Dette gir Modigliani and Miller (1958, 1963) første proposisjon, se deres oppsummering i proposisjon 3.1.

3.3

3.3.1

3.3.2 Totalkapitalmetoden

Metoden går i korthet ut på å diskontere (forventede) frie kontantstrømmer K_t i alle perioder med kravet til avkastning for totalkapitalen. Vi har dermed generelt verdien av de gjenværende kontantstrømmer ved prosjektets begynnelse:

$$V_0^L = \sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1 + r_{wacc})^t} \tag{3.8}$$

Kapitalkostnaden r_{wacc} er definert som

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + (1 - \tau_c) \frac{D}{E+D} r_D \tag{3.9}$$

Egenkapitalen E og gjelden D begge er markedsverdier. r_{wacc} er altså en veid sum av kravene til avkastning fra de to hovedinvestorene i selskapet, eierne og långiverne. Ut fra tallene i oppgaven er dermed kapitalkostnaden:

$$r_{wacc} = \frac{800}{1300} \cdot 10.00 + 0.72 \cdot \frac{500}{1300} \cdot 5.00 = 7.54$$

Fri kontantstrøm K_t er beregnet i tabell 3.5.

Tabell 3.5 Beregning av fri kontantstrøm for prosjekt K etter totalkapitalmetoden

	0	1	2	3	4
Salg		90.00	112.50	123.75	136.13
Solgte varers kostnad		-22.50	-28.13	-30.94	-34.03
Bruttofortjeneste		67.50	84.38	92.81	102.09
Driftsutgifter		-36.00	-45.00	-49.50	-54.45
Avskrivning		-20.00	-20.00	-20.00	-20.00
EBIT		11.50	19.38	23.31	27.64
Bedriftsskatt 28%		-3.22	-5.43	-6.53	-7.74
EBT		8.28	13.95	16.79	19.90
Avskrivning		20.00	20.00	20.00	20.00
Investeringer	-80.00				
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Fri kontantstrøm	-80.00	28.28	33.95	36.79	39.90

Innsetting i (3.8) gir prosjektverdien:

$$V_0^L = \frac{28.28}{1.0754} + \frac{33.95}{1.0754^2} + \frac{36.79}{1.0754^3} + \frac{39.90}{1.0754^4} = \underline{115.07}$$

Verdien av de fremtidige kontantstrømmene V_0^L er altså 115.07. Selskapet bør gjennomføre prosjektet siden $NNV = 115.07 - 80.00 = 35.07 > 0$.

Totalkapitalmetoden bygger på to viktige forutsetninger:

- Gjeldsandelen holdes fast over prosjektets levetid.
- Risikoen i prosjektet er på linje med risikoen til selskapet som helhet.

3.3.3 Justert nåverdi

Justert nåverdi (JNV) deler opp fordelene ved investeringen og finansiering hver for seg:

$$JNV = V^U + NV(\text{Renteskattefordel}) \tag{3.10}$$

Rentekattefordelen defineres i MM-modellene som $\tau_c \cdot D$, men her kreves en modifisering fordi selskapets absolutte gjeld ikke er konstant over prosjektets levetid.

Diskonter den frie kontantstrømmen med kapitalkostnaden til et gjeldfritt selskap. Dette er jo det samme som r_{wacc} uten skattejustering, dvs:

$$r_U = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_{wacc} \text{ før skatt} \tag{3.11}$$

Dette er også det samme som avkastningskravet til prosjektets eiendeler, eller prosjektets forretningsrisiko. Dermed:

$$r_U = \frac{800}{1300} \cdot 10 + \frac{500}{1300} \cdot 5 = 8.08$$

Investeringsdelen til prosjektet har dermed verdien

$$V_U = \frac{28.28}{1.0808^1} + \frac{33.95}{1.0808^2} + \frac{36.79}{1.0808^3} + \frac{39.90}{1.0808^4} = 113.62$$

Vi må også finne nåverdien av renteskattefordelen. Rentene er selvsagt gitt av

$$\text{Renter betalt i år } t = r_D \cdot D_{t-1} \tag{3.12}$$

hvor gjeldskapasiteten D_t er definert ved

$$D_t = d \cdot V_t^L \tag{3.13}$$

Her er d målsettingen om gjeldsandel og V_t^L er prosjektets gjenværende nåverdi på tidspunkt t. Man kan tenke på V_t^L som prosjektets salgsverdi på tidspunkt t. Vi har funnet at $V_0^L = 115,07$. Vi må også finne V_t^L på de andre tidspunktene i prosjektets levetid. Prosjektets gjenværende nåverdi på hvert tidspunkt t kan ta utgangspunkt i siste året og arbeide seg fremover. Den neddiskonterte verdien i hver periode må jo være lik neste periodens kontantstrøm og V_t^L:

$$V_t^L = \frac{K_{t+1} + V_{t+1}^L}{1 + r_{wacc}} \tag{3.14}$$

Den målsatte gjeldskapasiteten:

$$d = \frac{500}{1300} = 0.38$$

Dermed:

Dermed er prosjektverdien vurdert ved hjelp av JNV:

$$V^L = V^U + NV(\text{Renteskattefordel}) = 113.62 + 1.45 = 115.07$$

altså det samme som ved totalkapitalmetoden.

Tabell 3.6 Gjeldskapsitet og renteskattefordel i Auk gitt målsetting om 5/13 gjeldsandel

	0	1	2	3	4
Fri kontantstrøm	-80.00	28.28	33.95	36.79	39.90
Gjenværende verdi	115.07	95.46	68.71	37.11	0.00
Gjeldskapasitet	44.26	36.72	26.43	14.27	0.00
Renter 5%		2.21	1.84	1.32	0.71
Skattefordel		0.62	0.51	0.37	0.20
NV(skattefordel)	1.45				

3.3.4 Egenkapitalmetoden

Egenkapitalmetoden går ut på å se prosjektverdien utelukkende fra eiernes ståsted. Analysen må derfor ta utgangspunkt i den *frie kontantstrømmen til eierne* KE. Første steg er da å modifisere beregningen av kontantstrøm i tabell 3.5 og sette opp en ny kontantstrømsberegning, se tabell 3.7. Beregningen er lik til og med $EBIT$-linjen.

Tabell 3.7 Beregning av fri kontantstrøm for eierne i Auk

	0	1	2	3	4
EBIT		11.50	19.38	23.31	27.64
Renteutgifter		-2.21	-1.84	-1.32	-0.71
Driftsresultat før skatt		9.29	17.54	21.99	26.93
Bedriftsskatt 28%		-2.60	-4.91	-6.16	-7.54
Driftsresultat		6.69	12.63	15.83	19.39
Avskrivning		20.00	20.00	20.00	20.00
Investeringer	-80.00				
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Endring i lån	44.26	-7.54	-10.29	-12.16	-14.27
Fri kontantstrøm til eierne	-35.74	19.15	22.34	23.68	25.12

Vi ser at den frie kontantstrømmen til eierne modifiserer temmelig kraftig den frie kontantstrømmen for alle investorer. Dette skyldes to effekter. Den første er at prosjektets renteutgifter er trukket fra $EBIT$ før skatteberegningen. Den andre effekten er at lånets kontantstrøm innarbeides. Den frie kontantstrøm til eierne er dermed de penger eierne sitter igjen med etter at renter og avdrag på lån samt andre kostnader er trukket fra driftsinntektene.

Beregningen av størrelsen på lån og avdrag er hentet fra beregningen av lånekapasitet i tabell 3.6. Avdraget bestemmes av

$$\text{Opplåning i periode } t = D_t - D_{t-1} \tag{3.15}$$

Fri kontantstrøm til eierne for hver periode kan finnes direkte fra sammenhengen

$$KE = K - (1-\tau_c)\,(\text{Rentebetalinger}) + (\text{Opplåning}). \tag{3.16}$$

Tabell 3.8 viser utregningene.

Tabell 3.8 Utregning av fri kontantstrøm til eierne basert på (3.16)

	0	1	2	3	4
Fri kontantstrøm	-80.00	28.28	33.95	36.79	39.90
Renteutgifter etter skatt		-1.59	-1.32	-0.95	-0.51
Endring i lån	44.26	-7.54	-10.29	-12.16	-14.27
Fri kontantstrøm til eierne	-35.74	19.15	22.34	23.68	25.12

Siden vi nå har fri kontantstrøm til eierne, må man bruke eiernes kapitalkostnad i beregning av gjenværende verdi og netto nåverdi. Netto nåverdi er altså gitt av

$$NNV(KE) = KE_0 + \frac{KE_1}{(1+r_E)} + \frac{KE_2}{(1+r_E)^2} + \frac{KE_3}{(1+r_E)^3} + \frac{KE_4}{(1+r_E)^4} \tag{3.17}$$

Netto nåverdi i Sletten AS er dermed:

$$NNV(KE) = -35.74 + \frac{19.15}{1.10} + \frac{22.34}{1.10^2} + \frac{23.68}{1.10^3} + \frac{25.12}{1.10^4} = 35.07$$

Netto nåverdi er altså belønningen til eierne for det nye prosjektet. Denne netto nåverdien er den samme som vi fant i totalkapital- og JNV-metoden.

3.3.5

Hva om prosjekt N gjennomføres? Vi trenger nå å beregne r_{wacc} på nytt. Vi har altså at $r_E = 12\%$ i bransjen, men at kapitalstrukturen er helt annerledes enn for Auk. Vi kan da bruke (3.11) til å utlede hva som er kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld. Deretter kan vi finne kapitalkostnaden for egenkapitalen og til slutt for totalkapitalen. Det neste steget er å finne egenkapitalkostnaden for et ugiret selskap. I et perfekt kapitalmarked har vi at denne er gitt av sammenhengen

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,\frac{D}{E} \tag{3.18}$$

Dermed er den nye egenkapitalkostnaden for prosjekt N:

$$r_E = 12.00 + (12.00 - 6.00)\frac{5}{8} = 15.75$$

Da er r_{wacc}:

$$r_{wacc} = 15.75 \cdot \frac{8}{13} + 6.00 \cdot 0.72 \cdot \frac{5}{13} = 11.35$$

Til slutt velger vi å finne nåverdien til prosjektet N:

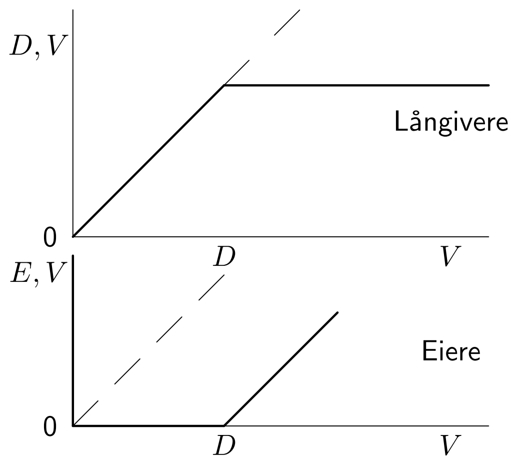
$$NNV = -80.00 + \frac{28.28}{1.1135} + \frac{33.95}{1.1135^2} + \frac{36.79}{1.1135^3} + \frac{39.90}{1.1135^4} = \underline{25.37}$$

Den nye netto nåverdien er altså 25.37.

3.4

3.4.1

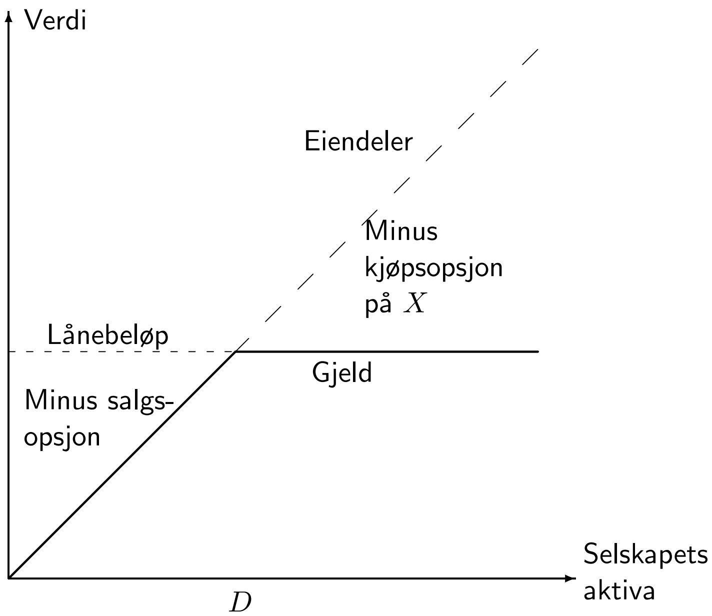
Her har vi brukt fotskriften E for å antyde at utbetalingen kommer til eierne. Den forventede verdien av B er høyere enn for A, og eieren vil foretrekke dette prosjektet. *Den relativt risikable investeringen har dermed en tendens til å bli valgt fremfor den relativt sikre når investeringen er lånefinansiert.* Dette er jo overinvesteringsproblemet. Vi kan illustrere dette i våre avkastningsdiagram.



Figur 3.1: Gevinstprofil for långivere og eiere

Legg merke til at gevinstprofilen ikke er tegnet som vanlig, men starter i null. Selskapets gjeld D er nå utøvelseskurs. På den vertikale aksen finner vi selskapets finansielle forpliktelser. Når selskapet tar opp et lån til finansiering, gir dette opphav til to opsjoner, begge med utøvelseskurs på D. Utseende til långivernes gevinstprofil er den samme som for en utstedelse av en salgsopsjon, mens eierne har en "kjøpsopsjon" på kontantstrømmen.

Man kan også tenke på selskapets gjeld som en portefølje der långiverne eier selskapet, men har utstedt en kjøpsopsjon til eierne med en utøvelsespris lik lånebeløpet. Hvis verdien av selskapet overstiger gjelden, vil eierne bruke sin kjøpsopsjon og innløse gjelden. Er gjelden høyest, utøves opsjonen ikke og långiverne tar over restene av eiendelene. At kjøpsopsjonen ikke utøves betyr i denne sammenhengen at eierne erklærer konkurs. Denne varianten er illustrert i figur 3.2 sammen med en annen variant som straks forklares.



Figur 3.2: Gjeld er en portefølje av å eie selskapets aktiva og utstede en kjøpsopsjon på selskapets eiendeler, eller: Gjeld er portefølje av et risikofritt lån og utstedelse av en salgsopsjon på selskapets eiendeler

Gjelden kan oppfattes på enda en måte. Den kan være en portefølje av risikofri gjeld og en kort posisjon i en salgsopsjon på selskapets aktiva med en utøvelsespris lik kravet til tilbakebetaling:

$$\text{Risikabel gjeld} = \text{Risikofri gjeld} - \text{Salgsopsjon på selskapets aktiva} \quad (3.19)$$

Når selskapets verdi er lavere enn kravet til tilbakebetaling, er salgsoppsjonen "in-the-money" og opsjonen utøves. Långiverne overtar eiendelene i selskapet og taper altså verdien av det risikofrie lånet minus verdien av selskapets aktiva. Er selskapets verdi høyere enn utestående gjeld, blir salgsopsjonen liggende og långiverne mottar kravet til tilbakebetaling. Dette er også illustrert i figur 3.2. Å gå konkurs betyr altså i dette tilfellet at eierne utøver salgsopsjonen om ikke å tilbakebetale all gjeld.

3.4.2

Overinvesteringsproblemet oppstår når selskapet har høy gjeld. Selskapet kan ha prosjekter som gjør det fristende å “vedde selskapet”. Man kan tenke seg to prosjekter, et risikabelt og et sikkert:

Risikabelt prosjekt Forventet netto nåverdi er negativ eller svært lav. I en gunstig, men lite sannsynlig tilstand kan utbetalingen til selskapet bli høyt. Gjelden kan dekkes og selskapet oppnår positiv egenkapital. Hvis en ugunstig tilstand inntreffer, taper eierne alt og långiverne får bare delvis betalt.

Sikkert prosjekt Forventet netto nåverdi er positiv men lav. I både gunstige og ugunstige utfall får långiverne dekket sine tilgodehavender helt eller delvis, mens eierne ikke får noe.

I en slik situasjon kan det være fristende for eierne å velge det risikable prosjektet, selv om det etter vanlige prosjektvalgsregler ikke skulle bli valgt. Man investerer altså i et prosjekt som skulle blitt valgt bort.

3.5

3.5.1

Gjelden D er lik en portefølje bestående av lang posisjon i foretakets aktiva A og en kort i dets egenkapital E, dvs. $D = A - E$. Gjeldsbetaen er derfor en veid sum av betaene til disse to elementene:

$$\beta_D = \frac{A}{D}\beta_U - \frac{E}{D}\beta_E$$

hvor

$$\beta_E = \frac{A\Delta}{A\Delta + B}\beta_U = \frac{(E+D)\Delta}{E}\beta_U = \Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_U \tag{3.20}$$

og

$$\Delta = \mathcal{N}(d_1) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{3.21}$$

Her er symbolene hentet fra Black-Scholes-Merton (BSM) sin modell for aksjekurser. S_0 er aksjekurs på tidspunkt 0, X er opsjonens utøvelseskurs, r_f er risikofri rente, σ er volatilitet eller flyktighet, og T er tid til forfall i hele år. $\mathcal{N}(\cdot)$ er sannsynlighetssummen under den normaliserte normalfordeling opp til tallet d_1. Utøvelseskurs her er gjeldens pålydende, og aksjekursen er verdien av selskapets aktiva. Kjøpsopsjonen egenkapital er dermed skrevet på de underliggende aktiva A.

Vi bruker resultatet fra (A.20) og oppnår et uttrykk for gjeldsbeta som en funksjon av beta til aktiva:

$$\beta_D = (1-\Delta)\frac{A}{D}\beta_U = (1-\Delta)\left(1+\frac{E}{D}\right)\beta_U \tag{3.22}$$

Gjelden er risikofri når $\Delta = 1$ og $\beta_D = 0$.

Både i uttrykket for egenkapitalens beta i (A.20) og for gjeldens beta i (A.21) inngår aktivas beta β_U, som altså er den samme som EK-beta i et ugiret firma. Vi kan bruke (A.20) til å finne et uttrykk for betaen i et ugiret selskap:

$$\beta_U = \frac{\beta_E}{\Delta\left(1+\frac{D}{E}\right)} \tag{3.23}$$

Dette uttrykket gir altså foretakets ugirede beta.

Det første steget til å finne gjeldens beta er altså å finne foretakets ugirede beta fra (A.22). Vi kan tenke på egenkapitalen i selskapet som en tre-årig kjøpsopsjon med utøvelsespris lik den nominelle gjelden på 100. Markedsverdien av selskapet er dermed $50.00 + 60.00 = 110.00$. Vi kan nå finne Δ:

$$\begin{aligned}\Delta = \mathcal{N}(d_1) &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(110/100) + \left(0.05 + 0.5\cdot 0.30^2\right)\cdot 3}{0.30\sqrt{3}}\right)\\ &= \mathcal{N}(0.731907) = 0.767887\end{aligned}$$

Innsatt i (A.22) gir dette den ugirede beta for selskapet:

$$\beta_U = \frac{1.40}{0.768\left(1+\frac{60}{50}\right)} = 0.82872$$

Vi bruker denne i (A.21) og får beta til gjelden:

$$\beta_D = (1-0.768)\left(1+\frac{50}{60}\right)\cdot 0.829 = 0.35$$

Beta til gjelden er altså <u>0.35</u>.

3.5.2

Det kan vises at investeringskriteriet er at

$$\frac{NNV}{I} > \frac{\beta_D}{\beta_E}\frac{D}{E} \tag{3.24}$$

Den venstre siden i (3.24) er nåverdibrøken. Den høyre siden er forholdet mellom gjelds- og EK-betaen ganget med gjeldsgraden.

Vi setter inn direkte i (3.24):

$$\frac{NNV}{I} > \frac{0.35}{1.40}\frac{60}{50} = 0.30$$

Investeringen må altså skape en NNV som er drøyt 30% av investeringsverdien. Netto nåverdi er altså i oppgaven oppgitt til 10 og investeringen 15, slik at $NNV/I = 10/15 = 0,67 > 0,30$. Investeringen er altså høyt over kravet til investering fra nåverdibrøken og investeringen kan dermed gjennomføres.

Kapittel 4

Kontinuasjonseksamen våren 2012

4.1

Etter loven om en pris, må prisen på obligasjonen være lik verdien av den neddiskonterte kontantstrømmen til obligasjonen. Vi har da at obligasjonens pris B er gitt av:

$$B = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{4.1}$$

Beregningen av verdi er vist i tabell 4.1.

Tabell 4.1 Beregning av forventet markedspris og durasjon på obligasjon A: Pålydende 1.000, kupongrente 5% betales en gang i året, markedsrente 6%

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdier	$t \times KS$
1	50	0.9434	47.17	47.17
2	50	0.8900	44.50	89.00
3	50	0.8396	41.98	125.94
4	50	0.7921	39.60	158.42
5	50	0.7473	37.36	186.81
5	1000	0.7473	747.26	3736.29
Markedspris			957.88	
Sum $t \times KS$				4343.64
Durasjon				4.53

Det viser seg altså at markedsprisen er 957.88.

4.1.1

Durasjonen, eller varigheten kan enkelt defineres som obligasjonens gjennomsnittlige tid til forfall. Den kalles ofte for *Macaulay's varighet* eller *durasjon* D etter opphavsmannen. Formelen for durasjonen er gitt av

$$\begin{aligned} D &= \left[\frac{1K}{(1+r)^1} + \frac{2K}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{TK}{(1+r)^T} + \frac{TM}{(1+r)^T} \right] \frac{1}{B} \\ &= \frac{1}{B} \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{tK}{(1+r)^t} + \frac{TM}{(1+r)^T} \right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Utregningen av durasjonen etter denne formelen er vist i kolonnen helt til høyre i tabell 4.1. Obligasjonens durasjon er altså 4.53.

En viktig tolkning av varighet er altså at den viser den gjennomsnittlige tid til forfall for obligasjonen, der årets kontantstrøm viser hvilken vekt hvert enkelt år har. Definer hvert ledd i kontantstrømmen sin nåverdi med $PV\left(K_t\right) = K/(1+r)^t$. Ved å dele denne nåverdien på obligasjonens pris, B, har vi altså hvert års *nåverdivekt*, $PV\left(K_t\right)/B$ i obligasjonens pris. Multipliser deretter hvert års vekt ledd med årstallet da det forekommer. Dermed kommer (4.2) på en ny form:

$$D = \frac{1 \times PV\left(K_1\right)}{B} + \frac{2 \times PV\left(K_2\right)}{B} + \ldots + \frac{T \times PV\left(K_T\right)}{B} + \frac{T \times PV\left(M_T\right)}{B} \tag{4.3}$$

Durasjonen er altså summen av hvert års nåverdivekt ganget med årstallet. Denne formen er også anvendelig i praktiske utregninger. Tabell 4.2 viser utregning av durasjonen på denne måten.

4.1.2

Det kan vises at obligasjonens relative *kursfølsomhet* eller *volatilitet* overfor renteendringer kan skrives

$$\frac{\partial B}{\partial r} \frac{1}{B} = \frac{-1}{(1+r)} D \tag{4.4}$$

Tabell 4.2 Alternativ beregning av obligasjon A's durasjon som gjennomsnittlig tid til forfall

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdier	Andel pris	Dura-sjon
1	50	0.9434	47.17	0.05	0.05
2	50	0.8900	44.50	0.05	0.09
3	50	0.8396	41.98	0.04	0.13
4	50	0.7921	39.60	0.04	0.17
5	50	0.7473	37.36	0.04	0.20
5	1000	0.7473	747.26	0.78	3.90
Markedspris			957.88	1.00	
Durasjon					4.53

I praktiske anvendelser brukes gjerne differanseuttrykket d i stedet for den deriverte ∂. Fra (4.4) har vi:

$$\frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = -\frac{1}{1+r}D \tag{4.5}$$

Den skrives gjerne uten det negative fortegnet. I oppgaven er dermed volatiliteten:

$$\text{Volatilitet} = \frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = \frac{4.53}{1.06} = 4.27$$

En manipulering av (4.5) gir obligasjonens omtrentlige prosentvise prisendring:

$$\frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+r}dr = -\text{Volatilitet} \times \text{Renteendring} \tag{4.6}$$

Vi kan altså nå besvare spørsmålet i oppgaven. Rentenivået øker til 7.0%, dvs. $dr = 0.01$. Da har vi den relative endringen i obligasjonens pris:

$$\frac{dB}{B} = -4.27 \times (0.01) = -0.0427$$

og den nye prisen ventes å være

$$B_{\text{ny}} = 957.88(1 - 0.0427) = 916.94.$$

Man vil vente at den nye prisen er 916.94. Alternativt kan man gjøre samme beregning som i første delspørsmål. Verdien på obligasjonen er ved en slik beregning 918.00. Dette er rimelig. Når diskonteringssatsen øker, faller verdien på obligasjonen.

4.1.3

I et arbitrasjefritt marked kan verdien av obligasjonen med kjennetegn slik som ovenfor også finnes ved hjelp av et sett av *nullkupongobligasjoner*, dvs. obligasjoner som ikke utbetaler kupongrente i løpet av tiden til forfall. En vanlig obligasjon kan sees på som et sett av nullkupongobligasjoner, eventuelt, vi kan "strippe" en vanlig obligasjon for kupongbetalinger og oppnå et sett av nullkupongobligasjoner. Når obligasjonene har samme risiko, kan settet av nullkupongobligasjoner brukes til å prise obligasjonen. Nullkupongene *replikerer* kontantstrømmen til den opprinnelige obligasjonen.

Vi kan vise at settet, eller porteføljen, av nullkupongobligasjoner har samme kontantstrøm som den femårige obligasjonen i figur 4.1.

0	1	2	3	4	5	
$-P$	50	50	50	50	$50 + 1000$	Obligasjon
	50					
		50				Null-
			50			
				50		kuponger
					$50 + 1000$	
$-P$	50	50	50	50	$50 + 1000$	Replikert obligasjon

Figur 4.1: Kontantstrømmene til en obligasjon kjøpt ved utstedelse, som gir kupongrente en gang i året og som holdes til forfall

I et arbitrasjefritt marked vil altså *porteføljen* av nullkupongobligasjoner som replikerer kontantstrømmen til en obligasjon nødvendigvis ha samme verdi som obligasjonen selv. Kontantstrømmene er jo de samme, da må også verdiene være like. Hvis porteføljen har en verdi som re forskjellig fra obligasjonen, vil man kunne tjene en arbitrasjefri gevinst. Er portføljen mer verdt, kan man gjøre en risikofri fortjeneste ved å selge obligajsonen og kjøpe nullkupongobligasjoner. Motsatt hvis prisen på porteføljen er lavere.

4.2

4.2.1

Avkastningen på en aksje over flere perioder beregnes i finans ved to metoder, enten det aritmetiske eller det geometriske gjennomsnittet. Det aritmetiske gjennomsnittet $r_k(A)$ er

$$r_k(A) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t \tag{4.7}$$

Det geometriske gjennomsnittet $r_k(G)$ beregnes ved å finne den k'te roten av bruttoavkastningen over k perioder, dvs.

$$r_k(G) = \left(\frac{S_t}{S_{t-k}}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \tag{4.8}$$

En annen måte å regne ut det geometriske gjennomsnittet er gitt av

$$r_k(G) = \left[(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\dots(1+r_k)\right]^{\frac{1}{k}} - 1 \tag{4.9}$$

Tabell 4.3 viser utregningene av avkastningene med de to metodene.

Tabell 4.3 Beregning av aritmetisk gjennomsnitt og geometrisk gjennomsnitt. Det geometriske er beregnet med metodene vist i henholdsvis (4.8) og (4.9).

Periode	Kurs	Arit-metrisk	Geometrisk	
1	1720			
2	1700	-0.0116	-0.0116	0.9884
3	1680	-0.0118	-0.0117	0.9882
4	1750	0.0417	0.0058	1.0417
5	1720	-0.0171	0.0000	0.9829
6	1740	0.0116	0.0023	1.0116
7	1740	0.0000	0.0019	1.0000
8	1750	0.0057	0.0025	1.0057
9	1740	-0.0057	0.0014	0.9943
10	1770	0.0172	0.0032	1.0172
Aritm. gjsn		0.0033		
Geom. gjsn			0.0032	0.0032

Det viser seg altså at det aritmetiske gjennomsnittet viser 0.33%, mens det geometriske er 0.32%.

4.2.2

Dette er et spørsmål om hvilket gjennomsnitt som er mest rimelig å bruke i fremtiden. Det aritmetiske gjennomsnittet viser gjennomsnittet av avkastningene i hver delperiode. Det geometriske viser avkastningen for en investering som starter i periode 1 og ender i periode k. Det er derfor mest rimelig å bruke det aritmetiske gjennomsnittet som den forventede avkastning i hver delperiode i fremtiden. I år 15 vil vi dermed vente at investeringen har vokst til:

$$E\left(S_{\text{om 5 år}}\right) = 1770 \times 1.0033^5 = 2081.97.$$

4.3

Vi bruker kapitalverdimodellen i denne oppgaven. Forventet avkastning på et selskap i's aksje modelleres altså ved hjelp av:

$$E\left(r_s\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_s \tag{4.10}$$

4.3.1

Vi skal altså finne egenkapitalkostnaden til Sveis og Mek. Fra (4.10) har vi alle opplysninger, bortsett fra β_s. Denne er definert som

$$\beta_s = \frac{\sigma_{sm}}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{sm}\sigma_s\sigma_m}{\sigma_m^2} = \rho_{sm} \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_m} \tag{4.11}$$

Hvor σ_{sm} er kovariansen mellom kurssvingningene i selskap s og markedet m, σ_m^2 er variansen til markedet, ρ_{sm} er korrelasjonen mellom selskapet og markedet og σ_s er standardavviket til selskapet.

Ut fra opplysningene i oppgaven kan vi dermed sette:

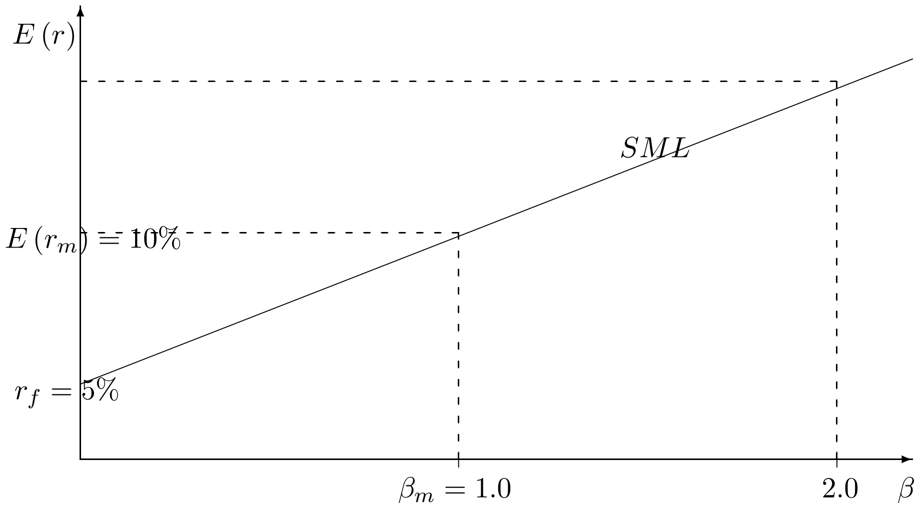
$$E\left(r_s\right) = 5 + 5 \cdot \frac{200}{10^2} = 15$$

EK-kostnaden er altså 15%.

4.3.2

4.3.3

Vi finner først beta til Brat ved å bruke (4.11). Korrelasjonen med markedet, $\rho_{bm} = 0.50$ og standardavviket til Brats kurssvingninger er $\sigma_b = 20$. Dermed



Figur 4.2: SML når den risikofrie renten er 5% og forventet markedsavkastning er 10%

har vi:

$$\beta_b = 0.50 \cdot \frac{20}{10} = 1.0$$

Ut fra SML skulle vi vente at avkastningen er $E(r_b) = 10.0$. Nå opplyses det at avkastningen forventes å være 15.0%. En fornuftig handlestrategi må nå være å kjøpe Brat-akser, fordi man må vente at kursen på aksjen stiger inntil avkastningen på Brat-aksjen faller ned til avkastningen gitt av (4.10) og SML-linjen.

4.4

4.4.1

Leddet $\tau_c r_D D$ kalles *renteskattegevinsten.* Fra tabell 4.4 ser vi at dette blir

$$\text{Renteskattegevinsten}_{\text{tab 4.4}} = 0.28 \cdot 0.075 \cdot 2000 = 42$$

Rentefordelen må sees på som en sikker del av kontantstrømmen, dvs. den har den samme risiko som gjeldsrenten. Dermed bør den diskonteres med

Tabell 4.4 Beregning av kontantstrøm for bedriftene Gjeldfri (GF) og Gjeldsatt (GS)

		GF	MG
Driftsresultat før renter og skatt	$(EBIT)$	1000	1000
Renter	$r_D \cdot D$	0	-150
Driftsresultat før skatt	$(EBT = EBIT - r_D \cdot D)$	1000	850
Skatt	$(EBT \cdot \tau_c)$	-280	-238
Driftsresultat etter skatt	$(DERS)$	720	612
KS eiere og långivere	$(EBIT \cdot (1-\tau_c) + \tau_c r_D D)$	720	762

gjeldsrenten, dvs:

$$NV(\text{Renteskattegevinst}) = \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = T_c D$$

4.4.2

Verdien av et gjeldfritt selskap må være

$$V_U = \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} \tag{4.12}$$

Her er r_U kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld. Kapitalkostnaden diskonterer altså kontantstrømmer etter skatt. Vi ser at telleren er det samme som den årlige kontantstrømmen til eiere og kreditorer. Dermed har vi en oppdatert versjon av MM1:

PROPOSISJON 4.1 (MM 1 (Bedriftsskatt))**.**

$$V_L = \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = V_U + \tau_c D \tag{4.13}$$

MMs proposisjon 4.1 med bedriftsskatt sier altså at bedriftens verdi er summen av bedriftens verdi når den ikke har gjeld og nåverdien av renteskattegevinsten.

Verdien av Gjeldfri og Gjeldsatt blir dermed:

$$V_U(\text{Gjeldfri}) = \frac{720}{0.10} = 7200$$

$V_L(\text{Gjeldsatt}) = 7200 + 0.28 \times 2000 = 7760.$

4.4.3

Hva med kapitalkostnaden, eller MM2, når vi tar hensyn til selskapsskatter? Miller og Modiglian's proposisjon er som følger.

PROPOSISJON 4.2 (MM 2 (Bedriftsskatt)).

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)(1 - \tau_c)\frac{D}{E} \tag{4.14}$$

Fra oppgaven har vi at $r_U = 10.0\%$ og at $r_D = 7.5\%$. Vi kjenner Gjeldsatts selskapsverdi $V_L = 7760$, slik at egenkapitalen for Gjeldsatt er $7760 - 2000 = 5760$. Da er egenkapitalkostnaden:

$$r_E = 10 + (10 - 7.5)(1.00 - 0.28)\frac{2000}{5760} = 10.63$$

Kapitalkostnaden er altså 10.63%.

4.4.4

Når gjelden endres, endres også egenkapitalen pga. renteskattefordelen. Vi må altså regne ut selskapsverdien av Gjeldsatt for de to nye gjeldsnivåene og så finne egenkapitalkostnaden på samme måte som i forrige deloppgave.

Når $D = 1000$ har vi at V_L er:

$V_L = 7200 + 0.28 \times 1000 = 7480.$

EK-kostnaden er da:

$$r_E = 10 + (10 - 7.5)(1.00 - 0.28)\frac{1000}{7480 - 1000} = 10.10$$

Øker gjelden til 3.000, er på samme måte $V_L = 8.040$ og $r_E = 11.07\%$.

4.5

4.5.1

Black-Scholes/Merton-modellen ser slik ut:

$$\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Modellen krever bare beregning av den underliggende eiendels standardavvik. Alle andre størrelser er gitt i markedet. Vi ser at markedsrisiko ikke inngår, heller ikke risikoholdning.

Vi bruker formelen (4.15). Start med d_1:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{10}{9}\right) + \left(0.05 + \frac{0.40^2}{2}\right) 0.25}{0.40\sqrt{0.25}} \\
&= \frac{0.1054 + (0.05 + 0.08)0.25}{0.20} \\
&= \frac{0.1379}{0.20} \\
&= 0.689303
\end{aligned}$$

og

$$d_2 = 0.689303 - 0.20 = 0.489303$$

Da har vi verdiene i den normaliserte normalfordeling

$$\mathcal{N}(0.689303) \sim 0.754684 \qquad \mathcal{N}(0.489303) \sim 0.687686$$

Med disse verdiene kan vi nå finne opsjonens pris ved å sette inn i (4.15):

$$C_0 = 10 \cdot 0.754684 - e^{-0.050 \cdot 0.25} 9 \cdot 0.687686 = 1.4345$$

Opsjonens pris er altså 1.4345.

4.5.2

Opsjonens risiko kan måles ved dens beta. Det enkleste er å finne denne betaen gjennom den replikerende porteføljen. Husk at denne består av aksjen og et lån. Da viser det seg at også opsjonens β_{opsjon} er en veid sum av β_S til aksjen S og β_B til obligasjonen. S er altså prisen på aksjen, det vi tidligere har kalt P_0. Δ er mengden av aksjer i porteføljen. Dermed er β_{opsjon}:

$$\beta_{opsjon} = \frac{S\Delta}{S\Delta + B}\beta_S + \frac{B}{S\Delta + B}\beta_B$$

Vi antar at obligasjonen er risikofri ($\beta_B = 0$), slik at opsjonens β_{opsjon} er:

$$\beta_{opsjon} = \frac{S\Delta}{S\Delta + B}\beta_S = \frac{S \cdot \mathcal{N}(d_1)}{C_0}\beta_S \tag{4.16}$$

Opsjonens beta avhenger altså av mengden av aksjen i porteføljen, dens pris og av aksjens beta. Og siden vi har at $\Delta = \mathcal{N}(d_1)$, er risikoen i opsjonen direkte knyttet til opsjonens følsomhet overfor kursendringer.

Nå er det nok å vise at brøken foran β_S er større enn 1.0 for å vise at opsjonen er mer risikabel enn aksjen. Vi har ved innsetting at

$$\frac{S \cdot \mathcal{N}(d_1)}{C_0} = \frac{10 \cdot 0.754684}{1.4345} = 5.2610$$

Opsjonen er altså mer enn fem ganger mer risikabel enn aksjen.

Kapittel 5

Eksamen 2012

5.1 Dividende og vekst

I denne oppgaven kommer vi til å ha nytte av dividendemodellen

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{5.1}$$

Dette er altså **Dividendemodellen**. Prisen av aksjen er gitt av fremtidige dividendeutbetalinger pr. aksje pluss en sluttverdi ved investeringshorisonten T.

5.1.1 Dagens aksjekurs

Vi skal altså finne aksjekursen S_0 ut fra de grunnleggende opplysninger. Dividendeutbetalingene stiger med veksten i driftsresultatet i fem år, for så å flate ut og er konstante over all overskuelig fremtid. Det betyr at vi kan forenkle (A.2) til

$$S_0 = \sum_{t=1}^{6} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{1}{(1+r_E)^6} \times \frac{Div_7}{r_E} \tag{5.2}$$

Resultatene er vist nedenfor.

	0	1	2	3	4	5	6	7
$EBIT$		3000.00	3150.00	3307.50	3472.88	3646.52	3828.84	3828.84
EPS		30.00	31.50	33.08	34.73	36.47	38.29	38.29
Div_t		15.00	15.75	16.54	17.36	18.23	19.14	19.14
NV_1	68.80							
NV_2	80.83						159.54	
S_0	149.63							

Her er $EBIT$ driftsresultatet. Det vokser med 5% i året de neste fem årene, d.v.s. frem til år 6. Fra da av er $EBIT$ konstant. EPS er driftsresultat pr. aksje. Div_t er halvparten av EPS. Legg merke til at i år 6 har Div_t vokst til 19.14, som så er konstant. Den evige kontantstrømmen som starter i år 7 er også 19.14, dens "nullår" er år 6. Verdien av den evige kontantstrømmen i år 6 er:

$$NNV_{2,6} = \frac{Div_7}{r_E} = \frac{19.14}{0.12} = 159.54.$$

Når dette beløpet diskonteres til år 0 og legges sammen med nåverdien av de første årene, får vi aksjekursen på $S_0 = \underline{149.63}$.

5.1.2 5% vekst "i all evighet"

Hvis driftsresultatet vokser i all evighet har vi fra den generelle sammenhengen

$$S_0 = \frac{Div_1}{r_e - g} \tag{5.3}$$

der $g = 0.05$ er veksthastigheten i utbyttet, at

$$S_0 = \frac{15.00}{0.12 - 0.05} = \underline{214.29}$$

5.1.3 1% vekst etter første vekstfase

Vi har altså kontantstrømmen som før frem til år 6. Nåverdien av denne er $NV_1 = 68.80$. Nå må vi finne nåverdien av den evige veksten som starter i år 7 med $Div_7 = 19.14 \cdot 1.01 = 19.34$. Da får vi

$$NV_2 = \frac{1}{1.12^6} \times \frac{19.34}{0.12 - 0.01} = \frac{175.78}{1.12^6} = 89.05,$$

slik at $S_0 = 68.80 + 89.05 = \underline{157.85}$.

5.1.4 Tilbakekjøp?

Det kan vises at tilbakekjøp i stedet for dividende ikke har noen kontantstrømsvirkninger for eierne. Intuitivt vil vi ha at tilbakekjøp øker aksjekursen med det beløp pr. aksje som dividenden utgjør.

5.2 Markedsmodellen

I denne oppgaven brukes den empiriske *markedsmodellen*

$$r_i = \alpha + \beta r_m + u \tag{5.4}$$

der r_i er avkastningen på aksje i, og α, β er konstanter som skal beregnes. Det kan vises at β er et estimat på aksjens β. Det kan også vises at $\alpha \sim 0.0$. u er et feilledd som er normalfordelt med forventning lik null og fast varians θ^2.

5.2.1 God sammenheng?

Sammenhengen mellom avkastningen r_B i selskap B og markedsavkastningen kan skrives:

$$r_B = -0.0115 + 0.969OB \tag{5.5}$$

Denne sammenhengen er pålitelig. Vi finner at t-verdien er høy og dermed signifikant for β-estimatet $\hat{\beta}$ og at α er nær 0.0 og ikke-signifikant. Prediksjonene i modellen er dermed oppfylt. Videre er forklaringsgraden $R^2 = 0.634$ med 1256 observasjoner.

5.2.2 Anvendelser

To anvendelser peker seg ut. Den første er at kapitalkostnaden for EK for selskap i kan beregnes fra kapitalverdimodellen:

$$r_i = r_f + \beta_i \left(r_m - r_f\right) \tag{5.6}$$

der man kan bruke $\hat{\beta}_i$ som estimat på selskapets β. Kapitalkostnaden for EK er nyttig i prosjektvurderinger.

Den andre anvendelsen er i porteføljesammenheng. Her viser $\hat{\beta}_i = 0.969$, altså en beta temmelig nær markedets gjennomsnitt. Det er nyttig å vite for en porteføljeforvalter når en bestemt risikoprofil på en portefølje skal dannes.

5.3 Kapitalstruktur

I denne oppgaven brukes analyseapparatet fra Miller og Modigliani. Det er selskapsskatt i økonomien.

5.3.1

Det kan vises at verdien av selskapet uten gjeld C kan finnes fra

$$V_U = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_U} \tag{5.7}$$

der $r_U = r_E$ når selskapet ikke har gjeld og $\tau_c = 0.28$ er skattesatsen for selskaper. Vi finner verdien er:

$$V_C = \frac{1000(1-0.28)}{0.10} = 7200$$

Verdien av selskapet D finnes fra sammenhengen

$$V_U = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_U} + \tau_c D = V_U + \tau_c D \tag{5.8}$$

der $\tau_c D$ er renteskattefordelen. Ved innsetting har vi

$$V_D = 7200 + 0.28 \cdot 2000 = 7760$$

Det kan vises at kapitalkostnaden for egenkapitalen er

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,(1-\tau_c)\,\frac{D}{E} \tag{5.9}$$

For C er $r_E = r_U = 10\%$ siden gjelden $D = 0$. For D finner vi først $E = V - D = 7760 - 2000 = 5760$. Dermed fremkommer:

$$r_E = 10 + (10-5) \cdot 0.72 \cdot \frac{2000}{5760} = \underline{11.25\%}$$

5.3.2 Endring i gjeld

Med $D = 4000$, er selskapets verdi 8320 og $E = 4320$. Er $D = 8000$, er $E = 1240$. Her brukes (5.9) omigjen, slik at $r_E = 13.33\%$ og $r_E = 33.22\%$.

5.3.3 Fordeler og ulemper med økt gjeldsandel

Avveiningsteorien sier at verdien av selskapet er bestemt av fordeler og ulemper av gjeld. Den kan oppsummeres slik:

$$V_L = V_U + NV(\text{Renteskattefordel}) - NV(\text{Krise- og konkurskostnader}) \tag{5.10}$$

Det spørres etter fordeler og ulemper. For det første *fordeler*. Renteskattefordelen er opplagt en fordel, som allerede vist. En annen fordel henger sammen med selskapsstyringen. La oss si at selskapet har finansiert sine lån gjennom en bank. Som en del av selskapets betalinger og inntekter, kan banken slutte om selskapet er i en god eller svak økonomisk stilling. Er stillingen i ferd med å bli svak, kan banken gripe inn på et tidlig tidspunkt og korrigere driften før selskapet utvikler større problemer. Banken har altså en *overvåkingsfunksjon* som eierne kan være interessert i.

Ulemper kan være av mange slag. For det første må selskapet betale høyere lånerenter når gjeldsandelen øker. Finansiell risiko øker med gjeldsandelen, og banken eller obligasjonseiere vil kreve kompensasjon for risikoen. Långiverne kan også begrense handlefriheten til selskapet når gjeldsandelen øker. I låneavtalen vil det være punkter om hvor høy gjeldsandelen kan være. Går selskapet ut over denne andelen, kan långiverne kreve tilbakebetalt lånet raskere, nekte nye lån til nye prosjekter, kreve tilbakebetaling før dividende etc.

Vi kan også skjelne mellom andre direkte og indirekte *krise- og konkurskostnader*. De direkte kostnadene som oppstår når selskapet kommer i vanskeligheter med å betale er gjerne utgifter til advokater og andre kostnader knyttet til selve oppløsningen av selskapet. De indirekte kostnadene er for det meste knyttet til tap av tillit. For eksempel vil leverandører kreve kontant betaling, eller arbeidstakere er uvillige til å investere i bedriftsspesifikk kunnskap, "legge liv og sjel i jobben", når krisetegnene melder seg.

5.4 Gjeldsoverheng

E's vurdering av det nye prosjektet er

$$NNV_{ny} = K_0 + \frac{1}{1+r}\left(pK_{1,H} + (1-p)K_{1,L}\right) \tag{5.11}$$

der $K_{1,H}, K_{1,L}$ er kontantstrøm i periode i det høye, henholdsvis lave alternativet. Vi antar at E har 50% gjeld, og har da at $r_{wacc} = 11\%$. Videre er det ikke opplyst noe om skatt og vi forutsetter derfor at skatt ikke kommer i betraktning her. Innsetting gir da:

$$NNV_{ny} = -200 + \frac{1}{1.11}(0.75 \cdot 2000 + 0.25 \cdot 400) = \underline{1254.55}$$

Prosjektet er svært lønnsomt og bør gjennomføres. Vi ser at til og med i det tilfellet at den lave kontantstrømmen inntreffer, vil prosjektet ha en positiv NNV.

Problemet er at E ikke kan finansiere prosjektet. E er uten ledige midler, og nye lån oppnås ikke før det gamle er betalt. Vi kan illustrere dette med at for långiverne ser prosjektet slik ut:

$$NNV_{ny} = -200 + \frac{1}{1.11}(0.75 \cdot (2000 - 1000 \cdot 1.07) + 0.25 \cdot (400 - 1000 \cdot 1.07)) = \underline{281.82}$$

For långiverne ser ikke dette så fristende ut. Og det er en temmelig høy sannsynlighet for at de vil tape penger. Hvis det lave alternativet inntreffer, er kontantstrømmen etter tilbakebetaling av lån

$$KS_{1,L} = 400 - 1000 \cdot 1.07 = -670$$

I tillegg kommer et investeringsutlegg i periode 0. Konklusjonen er at E ikke er i stand til å finansiere det nye prosjektet.

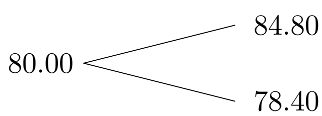
Dette er et eksempel på at gammel gjeld blokkerer for nye og lønnsomme prosjekter. Dette er problemet med *gjeldsoverheng*.

5.5 Binomisk opsjonsprising

Dette er et problem som dreier seg om opsjonsprising med to varianter av den binomiske modell.

5.5.1 Replikerende portefølje en periode

Første steg er å bestemme aksjens prisprosess. Vi ser at aksjens pris i neste periode er enten $80.00 \cdot 1.06 = 84.80$ eller $80.00 \cdot 0.98 = 78.40$, se figur 5.1.



Figur 5.1: Aksjens prisprosess: To sluttverdier er mulige.

Neste steg er å bestemme opsjonens verdi ved forfall. Utøvelseskursen er 80.00. Da har vi altså at kjøpsopsjonen kan ha verdiene 4.80 og 0.00 ved forfall, se figur 5.2

$$C_0 \quad \begin{cases} C_u = \max\left[0, 84.80 - 80.00\right] = 4.80 \\ \\ C_d = \max\left[0, 78.40 - 80.00\right] = 0.00 \end{cases}$$

Figur 5.2: Verdien av en kjøpsopsjon ved forfall: To sluttverdier er mulige.

I tredje steg skal vi altså sette sammen en portefølje som etterligner utbetalingene til opsjonen ved forfall. Portefølje som består av en andel Δ av aksjen og et kontantbeløp B. Figur 5.3 illustrerer.

$$\Delta S_0 + B \quad \begin{cases} \Delta S_u + (1 + r_f)\, B = 4.80 \\ \\ \Delta S_d + (1 + r_f)\, B = 0.00 \end{cases}$$

Figur 5.3: Verdien av en porteføljen: To sluttverdier er mulige.

Figur 5.3 viser at porteføljen skal replikere verdien til kjøpsopsjonen i de to tilstandene. Fra figur 5.3 ser vi at dette tilsvarer to ligninger med to ukjente, Δ og B. Vi setter inn verdiene for aksjepriser i de to tilstandene og den risikofrie renten. De to ligningene er dermed:

$$\begin{aligned} 84.80\Delta + 1.04B &= 4.80 \\ 78.40\Delta + 1.04B &= 0 \end{aligned}$$

Fra siste ligning har vi at $B = -78.40\Delta/1.04$. Vi setter dette inn i første ligning og løser for Δ:

$$\begin{aligned} 84.80\Delta + 1.04\frac{-78.40\Delta}{1.04} &= 4.80 \\ 6.40\Delta &= 4.80 \\ \Delta &= 0.75 \end{aligned}$$

Dermed har vi at B må være:

$$B = -\frac{78.40 \cdot 0.75}{1.04} = -56.54$$

Vi skal altså investere i aksjen med en andel 0.75, samtidig som vi skal ta opp et lån på 56.54.

I fjerde steg bruker vi innsikten om arbitrasjefri handel. Porteføljen vi nettopp har satt sammen gir samme kontantstrøm som opsjonen i periode 1. Siden de har samme verdi i periode 1, må de også ha samme verdi i periode 0. Dermed kan vi sette prisen på opsjonen ut fra de kjente verdiene til aksjen og lånet:

$$C_0 = 0.75 \cdot 80.00 - 56.54 = \underline{3.46}$$

En arbitrasjefri pris på opsjonen er altså 3.46. Opsjonen er altså like mye verdt som en andel i aksjen og et lån. Dette kan tolkes som et kjøp av aksjen finansiert med lån. Opsjonen vil derfor være mer volatil enn aksjen selv. Generelt har vi altså at

$$C_0 = \Delta S_0 - B \tag{5.12}$$

Det kan vises at metoden med replikerende portefølje leder frem til den generelle formelen

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{5.13}$$

Her er C_u, C_d opsjonsverdien i periode 1 i henholdsvis opp- og nedtilstanden.

5.5.2 Risikonøytral prising

Definer sannsynlighetene

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u-d} \tag{5.14}$$

Vi kan nå prise kjøpsopsjonen med risikonøytral prising:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \tag{5.15}$$

Vi finner først q og $1-q$:

$$q = \frac{0.04 - (-0.02)}{0.06 - (-0.02)} = 0.75; 1 - q = \frac{0.06 - 0.04}{0.08} = 0.25$$

Fra (5.15) har vi da:

$$C_0 = \frac{1}{1.04}\left(0.75 \cdot 4.80 + 0.25 \cdot 0.00\right) = \underline{3.46}$$

5.5.3 To perioder: Risikonøytral prising

Det kan vises at i to perioder er formelen

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{5.16}$$

Vi finner at

$$C_{uu} = \max\left[80 \cdot 1.06^2 - 80, 0\right] = 9.89$$

$$C_{ud} = \max\left[80 \cdot 1.06 \cdot 80 \cdot 0.98 - 80.0\right] = 3.10$$

og

$$C_{dd} = \max\left[80 \cdot 0.98^2 - 80.0\right] = 0.00$$

Nå har vi alle opplysninger vi trenger. Innsetting gir direkte:

$$C_0 = \frac{1}{1.04^2}\left(0.75^2 9.89 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 3.10 + 0.25^2 0.00\right) = \underline{6.22}$$

Kapittel 6

Eksamen 2013

6.1

6.1.1

1. Anta at investoren har et langsiktig perspektiv, feks. spares det til pensjon.
2. Over tid har det vist seg vanskelig å ha en høyere avkastning enn gjennomsnittet i markedet. Har noen høyere enn markedsgjennomsnittet, må jo andre ha lavere.
3. Satser man på å slå markedet, må man bruke tid og energi for å følge med, analysere og foreta handler. Dette er informasjonsinnsamling og -bearbeiding, altså kostnadskrevende. Vår investor er en amatør.
4. En fornuftig strategi er derfor å forsøke å holde seg på gjennomsnittet. Det kan gjøres på to måter:
   (a) Sette sammen en hjemmelaget portefølje av 10-15 aksjer, som helst bør være likvide, dvs. aksjer som det er relativt stor handel i.
   (b) Kjøpe andeler i et aksjefond som tar sikte på å følge markedsporteføljen.

6.1.2

Denne oppgaven handler om kapitalverdimodellen (KVM). Forutsetningene for KVM oppsummeres i seks punkter:

1. Investorene er risikoaverse individer som maksimerer sin forventede nytte ved slutten av perioden.

2. Investorene er pristilpassere som har homogene forventninger om eiendelenes avkastning. Avkastningene har en felles normalfordeling.
3. Det finnes en risikofri eiendel som er slik at investorene kan låne og låne ut ubegrensede beløp til den risikofrie renten.
4. Eiendelenes antall og størrelse er gitt. Alle eiendeler kan selges og er perfekt oppdelbare.
5. Markedene for eiendelene er friksjonsløse og informasjon er tilgjengelig for alle investorer samtidig og uten kostnader.
6. Der er ingen markedsimperfeksjoner slik som skatter, reguleringer eller begrensninger på short-salg.

Kapitalkostnaden

Kapitalverdimodellen kan skrives:

$$E(r_i) = r_f - (E(r_m) - r_f)\,\beta_i \tag{6.1}$$

Modellen sier at forventet avkastning på enhver eiendel $E(r_i)$ består av to ledd. Det første er den risikofrie renten r_f, det andre leddet er en risikopremie. Risikopremien er prisen på risiko $(E(r_m) - r_f)$ ganget med mengden risiko $\sigma_{im}/\sigma_m^2 = \beta_i$. $E(r_m)$ er forventet avkastning på markedsporteføljen m. σ_{im} er kovariansen til eiendelen og markedsporteføljen, og σ_m^2 er variansen til markedsporteføljen.

Fra oppgaven har vi altså at $r_f = 4\%$, $E(r_m) = 9\%$, $\sigma_{im} = 400$, og og $\sigma_m^2 = 12.65^2 = 160$. Da er $\beta_i = 400/160 = 2.50$. Forventet avkastning er dermed fra (6.1):

$$E(r_i) = 4.00 + (9.00 - 4.00)2.50 = 16.50\%$$

Forventet avkastning, også kalt kapitalkostnaden, er dermed 16.50% for Vinnvinn.

Positiv alfa?

Skal vi foretrekke å investere i Vinnvinn må den gi høyere avkastning enn den forventede fra KVM. Aksjen må ha en positiv α :

$$\alpha = R_i - E(r_i) \tag{6.2}$$

der $R_i = 20\%$ er avkastningen i den alternative vurderingen. Denne er høyere enn dagens vurdering på 16%, dvs. aksjen har en $\alpha = 20 - 16 = 4$. Man bør altså investere i aksjen.

Likevektspris

Andre investorer oppdager investeringsmuligheten. Da må vi vente at aksjen innstiller seg på et nytt likevektsnivå med en avkastning på 16.5%. Aksjekursen er i dag 100, med 20%'s avkastning impliserer dette en kontantstrøm på 20, når vi antar stabil drift over overskuelig fremtid. Da må vi ha at:

$$\frac{20}{S_0^*} = 0.165 \qquad S_0^* = 121.21$$

Kursen vil altså stige til 121.21.

6.2

Dette er en oppgave i kapitalstruktur, og vi bruker Miller og Modigliani-modellen med bedriftsskatt som eneste markedsimperfeksjon i denne oppgven. MM gjorde to forutsetninger:

1. Selskapet holder evig, konstant kapasitet ved å investere et like stor beløp som avskrivningene.
2. Alt driftsresultat utdeles som dividende.

Den første forutsetningen innebærer at kontantstrømmen fra foretaket er lik det regnskapsmessige årsresultatet.

Sentralt i denne oppgaven er verdien av selskapet under ulike forutsetninger. MMs proposisjon lyder:
PROPOSISJON 6.1 (MM 1 (Bedriftsskatt))**.**

$$V_L = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = V_U + \tau_c D \tag{6.3}$$

MMs proposisjon 6.1 med bedriftsskatt sier altså at bedriftens verdi er summen av bedriftens verdi når den ikke har gjeld og nåverdien av renteskattegevinsten.

6.2.1

Støtt har altså ingen gjeld like før annonseringen. Da har vi fra (6.3) at

$$\begin{aligned} V_U &= \text{Aksjekurs} \times \text{Aksjer} \\ &10.50 \times 30m = \underline{315m} \end{aligned}$$

Verdien av eiendelene er lik verdien av egenkapitalen når selskapet ikke har gjeld.

6.2.2

Gjelden er utstedt og nyheten er kjent i markedet. Alle investorene er nå klar over at verdien av selskapet også inkluderer renteskattegevinsten $\tau_c D$ av å ha gjeld. Fra (6.3) stiger nå selskapsverdien til:

$$V_L = 315m + 0.27 \times 50m = \underline{328.5m}$$

Følgelig er nå den nye verdien av eiendelene denne selskapsverdien pluss de nye kontantene:

$$\text{Eiendeler} = V_L + \text{Kontanter} = 328.50 + 50 = 378.50$$

Ny egenkapital er derfor $E_L = 378.50 - 50 = 328.50$ på dette tidspunktet, før aksjene er kjøpt tilbake.

6.2.3

Aksjekursen er nå

$$S_0 = \frac{E_L}{\text{Antall aksjer}} = \frac{328.5m}{30m} = \underline{10.95}$$

Støtt kommer til å kjøpe tilbake $50m/10.95 = 4,966,210$ aksjer.

6.2.4

Etter tilbakekjøpet er det $30m - 4,966,210 = 25,433,790$ aksjer igjen i selskapet. Egenkapitalen er $E_L = 328.5m - 50m = 278.5m$. Aksjekursen er nå:

$$S_0 = \frac{278.5m}{25,433,790} = \underline{10.95}$$

som før.

Eiendelene er som før 328.5m, siden de 50m er gått over til selgerne av aksjene. Eiendelene er finansiert med egenkapital på 278.5m og et lån på 50m.

6.3

Vi er igjen innenfor Miller og Modigliani's irrelevansteoremer. Teoremet sier at størrelsen på dividendeutbetalingen har ingen virkning på selskapets verdi. De gikk ut fra en forutsetning om et perfekt kapitalmarked, som betyr at

1. Der er ingen markedsfriksjoner og ingen skattevurderinger.
2. Ingen usikkerhet om investeringsplaner.
3. Ingen transaksjonskostnader, for eksempel ingen meglerhonorarer ved kjøp og salg av aksjer, eller ved selskapenes aksjeutvidelser.
4. Ingen informasjonskostnader pga. asymmetrisk informasjon.

Selskapsverdien er ut fra utbyttemodellen, hvor vi antar et evigvarende utbytte:

$$\text{Selskapsverdi} = \frac{4m}{0.10} = 40m \tag{6.4}$$

I tillegg har altså selskapet liggende 10 millioner i kontanter. Markedsverdien er derfor $V = 40 + 10 = 50m$. Siden der er 10 million aksjer, er aksjekursen i utgangspunktet 5.00.

6.3.1 Ekstraordinær dividende

Skal de 10m deles ut som et ekstraordinært utbytte? Utbytte pr. aksje er da:

$$Div_0 = \frac{\text{Overflødige kontanter}}{\text{Antall aksjer}} = \frac{10m}{10m} = \underline{1.00}$$

Aksjekursen før utdeling av dividende inneholder retten til å motta utbyttet. Vi sier at aksjen er *cum* (med) dividende og prisen er S_{cum}. Dagen etter at utbyttet er betalt, er aksjen *ex* (uten) dividende. Vi har da at:

$$S_{cum} = \text{Nåværende dividende} + NV\text{Fremtidig dividende} = 1 + \frac{0.40}{0.10} = 5.00 \tag{6.5}$$

Dagen etter at dividenden er betalt, er aksjekursen:

$$S_{ex} = NV\text{Fremtidig dividende} = \frac{0.4}{0.10} = 4.00 \tag{6.6}$$

Aksjekursen faller altså etter at utbyttet er delt ut. Fallet i aksjekursen er like stort som den utdelte dividenden pr. aksje. Vi kan også vise dette fallet ved å studere selskapets balanse i markedsverdier.

	Før utdeling	Etter utdeling
Kontanter	10m	0
Andre eiendeler	40m	40m
Sum markedsverdier	50m	40m
Aksjer	10m	10m
Aksjekurs	5	4

Vi har altså at *i et perfekt kapitalmarked faller kursen på en aksje uten rett til dividende med dividendebeløpet pr. aksje på utdelingsdatoen.*

6.3.2 Tilbakekjøp av aksjer

Hva om Hold bruker ekstrakontantene til å kjøpe tilbake aksjer? Man har altså 10m og aksjekursen er 5, det skulle gi $10m/5 = 2,000,000$ tilbakekjøpte aksjer og 8m gjenstående aksjer. Vi bruker balansen i markedsverdier til å studere virkningene.

	Før tilbakekjøp	Etter tilbakekjøp
Kontanter	10m	0
Andre eiendeler	40m	40m
Sum markedsverdier	50m	40m
Aksjer	10m	8m
Aksjekurs	5	5

Tilbakekjøpet endrer altså ikke aksjekursen, fordi markedsverdien nå fordeles på færre aksjer. Vi kan også se dette på en annen måte. I fremtiden vil selskapet fremdeles generere en kontantstrøm på 4m. Det er dermed i stand til å betale en dividende hvert år på $Div = 4m/8m = 0.50$ pr. aksje. Dermed er selskapets aksjekurs i dag

$$S_{tk} = \frac{0.50}{0.10} = 5.00$$

Dividenden pr. aksje øker altså i fremtiden, og dermed er aksjekursen uberørt.

Vil investoren foretrekke dividende eller tilbakekjøp? Anta at en investor har 1,000 aksjer. La oss vurdere hva dividende eller tilbakekjøp har å si for ham eller henne, når vi sammenligner like etter en utbetaling av dividende.

	Dividende	Tilbakekjøp
Aksjer	$4.00 \times 1,000 = 4,000$	$5.00 \times 1,000 = 5,000$
Kontanter	$1.00 \times 1,000 = 1,000$	
Sum	5,000	5,000

Verdien for investor er altså den samme, enten han eller hun får utbetalingene fra selskapet i form av dividende eller tilbakekjøp av aksjer.

Sett nå at selskapet vedtar å kjøpe tilbake aksjer mens du ønsker kontanter, dvs. en utbetaling av dividende. Du kan få de kontantene du ønsker ved å selge aksjer. Du ønsker altså 1,000 i kontanter i stedet for at beløpet er bundet i aksjer. Du selger da aksjer for 1,000, dvs. $1,000/5.00 = 200$ aksjer, og sitter altså tilbake med 800 aksjer til en verdi av $5.00 \times 800 = 4,000$. Som ved dividendeutbetalingen har du nå en aksjebeholdning på 4,000 og en kontantbeholdning på 1,000. Gjennom denne transaksjonen har du dermed gjennomført en **hjemmelaget dividende**, dvs. du kan som investor erstatte den dividendepolitikken selskapet legger opp til med en annen etter eget ønske.

Hva om selskapet derimot deler ut dividende, mens du ønsker å holde verdiene i aksjebeholdningen? Du kan bruke dividendeutbetalingen til å kjøpe aksjer. Når dividenden er utbetalt, er aksjekursen $S_{ex} = 4.00$. Du kjøper dermed $1,000/4.00 = 250$ aksjer. Du har dermed nå en aksjebeholdning på 1,250 til en verdi av $4.00 \times 1,250 = 5,000$.

Lærdommen av disse regneøvelsene er dermed: *I perfekte kapitalmarkeder er investorene indifferente mellom dividendeutbetaling eller tilbakjøp av aksjer. Ved å reinvestere dividenden eller ved å selge aksjer kan investoren replikere hvilken som helst utbetalingsmetode som selskapet velger.*

6.3.3 Nye aksjer og høyere utbytte

Et foreslag er altså å gi et ekstra stort utbytte i år på 12m ved å utstede nye aksjer. Vi forutsetter at selskapets investeringsprogram ligger fast. Man trenger 2m og ville altså få inn $2m/5.00 = 400,000$ nye aksjer i selskapet. Dividende pr. aksje fra utstedte aksjer blir nå:

$$Div_{\text{utstedt}} = \frac{2,000,000}{10,040,000} = 0.19231$$

Ekstradividenden pr. aksje fra årets utbetaling blir:

$$Div_{\text{ekstra}} = \frac{10,000,000}{10,400,000} = 0.96154$$

Selskapet vil fortsette å skape en kontantstrøm på 4m hvert år, som deles ut til aksjonærene. Denne årlige kontantstrømmen er på:

$$Div_{\text{årlig}} = \frac{4,000,000}{10,400,00} = 0.38462$$

Hvis man velger dette forslaget, vil selskapets aksjekurs inkludert retten til dividende (P_{cum}) i dag være:

$$S_{cum} = 0.96154 + 0.19231 + \frac{0.38462}{0.10} = 5.00$$

Investorene vil altså få like mye for aksjen enten dividenden utbetales etter hvert som kontantstrømmene skaper rom for dette, eller om man "henter frem i tid" dividenden ved å utstede nye aksjer. Med andre ord kommer vi til det samme resultatet som før: Investorene er likegyldige til valget av utbetalingspolitikk i selskapet, sålenge investeringsprogrammet ligger fast.

6.3.4 Konklusjon

De tre måtene å dele ut overflødige kontanter på er likegyldige for investoren, dvs. de er like mye verdt. Ønsker investoren en annen utbetaling enn det selskapet gjør, kan investoren omgjøre beslutningen ved å kjøpe eller selge aksjer, eventuelt kombinert med et lån.

6.4

Vi bruker Black-Scholes-Merton (BSM) sin modell for opsjonsprising her. Det forutsettes en bestemt kontinuerlig tids prisprosess. Øvrige forutsetninger er:

- De finansielle markedene er perfekte, dvs. uten transaksjonskostnader og skatter. Short-salg er tillatt, og eiendelene er perfekt oppdelbare.
- Alle investorer kan låne og låne ut til samme risikofrie rente, som er konstant frem til opsjonens forfall.
- Aksjen gir ikke noe utbytte.
- Markedene er komplette, dvs. alle eiendeler i økonomien har en pris, markedene er alltid åpne og handelen skjer kontinuerlig.

BSM-modellen er:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

6.4.1

Vi skal finne opsjonsprisen ut fra opplysningene i oppgaven. Vi har at $\sigma = 0.40$, $S_0 = 110$, $X = 100$, $r_f = 0.055$ og $T = 90/365 = 0.24658$. Verdien av $\mathcal{N}(\cdot)$ henter vi fra vedlagte normalfordeling.

Vi begynner med d_1:

$$
d_1 = \frac{\ln(110/100) + \left(0.055 + \frac{0.40^2}{2}\right) 0.24658}{0.40\sqrt{0.24658}} = 0.647439
$$

og

$$
d_2 = 0.647439 - 0.40 \cdot \sqrt{0.24658} = 0.448814
$$

Da har vi de to verdiene fra den normaliserte normalfordeling

$$
\mathcal{N}(647439) \sim 0.741326 \qquad \mathcal{N}(0.448814) \sim 0.673217
$$

Med disse verdiene kan vi nå finne opsjonens pris ved å sette inn i (6.7):

$$
C_0 = 110 \cdot 0.741326 - e^{-0.055 \cdot 0.24658} 100 \cdot 0.673217 = \underline{15.131}
$$

6.4.2

Økt volatilitet betyr at prisen på kjøpsopsjonen øker. Høyere volatilitet betyr at aksjekursen kan nå høyere nivåer enn før, noe som betyr en høyere verdi av kjøpsopsjonen.

6.4.3

Vi skal altså finne prisen på en salgsopsjon med samme utøvelseskurs. Det kan vises at en eksplisitt formel for salgsopsjonen er som følger:

$$
P = e^{-r_f T} X \left[1 - \mathcal{N}(d_2)\right] - S\left[1 - \mathcal{N}(d_1)\right] \tag{6.8}
$$

Vi har allerede regnet ut de sentrale størrelsene i (6.8). Innsetting gir med en gang:

$$
\begin{aligned}
P &= e^{-0.055\cdot 0.24658} 100.00 \, [1 - 0.673217] - 110.00 \, [1 - 0.741326] \\
&= \underline{3.78}
\end{aligned}
$$

Kapittel 7

Kontinuasjonseksamen 2014

7.1

1. Her venter jeg gode definisjoner på arbitrasjefrie markeder; umuligheten av å oppnå en avkastning større risikofri investering uten å foreta investeringer og uten å ta risiko.

2. Avvik skyldes først og fremst reguleringer.

7.2

7.2.1

Den gjennomsnittlige avkastning $E(r_1)$ for en enkeltaksje 1 er definert som

$$E(r_1) = \sum_{s=1}^{S} p_s r_{1s} \tag{7.1}$$

Standardavviket σ_1 er likedan

$$\sigma_1 = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} p_s \left(r_{1s} - E(r_1)\right)^2} \tag{7.2}$$

Her er

p_s	Sannsynligheten for tilstand s
r_{1s}	Avkastningen for selskap (eller aksje) 1 i tilstand s
S	Alle tilstander
$E(\cdot)$	Forventningsoperatoren til uttrykket inne i parentesen

Tabell 7.1 Utregning av forventet avkastning og risiko for fondet L

s	p_i	r_i	$p_i \cdot r_i$	$r_i - E(r_1)$	$(r_i - E(r_1))^2$	$p_i (r_i - E(r_1))^2$
1	0.2	10.00	2.00	2.40	5.76	1.15
2	0.4	8.00	3.20	0.40	0.16	0.06
3	0.4	6.00	2.40	-1.60	2.56	1.02
	1.0	$E(r_1)$	7.60		σ_1^2	2.24
					σ_1	1.50

Tabell 7.2 Utregning av forventet avkastning og risiko for fondet H

s	p_i	r_i	$p_i \cdot r_i$	$r_i - E(r_2)$	$(r_i - E(r_2))^2$	$p_i (r_i - E(r_2))^2$
1	0.2	-5.00	-1.00	-18.00	324.00	64.80
2	0.4	10.00	4.00	-3.00	9.00	3.60
3	0.4	25.00	10.00	12.00	144.00	57.60
	1.0	$E(r_2)$	13.00		σ_2^2	126.00
					σ_2	11.22

7.2.2

Vi trenger et mål på porteføljens risiko og avkastning for å svare på dette spørsmålet.

Definer nå *kovariansen* σ_{12} mellom de to aksjene 1 og 2:

$$\sigma_{12} = \sum_{s=1}^{S} p_s (r_{1s} - E(r_1))(r_{2s} - E(r_2)) \tag{7.3}$$

Dette målet viser om aksjene beveger seg i samme eller motsatt retning.

Korrelasjonen ρ_{12} mellom to aksjer er definert som:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \tag{7.4}$$

Korrelasjonen har sin laveste verdi ved -1.0, sin høyeste ved +1.0. Det følger fra (7.4) at

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \tag{7.5}$$

Vi er nå i stand til å undersøke forholdet mellom risiko og avkastning i en portefølje. Anta at w er andelen av formuen plassert i eiendel 1, mens andelen $(1-w)$ befinner seg i eiendel 2. I resten av kapitlet holder vi oss til en portefølje med to eiendeler.

Porteføljens avkastning

$$E(r_p) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{7.6}$$

Porteføljens risiko:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}}\end{aligned} \tag{7.7}$$

Før vi går videre, regnes kovarians og korrelasjonskoeffisient ut.

Tabell 7.3 Utregning av kovariansen mellom H og L

s	p_i	$r_i - E(r_1)$	$r_i - E(r_2)$	$p(r_i - E(r_1))(r_i - E(r_2))$
1	0.2	2.40	-18.00	-8.64
2	0.4	0.40	-3.00	-0.48
3	0.4	-1.60	12.00	-7.68
			σ_{12}	-16.80

Korrelasjonen: $\rho_{12} = \dfrac{-16.80}{1.50 \cdot 11.22} = -1.0$

Det er enkelt å finne MVP. Beregn den deriverte porteføljens risiko og sett resultatet lik null. Fra dette uttrykket fremkommer den w som minimaliserer porteføljens risiko. Bruk porteføljens varians:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w\sigma_{12} - 2w^2\sigma_{12}\end{aligned}$$

Den deriverte av denne er

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12} - 4w\sigma_{12} = 0 \Big| \frac{1}{2} \\ &= w\sigma_1^2 + w\sigma_2^2 - 2w\sigma_{12} = \sigma_2^2 - \sigma_{12}\end{aligned}$$

som impliserer at

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{7.8}$$

Vi anvender denne formelen i vår oppgave, og får:

$$w = \frac{126.00 - (-16.80)}{2.24 + 126.00 - 2(-16.80)} = 0.88235$$

Vi ville altså sette 88.24% av formuen i lavrisikofond L og $(1 - 0.8824)100 = 11.76\%$ i høyrisikofondet H, hvis vi ønsket å oppnå MVP.

Vi kunne også gjort det enklere. Vi ser jo at korrelasjonskoeffisienten er -1.0, d.v.s. vi har perfekt negativ korrelasjon mellom fondene. Vi kan altså sette:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2(-1.0) = 0$$

Uttrykket kan omformuleres slik:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 - 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 + (1-w)^2\sigma_2^2 = 0$$

Vi gjenkjenner uttrykket foran det siste likhetstegnet som

$$\sigma_p^2 = (w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2)^2 = 0$$

Skal dette oppfylles, må

$$w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2 = 0$$

Vi kan dermed finne w:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{7.9}$$

Innsetting:

$$w = \frac{11.22}{1.50 \cdot 11.22} = 0.88208$$

som altså er den samme som ovenfor, bortsett fra en avrundingsfeil.

7.2.3

Oppgaven krever altså at $\sigma_P = 1.0$. Da har vi at

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} = 1.0$$

Vi setter inn verdier vi allerede har regnet ut:

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \sqrt{w^2 2.24 + (1-w)^2 126.00 + 2 \cdot w(1-w) 1.50 \cdot 11.22(-1.0)} = 1.0 \\
\sigma_p^2 &= w^2 2.24 + 126.00 - 252.00w + 126.00w^2 - 33.66w + 33.66w^2 = 1.0 \\
&= 161.90w^2 - 285.66w + 125.00 = 0
\end{aligned}$$

Vi har altså en kvadratisk ligning av formen $aw^2 + bw + c = 0$ som løses med:

$$w = \frac{-(-285.66) \pm \sqrt{285.66^2 - 4 \cdot 161.90 \cdot 125.00}}{2 \cdot 161.90} : w_+ = 0.96, \qquad w_- = 0.80$$

Vi er interesserte i den porteføljen som gir høyest avkastning for denne risikoen. Vi finner da avkastningen for de to porteføljene:

$$\begin{aligned}
w &= 0.96 \qquad E(r_P) = 0.96 \cdot 7.60 + 0.04 \cdot 13.00 = 7.82 \\
w &= 0.80 \qquad E(r_P) = 0.80 \cdot 7.60 + 0.20 \cdot 13.00 = 8.68
\end{aligned}$$

$w = 0.80$ er altså den porteføljen som gir den høyeste avkastningen for en risiko på 1.0. Denne porteføljen befinner seg på effisiensgrensen, samlingen av alle de porteføljer som maksimerer avkastning for en gitt risiko.

7.3

7.3.1

Verdien av de gjenværende kontantstrømmer ved prosjektets begynnelse:

$$V_0^L = \sum_{t=0}^{T} \frac{K_t}{(1 + r_{wacc})^t} \tag{7.10}$$

Kapitalkostnaden r_{wacc} er beregnet fra

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + (1 - \tau_c) \frac{D}{E+D} r_D \tag{7.11}$$

Kapitalkostnaden er:

$$r_{wacc} = \frac{1000}{1500} 15.00 + (1.00 - 0.27) \frac{500}{1500} 8.00 = 11.95\%$$

Beregning av kontantstrømmer og NNV er vist i tabell 7.4.

Gjenværende verdi V_0^L er altså 114.66. Prosjektet viser positiv NNV og bør

Tabell 7.4 Utregning av prosjektets netto nåverdi ved hjelp av totalkapitalmetoden

	Periode			
	0	1	2	3
Salg		200.00	250.00	225.00
Solgte varers kostnad		-75.00	-93.75	-84.38
Driftsutgifter		-80.00	-90.00	-87.00
Avskrivning		-29.00	-29.00	-29.00
EBIT		16.00	37.25	24.63
Bedriftsskatt 27%		-4.32	-10.06	-6.65
Avskrivning		29.00	29.00	29.00
Investeringer	-87.00			
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00
Fri kontantstrøm	-87.00	40.68	56.19	46.98
Nåverdier	-87.00	36.34	44.84	33.48
NNV	27.66			

altså gjennomføres.

7.3.2

Justert nåverdi får vi når vi beregner virkninger av investeringen og finansiering hver for seg og legger sammen. Vi skal altså diskontere den frie kontantstrømmen med kapitalkostnaden til et gjeldfritt selskap. Dette er jo det samme som r_{wacc} uten skattejustering, dvs:

$$r_U = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_{wacc} \text{ før skatt} \tag{7.12}$$

Dette er jo også det samme som avkastningskravet til prosjektets eiendeler, eller prosjektets forretningsrisiko. Denne er jo den samme uansett gjeldsnivå, og etter Modigliani and Miller (1958) er den gjennomsnittlige kapitalkostnaden uberørt av gjeldsnivå. Vi har dermed at

$$r_U = \frac{2}{3} \cdot 15.00 + \frac{1}{3} \cdot 8.00 = 12.67$$

Investeringsdelen til prosjektet har dermed verdien

$$V^U = \frac{40.68}{1.1267^1} + \frac{56.19}{1.1267^2} + \frac{46.98}{1.1267^3} = 113.22$$

Neste oppgave er finne nåverdien av renteskattefordelen. Vi må beregne gjeldskapasiteten fra tabell 7.4, renter som er betalt i hvert år og så renteskattefordelene av disse betalingene. Rentene er selvsagt gitt av

$$\text{Renter betalt i år } t = r_D \cdot D_{t-1} \tag{7.13}$$

Gjeldskapasiteten D_t er gitt av

$$D_t = d \cdot V_t^L \tag{7.14}$$

Her er d målsettingen om gjeldsandel og V_t^L er prosjektets gjenværende nåverdi på tidspunkt t. Prosjektets gjenværende nåverdi på hvert tidspunkt t kan ta utgangspunkt i siste året og arbeide seg fremover. Den neddiskonterte verdien i hver periode må jo være lik neste periodes kontantstrøm og V_t^L:

$$V_t^L = \frac{K_{t+1} + V_{t+1}^L}{1 + r_{wacc}} \tag{7.15}$$

Tabell 7.5 Beregning av gjeldskapasitet og renteskattefordel

	0	1	2	3
Fri kontantstrøm		40.68	56.19	46.98
Gjenværende verdi	114.66	87.68	41.96	0.00
Gjeldskapasitet	38.22	29.23	13.99	0.00
Renter 8%		3.06	2.34	1.12
Renteskattefordel		0.83	0.63	0.30

Nåverdien av renteskattefordelen (RSF) er

$$NNV_{RSF} = \frac{0.83}{1.1267} + \frac{0.63}{1.1267^2} + \frac{0.30}{1.1267^3} = 1.44$$

og dermed er $JNV = 113.22 + 1.44 = 114.66$ som før.

7.3.3

Beregningene stemmer altså med tidligere metoder. Kontanstrømmen diskonteres nå med kapitalkostnaden for egenkpaitalen, r_E.

Endring i lån er fremkommet ved $\Delta D_t = D_t - D_{t-1}$ der D er gjelden. Beregningene er vist nedenfor.

Tabell 7.6 Beregning av prosjektverdien etter EK-metoden

	0	1	2	3
EBIT		16.00	37.25	24.63
Renteutgifter		-3.06	-2.34	-1.12
Driftsresultat før skatt		12.94	34.91	23.51
Bedriftsskatt 27%		-3.49	-9.43	-6.35
Driftsresultat		9.45	25.49	17.16
Avskrivning		29.00	29.00	29.00
Investeringer	-87.00			
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00
Endring i lån	38.22	-8.99	-15.24	-13.99
Fri kontantstrøm til eierne	-48.78	29.45	39.25	32.17
Nåverdier	-48.78	25.61	29.68	21.15
NNV	27.66			

Tabell 7.7 Beregning av endring i lån, d.v.s. tilgang til kreditt og betaling av avdrag på lånet

	0	1	2	3
Fri kontantstrøm	-87.00	40.68	56.19	46.98
Gjenværende verdi	114.66	87.68	41.96	0.00
Lånekapasitet	38.22	29.23	13.99	0.00
Endring i lån	38.22	-8.99	-15.24	-13.99

7.4

7.4.1

Forventet verdi er definert ved

$$E\left(S_{i1}\right)=0.5\left(\left(S_{i1H}\right)+\left(S_{i1L}\right)\right) \qquad i=A,B \tag{7.16}$$

S_{i1} er verdi til A eller B og ett-tallet står for periode 1. Vi har:

$$S_{A1}=0.5(125+75)=100$$
$$S_{B1}=0.5(110+90)=100$$

7.4.2

Her brukes en binomisk prismodell. Vi kan finne verdien til en opsjon ut fra:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u-r_f}{u-d}C_d\right] \tag{7.17}$$

Vi forutsetter at utøvelsesprisen er 100. Da har vi for A:

$$C_{0A} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.25)}{0.25-(-0.25)}25.00 + \frac{0.25-0.05}{0.25-(-0.25)}0.00\right] = 14.29$$

Det samme for B:

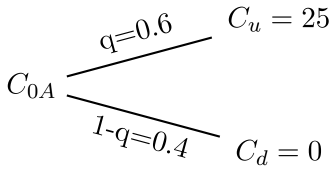
$$C_{0B} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.10)}{0.10-(-0.10)}10.00 + \frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.10)}0.00\right] = 5.71$$

Større volatilitet er positivt for opsjonens verdi.

Vi kan også regne ut de risikonøytrale sannsynlighetene:

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} = 0.60, \qquad 1-q = 0.40$$

Problemet kan nå illustreres slik:

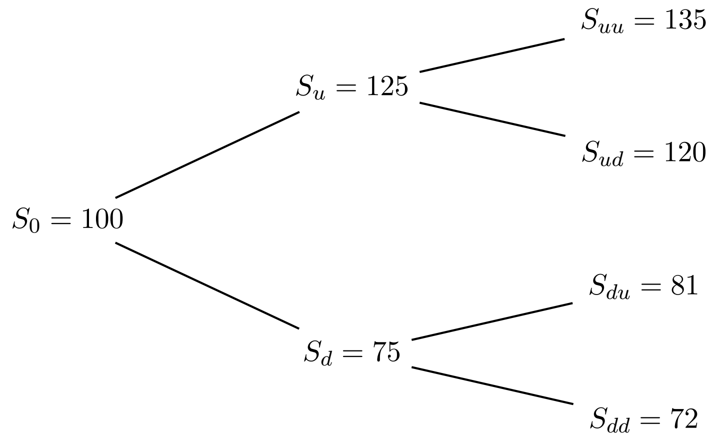


Figur 7.1: Første periodes opsjonsproblem for A med risikonøytral prising

7.4.3

Med den oppgitte veksten vil A-aksjen i periode 2 være en av verdiene $120, 135$ og $72, 81$. B-aksjen vil ha verdiene $105.60, 118.80$ og $86.40, 97.20$. Det kan være hensiktsmessig å vise prisprosessen for begge periodene, se figur 7.2. For A-aksjen har vi altså følgende prisprosess i to perioder:

Figur 7.2 viser at vi får en positiv opsjonsverdi i periode 1, C_u. $C_d = 0$ siden $\max[S_{du} - X] = 0$ og $\max[S_{dd} - X] = 0$. Vi trenger altså bare å regne ut



Figur 7.2: Prisprosessen for A over to perioder

for C_u:

$$C_{uA} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.04)}{0.08-(-0.04)}35.00 + \frac{0.08-0.05}{0.08-(-0.04)}20.00\right] = 29.76$$

Nå kan vi finne opsjonsverdien i periode 0:

$$C_{0A} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.25)}{0.25-(-0.25)}29.76 + \frac{0.25-0.05}{0.25-(-0.25)}0.00\right] = 17.01$$

Som ventet, siden det er lenger tid til forfall, er opsjonen mer verdt, selv om veksten i siste periode er mindre enn i første.

På samme måte finner vi for aksjen B at opsjonen er verdt

$$C_{uB} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.04)}{0.08-(-0.04)}18.80 + \frac{0.08-0.05}{0.08-(-0.04)}5.60\right] = 14.76$$

I dag er opsjonen verdt:

$$C_{0B} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.10)}{0.10-(-0.10)}14.76 + \frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.10)}0.00\right] = 8.44$$

Endringen i opsjonsverdi er større for B enn for A. For begge er lenger tid til forfall positivt, men for B øker volatiliteten og den avtar for A.

Kapittel 8

Eksamen 2014

8.1

8.1.1

Prisen på en obligasjon som betaler en årlig rente er:

$$B = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{8.1}$$

Utregning av obligasjonens pris i denne oppgaven er gitt av tabell 8.1

Tabell 8.1 Prisen på obligasjonen

År	KS	Rente-faktor	Nåverdi
1	5	0.9302	4.65
2	5	0.8653	4.33
3	5	0.8050	4.02
4	5	0.7488	3.74
5	5	0.6966	3.48
5	100	0.6966	69.66
Pris			89.89

Rentefaktoren er

$$\text{Rentefaktor} = \frac{1}{(1+r)^t}$$

8.1.2

En nullkupongobligasjonen betaler ikke renter i perioden frem til forfall. Ved forfall innløses M. Det kan vises at avkastning til forfall for en nullkupong-obligasjon er:

$$y_T = \left(\frac{M}{B}\right)^{1/T} - 1 \tag{8.2}$$

For år 5 får vi at avkastning frem til forfall er:

$$y_5 = \left(\frac{50.00}{34.73}\right)^{1/5} - 1 = 0.0756 \qquad 7.56\%$$

De øvrige avkastningene til forfall er vist i tabell 8.2.

Tabell 8.2 Avkastning til forfall for de ulike nullkupongobligasjonene

År	1	2	3	4	5	5
Pålydende	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	1000.00
Pris	47.17	44.08	40.81	37.44	34.73	694.62
Avkastning	6.00	6.50	7.00	7.50	7.56	7.56

Avkastningskurven er altså stigende.

8.1.3

Vi kan beregne prisen på obligasjonen ved hjelp av avkastning til forfall ut fra følgende sammenheng:

$$B(T) = \frac{C}{(1+y_1)^1} + \frac{C}{(1+y_2)^2} + \cdots + \frac{C+M}{(1+y_T)^T} \tag{8.3}$$

hvor $B(T)$ markerer at dette er en kupongobligasjon med T år til forfall. Innsetting gir umiddelbart:

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{5}{1.060} + \frac{5}{1.065^2} + \frac{5}{1.070^3} + \frac{5}{1.075^4} + \frac{5}{1.0756^5} + \frac{100}{1.0756^5} \\ &= 4.717 + 4.408 + 4.081 + 3.744 + 3.473 + 69.462 \\ &= \underline{89.89} \end{aligned}$$

som er det samme som vi fikk for beregningen av prisen på kupongobligasjonen. Vi kan altså bruke avkastningen til forfall for et sett nullkupongobligasjoner til å prise obligasjonen med kupongutbetalinger. Nullkupongobligasjonene replikerer til sammen kupongobligasjonen.

8.2

8.2.1

Vi bestemmer kravet til avkastning fra kapitalverdimodellen (KVM):

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \tag{8.4}$$

hvor $E(r_i)$ er forventet avkastning på aksje i, eller avkastningskravet, r_f er risikofri rente, $E(r_m)$ er forventet avkastning på markedsporteføljen og β_i er aksjens følsomhet overfor endringer i markedsporteføljen.

β_i er ikke oppgitt direkte, men vi kjenner dens verdi ut fra sammenhengen

$$\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \cdot \rho_{im} \tag{8.5}$$

Her er σ_i volatiliteten til aksje i, σ_i volatiliteten til markedsporteføljen og ρ_{im} er korrelasjonen mellom aksjen og markedsporteføljen. Alle de opplysningene vi trenger for å beregne β_i er gitt i oppgaven. For aksje B har vi dermed:

$$\beta_B = \frac{15}{10} \cdot 0.75 = 1.13$$

og kravet til avkastning er:

$$E(r_B) = 3.00 + (7.00 - 3.00)1.13 = 7.50$$

Vi gjør tilsvarende for de andre aksjene og har resultatene i tabell 8.3.

8.2.2

Tabell 8.3 viser også viser også en beregning av alfa. Alfa er meravkastning utover kravet til avkastning $\alpha = r_{i,ny} - E(r_i)$. I likevekt skal $\alpha = 0$, men ny informasjon kan bidra til at $\alpha \neq 0$.

Ut fra opplysningene i tabell 8.3 ville jeg investere i aksjene B, D og E, og jeg ville selge i aksjene A og C.

Tabell 8.3 Beregning av krav til avkastning for aksjene

Selskap	Forventet avkastning	Beta	Krav til avkastning	Alfa
A	18.00	4.00	19.00	-1.00
B	15.00	1.13	7.50	7.50
C	7.00	1.20	7.80	-0.80
D	7.00	0.30	4.20	2.80
E	3.00	-0.10	2.60	0.40
Marked	7.00	1.00	7.00	0.00
Risikofri	3.00			

8.2.3

KVM impliserer at en investor bør holde markedsporteføljen. Men det er ganske vanlig at individuelle investorer underdiversifiserer, enten pga. **favoritter**, dvs. man investerer i selskaper man kjenner eller har en forkjærlighet for, for eksempel fotballklubber, eller for **naboeffekten**, dvs. det at man investerer i selskaper som naboer eller venner holder med.

Studier basert på investorers psykologiske mekanismer har brukt ulike forklaringer på underdiversifisering. Det kan være *overdreven selvtillit* eller *sensasjonsoppsøking*. Et tegn på overdreven selvtillit oppstår når man mener man har bedre innsikt i verdsettingen av en aksje enn investorer flest. Sensasjonsoppsøking finner sted når man blir inspirert av det neste spennende investeringsmuligheten. Med teknologiaksjer har dette blitt å lete etter "det neste Microsoft".

8.3

8.3.1

Vi ser først på selskapets stilling i starten se tabell 8.4.

Tabell 8.4 Sjans' mulige innbetalinger etter ett år

	Tilstand			
	Gunstig 50%	Ugunstig 50%	Forventet verdi	$NV(r = 10\%)$
Selskapet	180	115	147.50	134.09
Långiverne	110	110	110.00	100.00
Eierne	70	5	37.50	34.09

Vi ser at prosjektet er lønnsomt, idet $NNV = 143.18 - 100 = 43.18$ og det bør derfor gjennomføres.

8.3.2

Nå får Sjans et nytt prosjekt B som er helt uavhengig av prosjekt A. Vi ser på hvordan dette virker inn på betalingene til långivere og eiere. Siden prosjektene er uavhengige, kan gunstigtilstanden for B inntreffe med like stor sannsynlighet i både gunstig- og ugunstigtilstanden for A.

Tabell 8.5 Oversikt over selskapsverdier ved ulike mulige kombinasjoner av A og B. G er Gunstig tilstand, U er Ugunstig.

	Tilstander A		
Tilstander B	G: 180	U: 115	$E(A) = 147.50$
G: 100	280	215	247.50
U: -100	80	15	47.50
$E(B) = 0$			
Sum prosjekter	180	115	147.50

Prosjekt B har altså forventet verdi 0 og dermed en negativ netto nåverdi. Prosjektet burde følgelig ikke gjennomføres. Vi fordeler verdiene i midtruten hvor prosjektene møtes på eiere og långivere, se tabell 8.6.

Tabell 8.6 Fordeling av selskapsverdier på långivere og eiere ved ulike mulige kombinasjoner av A og B

	Tilstander A		
Tilstander B	G: 180	U: 115	$E(A) = 147.50$
G: 100	$D = 110$	$D = 110$	110.00
	$E = 170$	$E = 105$	137.50
U: -100	$D = 80$	$D = 15$	47.50
	$E = 0$	$E = 0$	0.00
$E(B) = 0$			
$E(D)$	95	62.50	78.75
$E(E)$	85	52.50	68.75

Nåverdien av gjeld er 71.59 og for egenkapitalen 62.50. Forskjellen i nåverdi for långiverne er -28.41 ved også å velge prosjekt B, det samme som eierne vinner med motsatt fortegn. Det vil altså lønne seg for eierne å gjennomføre prosjekt B. Eierne får i stand en risiko-overveltning på långiverne ved hjelp av et prosjekt med negativ NNV.

8.3.3

Denne tilstanden kan ikke opprettholdes i et fungerende marked. For det første vil man anta at långiverne gjennomskuer konsekvensene av å akseptere prosjekt B. De vil derfor ikke låne mer enn 67.05, den neddiskonterte forventede verdien av lånet. For det andre vil man skrive kontrakter med selskapet som forbyr denne type handlinger. Vi må vente at långiverne sikrer seg mot at selskapsledelsen velger en mer risikabel investeringsstrategi.

8.3.4

Vi kan tenke på selskapet som en opsjon. Eierne har en kjøpsopsjon på selskapets verdier med utøvelsespris lik gjelden. I utgangspunktet har selskapet bare ett prosjekt, A. Ved å utvide selskapet med prosjekt B, øker ikke selskapsverdien, men selskapets volatilitet øker. Økt volatilitet øker generelt en kjøpsopsjons verdi. I dette tilfellet øker eierverdiene på bekostning av långiverne.

8.4

I dette tilfellet må vi bruke en binomisk prismodell. Etter en periode har vi følgende:

$$
\begin{tikzcd}
 & S_u = 110; C_u = 10 & \\
S_0 = 100 \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & X = 100 \\
 & S_d = 96; C_d = 0 &
\end{tikzcd}
$$

Figur 8.1: Aksjens prisprosess og opsjonens verdi i to tilstander

Vi har sammenhengene

$$S_u = S_0(1+u) = 100 \cdot 1.10 = 110; \qquad S_d = S_0(1+d) = 100 \cdot 0.96 = 96$$

8.4.1

Det kan vises at opsjonsprisen for en enperiodisk opsjon er:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}c_u + \frac{u - r_f}{u-d}c_d\right] \tag{8.6}$$

Utregning gir nå:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.04)}{0.10-(-0.04)}10.00 + \frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.04)}0.00\right) \\
&= \frac{1}{1.05}(6.43) \\
&= \underline{6.12}
\end{aligned}
$$

8.4.2

Det kan alternativt investeres i en likeverdig portefølje av aksjer og et lån. Den skal gi samme kontantstrømmer som opsjonen. Vi kan sette:

$$
\Delta S_0 + B \quad
\begin{cases}
\Delta S_u + (1+r_f)\,B = C_u \\
\Delta S_d + (1+r_f)\,B = C_d
\end{cases}
$$

Figur 8.2: Verdien av en porteføljen: To sluttverdier er mulige.

Vi ønsker å finne ut hvor stor andel av aksjen vi bør investere i (Δ) og hvor stort lån vi bør ta opp. Fra figur 8.2 har vi to ligninger og to ukjente, Δ og B:

$$
\begin{aligned}
\Delta S_u + (1+r_f)\,B = C_u \\
\Delta S_d + (1+r_f)\,B = C_d
\end{aligned}
$$

dvs. vi kan løse for de to ukjente, Δ og B. Vi har altså:

$$
\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \qquad \Delta \geq 0 \tag{8.7}
$$

og

$$
B = \frac{C_d - S_d\Delta}{1+r_f} \qquad B \leq 0 \tag{8.8}
$$

Innsetting av verdier vise at:

$$
\Delta = \frac{10.00-0.00}{110-96} = 0.71; \qquad B = \frac{0.00 - 96.00 \cdot 0.71}{1.05} = -65.31
$$

Vi skal altså holde en andel på ca. 71% av porteføljen i aksjen og balansere dette med et lån på 65.31.

Siden porteføljen og opsjonen har samme kontantstrømmer i periode 1, må de også ha samme verdi i periode 0. Dermed har vi opsjonens pris:

$$C_0 = \Delta S_0 + B \tag{8.9}$$

Det betyr at vi har $c_0 = 0.71 \cdot 100 - 65.31 = \underline{6.12}$, som altså er den samme som vi fikk ved hjelp av formel.

8.4.3

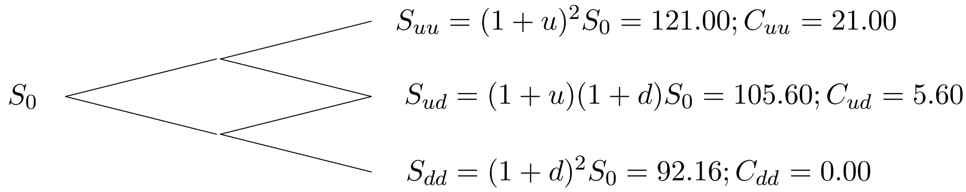
Vi bruker på ny (8.6):

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.04)}{0.20-(-0.04)}20.00 + \frac{0.20-0.05}{0.20-(-0.04)}0.00\right) \\ &= \frac{1}{1.05}(7.50) \\ &= \underline{7.14} \end{aligned}$$

Siden $u = 0.20$ nå og størrelsene ellers er uforandret, betyr det at volatiliteten i aksjen har økt. Opsjonsverdien har følgelig økt, som den skal gjøre.

8.4.4

Vi skal nå vurdere opsjonen hvis forfall først er om to år. Vi må først spesifisere prisprosessen. Etter to perioder kan vi ha to påfølgende økninger eller reduksjoner. I tillegg har vi to tilfeller da prisen veksler. I det ene tilfellet går prisen opp, for så å falle i siste periode. I det andre tilfellet kan prisen falle, for så å øke i siste periode. Figur 8.3 gir oversikt over mulighetene og de tilhørende prisene.



Figur 8.3: Aksjens prisprosess i to perioder: Tre sluttverdier er mulige.

Vi kan regne oss frem til opsjonsprisen ved først å beregne opsjonsverdiene i periode 1 for de to trekantene til høyre i figur 8.3 og så regne ut opsjonsprisen i periode 0 fra verdiene i periode 1. Men det er lettere å bruke risikonøytral prising. Definer sannsynlighetene

$$q = \frac{r_f - d}{u - d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} \tag{8.10}$$

Da kan vi bruke formelen for risikonøytral prising i to perioder:

$$C_0 = \frac{1}{(1 + r_f)^2} \left[q^2 c_{uu} + 2q(1 - q)c_{ud} + (1 - q)^2 c_{dd} \right] \tag{8.11}$$

Vi finner at q og $1 - q$ er:

$$q = \frac{0.05 - (-0.04)}{0.10 - (-0.04)} = 0.6429; \qquad 1 - q = \frac{0.10 - 0.05}{0.10 - (-0.04)} = 0.3571$$

Vi ser at $q + (1 - q) = 0.6429 + 0.3571 = 1.0000$ som sannsynligheter skal være. Nå kan opsjonsverdien regnes ut fra (8.11):

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{(1.05)^2} \left(0.6429^2 21.00 + 2 \cdot 0.6429 \cdot 0.3571 \cdot 5.60 + 0.3571^2 0.00 \right) \\ &= \frac{1}{(1.05)^2} (8.68 + 2.57) \\ &= \underline{10.20} \end{aligned}$$

Ved at tid til forfall er utvidet til to år, har altså opsjonen økt betydelig i verdi. Dette er igjen osm forventet. Med lenger tid til forfall er det større sjanse for at aksjen vil nå høyere verdier.

Kapittel 9

Kontinuasjon vår 2015

9.1

9.1.1

Her kan *eier-* og *interessentperspektivet* (shareholder/stakeholder) diskuteres. Ulike interessenter må listes opp, slik som ansatte, leverandører, kunder, det offentlige etc.

- Eierperspektivet gir en enkel målfunksjon, som bla. innebærer en enkel beslutningsregel: Velg prosjekter med positiv netto nåverdi.
- Med spredt eierskap oppstår agentproblemer. Her kan det utbroderes.
- Interessentperspektivet impliserer en uklar målfunksjon, idet problemer oppstår med aggregering av ulike interessenters målfunksjon i en felles målfunksjon. F.eks. vil eieres og leverandørers målfunksjoner være motsatte.
- Løser interessentperspektivet agentproblemet? Muligheter for drøfting.

Her premieres selvstendig vurdering av spørsmålet.

9.1.2

Anta daglig leder (DL) arbeider i et selskap med spredt eierskap. Vi kan videre anta at eierne har aksjer i flere selskaper, dvis. de holder en diversifisert portefølje. DL er udiversifisert, dvs. inntekten er i holvedsak knyttet til arbeidet for selskapet, og en stor del av hans eller hennes kunnskapskapital er bundet til selskapet.

DL og eierne kan dermed ha ulik risikoholdning. Eierne har diversifisert bort den selskapsspesifikke risikoen, DL har det ikke. DL vil derfor være mer risikoavers enn eierne, og vil derfor ha en tendens til å velge bort prosjekter med høy risiko.

9.1.3

Prosjektet fører altså til høyere volatilitet i aksjen, mens forventet avkastning er den samme. Vi må tolke "forventet avkastning" som avkastningen på prosjektet. Her kan man utnytte at eierne har en kjøpsopsjon på selskapets verdi, der utøvelseskurs er selskapets gjeld. Da er det enkelt å vise at økt volatilitet øker verdien for eierne. De vil altså isolert sett være interessert i å øke risikoen i selskapets aksje.

Det spørres bare om eierne. Men det kan også nevnes at långiverne har en motsatt interesse. De ønsker ikke at selskapet tar en større risiko og dermed setter evnen til tilbakebetaling i fare. Den forventede verdien for långiverne reduseres jo som følge av økt volatilitet.

9.2

Dette er en porteføljeoppgave. Det kan vises at porteføljens avkastning er definert ved

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2, \tag{9.1}$$

og at porteføljens risiko er:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{9.2}$$

9.2.1

Det kan vises at porteføljen med lavest varians kan skrives:

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{9.3}$$

Vi finner da w:

$$w = \frac{84 - 2.64 \cdot 9.17 \cdot 0.05}{6.96 + 84 - 2.64 \cdot 9.17 \cdot 0.05} = 0.923$$

Vi skal altså plassere 92.3% i aksje 1.

Da har vi avkastningen på porteføljen:

$$E\left(r_p\right) = 0.923 \cdot 3.20 + (1 - 0.923) \cdot 14 = 4.03$$

Risikoen er:

$$\sigma_p = \sqrt{0.923^2 6.96 + (1 - 0.923)^2 84^2 + 2 \cdot 0.923(1 - 0.923)2.64 \cdot 9.17 \cdot 0.05} = 2.57.$$

9.2.2

Vi får en risikofri rente r_f som er på 2.00%. Vi kombinerer denne med minimum-variansporteføljen (MVP) og finner meravkastningen til den nye, sammensatte porteføljen $E\left(r_{pr}\right)$:

$$\text{Sharpe-forholdet} = \frac{E\left(r_{pr}\right) - r_f}{\sigma_{pr}} = \frac{\text{Porteføljens meravkastning}}{\text{Porteføljens volatilitet}} \tag{9.4}$$

Meravkastningen avhenger selvsagt av hvor mye som er plassert i den risikofrie eiendelen og hvor mye som er investert i aksjeporteføljen. Hvis andelen i den risikofrie eiendelen er 100%, er jo meravkastningen 0, men hvis alt er investert i aksjeporteføljen, er meravkastningen $4.03 - 2.00 = 2.03$. Meravkastningen vil altså variere mellom 0 og 2.03.

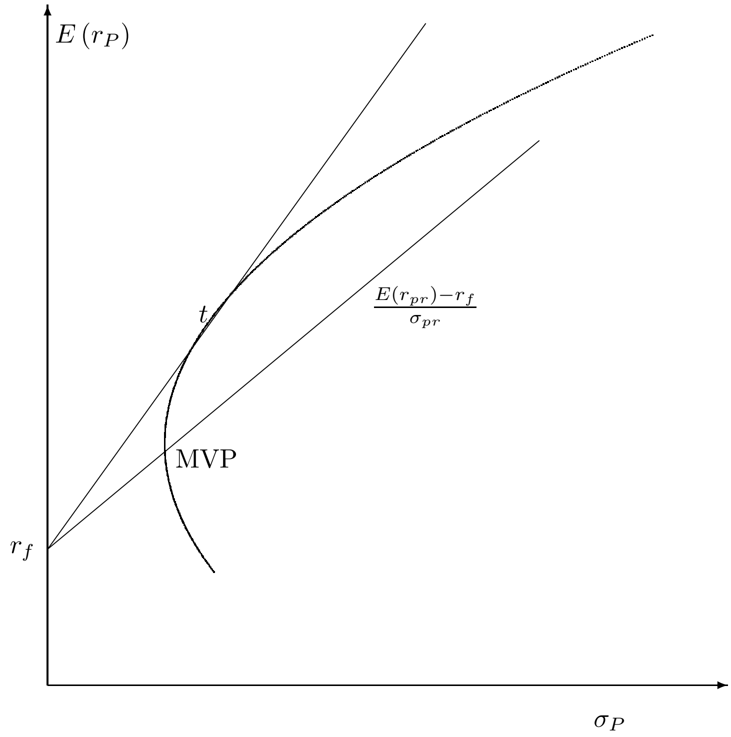
9.2.3

Vi vet at når en risikabel eiendel, f.eks. en portefølje, kombineres med en risikofri eiendel, er linjen rett med utgangspunkt i avkastningen til den risikofrie eiendelen og opp til porteføljen av risikable eiendeler, se figur 9.1. Her er r_f kombinert med MVP i utgangspunktet.

Vi kan forbedre kombinasjonen (r_f, MVP) opp til tangeringspunktet t. Det betyr at vi kan gjøre kombinasjonen bedre opp til den maksimale verdien av Sharpe-forholdet.

Her kreves det ikke at man finner det maksimale Sharpe-forholdet. Men figur 9.1 viser at vi må ha mer av aksje 2 inn i porteføljen, dvs. $w < 0.923$. Vi kan regne ut Sharpe-forholdet til (r_f, MVP)-kombinasjonen med et annet valg av w i aksjeporteføljen. Velger man f.eks. $w = 0.80$, er $E\left(r_p\right) = 5.36$ og $\sigma_p = 2.86$. Sharpeforholdet (SH) er da:

$$SH = \frac{5.36 - 2.00}{2.86} = 1.17$$



Figur 9.1: Kombinasjon av et risikofritt prosjekt og en risikabel portefølje

som er bedre enn Sharpe-forholdet ved MVP:

$$SH_{MVP} = \frac{4.03 - 2.00}{2.57} = 0.79.$$

9.3

9.3.1

Den forventede verdien av prosjektet til Hitt $E(P)$ om ett år er

$$E(P) = 0.5 \cdot 150 + 0.5 \cdot 25 = 87.50$$

Investeringen er 75. Vi diskonterer $E(P)$ med risikofri rente, siden kapitalkostnaden etter kapitalverdimodellen

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i = r_f \tag{9.5}$$

når $\beta_i = 0$. Netto nåverdi er dermed:

$$NNV = \frac{87.50}{1.05} - 75.00 = 8.33.$$

Prosjektet har altså i utgangspunktet positiv forventet netto nåverdi og bør gjennomføres. Egenkapitalen er altså lik selskapets verdi som nå inneholder verdien av prosjektet, dvs. $V_U = E = 75.00 + 8.33 = 83.33$.

9.3.2

I et perfekt kapitalmarked vil lånerenten være den samme som risikofri rente. Vi antar at lånet på 75 er beløpet i år 1. Fordelingen på gjeld og egenkapital vises i tabell 9.1.

Tabell 9.1 Fordeling av kontantstrøm på lån og EK hvis prosjektet finansieres med lån eller egenkapital

	Gunstig	Ugunstig
Kontantstrøm	150.00	25.00
Lånefinansiering		
Lån	75.00	25.00
Egenkapital	75.00	0.00
EK-finansiering		
Egenkapital	150.00	25.00

Kommentarer. Med EK-finansiering bærer eierne all risiko selv. Hvis det ugunstige tilfellet slår til, vil eierne tape 50 siden investeringen er 75. Realiseres det gunstige tilfellet, vil eierne ha økt egenkapitalen med 75. Hvis prosjektet lånefinansieres, unngår eierne tapet i det ugunstige tilfellet, men beholder 75 i økt egenkapital i det gunstige tilfellet. Risikoen for tap er nå veltet over på långiverne. Den forventede tilbakebetaling av gjelden er $0.5(75+25) = 50$, og de taper 50 hvis det ugunstige tilfellet inntreffer.

Långiverne vil neppe se seg tjent med slike utsikter. De vil kreve høy rente for å låne til prosjektet, sikkerhet i andre deler av eiernes formue, og bindende forpliktelser fra Hitts side for å unngå det ugunstige utfallet.

9.3.3

Vi antar igjen at lånerente er den samme som den risikofrie rente. For full EK-finansiering har vi allerede funnet netto nåverdi. Hvis prosjektet lånefinansieres, er nåverdien av forventet egenkapital $E = 0.5 \cdot (75.00 + 0.00)/1.05 = 35.71$ når vi antar at långiverne ikke legger noen restriksjoner på lånet i form av høyere lånerente eller andre kostnadskrevende tiltak. I forhold til EK-finansiering, har altså den forventede netto nåverdi av egenkapitalen økt betydelig, fra 8.33 til 35.71.

Forventet nåverdi av långivernes kapital er:

$$NV_D = 0.5 \cdot \frac{75.00 + 25.00}{1.05} = 47.62$$

Långiverne har altså et forventet tap på 25.60 på sitt opprinnelige utlån på 75.00. Selskapets verdi er som før: $V_L = E+D = 35.71+47.62 = 83.33$.

Långiverne vil gjennomskue denne risiko-overveltingen som eierne legger opp til. De vil derfor enten ikke delta i finansieringen og/eller kreve vilkår som sikrer deres kapital.

9.3.4

Krise- og konkurskostnader (KK) er 10 i det svake alternativet. I dette alternativet får eierne ingenting og långivernes utbetaling er altså nå 15. Nåverdien av lånet er denne gang:

$$NV_D = 0.5 \cdot \frac{75.00 + 15.00}{1.05} = 42.86 \tag{9.6}$$

Nåverdien av KK er altså 4.76. Egenkapitalen er i utgangspunktet uendret, slik at ny verdi av selskapet er $V_L = 35.71 + 42.86 = 78.57$.

9.3.5

Det er altså 1 million aksjer i selskapet. Før gjeldsopptaket er da aksjekursen 83.33. Långiverne er ikke villige til å betale KK. Investorene forutser dette og justerer kursen på aksjen ned til 78.57. Vi ser i (9.6) at gjelden nå har verdien 42.86. Det er denne gjelden Hitt nå kjøper tilbake. Hitt vil altså kjøpe

$$\text{Tilbakekjøpte aksjer} = \frac{42.86m}{78.57} = 545,500.83 \sim 545,500 \text{ aksjer}$$

Det er derfor 454,500 aksjer tilbake i selskapet. Den nye aksjekursen er dermed:

$$\text{Aksjekurs} = S_0 = \frac{35.71m}{454,500} = 78.57.$$

9.4

Dette er en opsjonsoppgave hvor vi bruker kjente definisjoner og formler.

9.4.1

Vi bruker formelen fra Black-Scholes-Merton (BSM) for å løse denne delen av oppgaven. Forutsetningene for modellen oppsummeres slik:

- Prisprosessen er kontinuerlig.
- De finansielle markedene er perfekte, dvs. uten transaksjonskostnader og skatter. Short-salg er tillatt, og eiendelene er perfekt oppdelbare.
- Alle investorer kan låne og låne ut til samme risikofrie rente, som er konstant frem til opsjonens forfall.
- Aksjen gir ikke noe utbytte.
- Markedene er komplette, dvs. alle eiendeler i økonomien har en pris, markedene er alltid åpne og handelen skjer kontinuerlig.

BSM-modellen er:

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Vi har at $\sigma = 0.40$, $S_0 = 65.00$, $X = 60.00$, $T = 0.5$ og $r_f = 0.05$. Innsetting i (9.7) viser at $C_0 = 10.66$.

9.4.2

Vi skal finne verdien på en salgsopsjon når vi allerede kjenner verdien av kjøpsopsjonen på den samme aksje. Vi går ut fra *salg-kjøps-pariteten*:

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f} X = P_0 + S_0 \qquad \text{eller} \qquad C_0 + \frac{1}{1+r_f} X - P_0 - S_0 = 0 \tag{9.8}$$

Nå er jo salgsopsjonen gitt av de tre andre størrelsene i (9.8):

$$P_0 = C_0 + \frac{1}{1+r_f} X - S_0$$

Har vi altså funnet prisen på en (europeisk) kjøpsopsjon, kan vi altså alltids finne prisen på en tilsvarende salgsopsjon.

T er altså et halvt år. En enkel tilnærming til halvtårsrenten er å dele helårsrenten på to. Vi finner da at prisen på salgsopsjonen bør være:

$$P_0 = 10.66 + \frac{1}{1.025} \cdot 60.00 - 65.00 = 4.20.$$

9.4.3

Salgsopsjonen omsettes for 5.00. Da bør en investor være i stand til å få en *arbitrasjegevinst* på $5.00 - 4.20 = 0.80$ pr. opsjon.

Tabell 9.2 Realisering av arbitrasje salgsopsjonen selges for 5.00

Handlinger i dag $t = 0$	Betalinger
Selg aksje, motta S_0	65.00
Selg salgsopsjon, motta P_0	5.00
Kjøp en kjøpsopsjon, betal C_0	-10.66
Lån ut $\frac{1}{1+r_f}X$	-58.54
Samlet kontantstrøm $t = 0$	0.80

Arbitrasjegevinsten på 0.80 realiseres i dag. Samtidig sikrer (9.8) at kontantstrømmen ved forfall er lik null. Vi tjener penger i dag og betaler ikke noe ved forfall.

Kapittel 10

Eksamen 2015

10.1

Fra opplysningene i oppgaven kan vi sette

Symbol	Forklaring	Verdi
$EBIT$	Driftsresultat år 1	2000
DIV	Utbetalt dividende år 1	2000
n	Antall aksjer	200
Div	Dividende pr. aksje år 1	10
r_E	EK-kostnad	10%

10.1.1

Vi benytter at prisen på en aksje med konstant dividende i overskuelig fremtid og med en forutsetning om fast kapitalkostnad er

$$S_0 = \frac{Div}{r_E} \tag{10.1}$$

Da har vi $S_0 = 10/0.10 = \underline{100}$.

10.1.2

Vi har varierende vekst i de nærmeste årene. Det innebærer at vi må bruke den generelle formelen for aksjekursen basert på dividendeutbetalinger i kommende år:

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{10.2}$$

Det letteste er å dele opp denne kontantstrømmen i tre deler. For det første har vi i det første leddet til høyre i (10.2) to veksthastigheter i henholdsvis fem og tre år. Vi kan da skrive dette leddet som

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} = \sum_{t=1}^{6} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \sum_{t=7}^{9} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} \tag{10.3}$$

Vi vet at $Div_2 = Div_1 (1 + g_1)$, der g_1 er veksthastigheten i de første fem årene. Veksthastigheten i de tre siste vekstårene er g_2. Det siste leddet til høyre i (10.2) kan skrives:

$$\frac{S_T}{(1+r_E)^T} = \frac{1}{(1+r_E)^T} \frac{Div_{T+1}}{r_E} \tag{10.4}$$

siden vi har en evig kontantstrøm fra og med år $T + 1$. Nå kan vi beregne høyresidene i (10.3) og (10.4) hver for seg og legge sammen. Vi får resultatet i tabell 10.1.

Tabell 10.1 Beregning av pris

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Div_t		10.00	10.50	11.03	11.58	12.16	12.76	13.02	13.28	13.54	13.54
NV		9.09	8.68	8.28	7.91	7.55	7.20	6.68	6.19	5.74	
$NV\left(\sum_{t=1}^{9} Div_t\right)$	67.33										
Div_{10}/r_E										135.44	
$NV\,(Div_{10}/r_E)$	57.44										
Pris	124.77										

Prisen er altså $S_0 = \underline{124.77}$, ca. 25% høyere enn i tilfellet uten vekst. Vi har brukt *additivitetsprinsippet* for å komme frem til dette resultatet.

10.2

10.2.1

Markedsmodellen er benyttet her:

$$r_{HA} = \alpha + \beta r_{osebx} + u. \tag{10.5}$$

Her er r_{HA} avkastningen til HA og r_{osebx} er avkastningen på markedsindeksen OSEBX. u er et feilledd som fanger opp det vi ikke har forklart med regresjonen. α og β skal beregnes.

Fra markedsmodellen er vi først og fremst interessert i verdien av β. Denne betaen er anslaget på beta i kapitalverdimodellen:

$$r_i = r_f + (r_m - r_f)\,\beta_i \tag{10.6}$$

der r_f er risikofri rente, r_m er forventet avkastning til markedsporteføljen og r_i er forventet avkastning på aksje nr. i. $\beta_m = 1.0$ er beta til markedsporteføljen. Beta til enkeltaksje kan altså være lik markedsporteføljen, eller høyere eller lavere. Beta er et mål på den såkalte systematiske risikoen til markedsporteføljen og til enkeltaksjene.

For å beregne α og β har følgende fremgangsmåte vært benyttet. For det første er det hentet data fra Oslo Børs om HA og den brede aksjekursindeksen OSEBX. Deretter er avkastningen på HA's aksje for hver periode beregnet som $r_{HA} = (S_t/S_{t-1} - 1)\,100$, dvs. vi har brukt aritmetiske avkastninger. Tilsvarende er gjort for OSEBX-indeksen. Til slutt er det gjennomført en enkel regresjon med avkastningen til HA som avhengig variabel og avkastningen på OSEBX som uavhengig variabel. Vi antar at OSEBX er en god tilnærming til markedsporteføljen.

Hvis markedet er rimelig effisient, vil vi vente at $\alpha \approx 0$.

10.2.2

Resultatene fra regresjonen kan skrives:

$$r_{HA} = 0.061 + 1.137 r_{osebx} \tag{10.7}$$

Resultatet viser at $\alpha \approx 0$, og at $\beta_{HA} = 1.137$, dvs. HA-aksjen har noe høyere systematisk risiko enn markedsporteføljen. Vi kan benytte (10.7) til å predikere en forventet avkastning på HA. Antar vi for eksempel at $r_{osebx} = 10\%$, vil vi vente at

$$r_{HA} = 0.061 + 1.137 \cdot 10 = 11.43\%$$

Videre ser vi av tabellene at β_{HA} er signifikant på 1%'s nivå og faktisk enda lavere, mens α ikke er signifikant på vanlig 5%'s-nivå, noe som krever en t-verdi på ca 2.0. Vi kan derfor ikke forkaste en hypotese om at $\alpha = 0$. Tabellene viser videre at $R^2 = 0.148$. Dette viser at regresjonen alt i alt har forklart 14.8% av den totale variasjonen i r_{HA}. Det innebærer at det er mye spredning rundt regresjonslinjen.

10.2.3

For det første kan resultatene nå brukes til å finne EK-kostnaden til HA ved hjelp av kapitalverdimodellen (10.6). Som en illustrasjon har vi at dersom $r_f = 5.0\%$ og $r_m = 10.0\%$, vil den forventede EK-kostnaden være:

$$r_{HA} = 5.0 + (10.0 - 5.)1.137 = 10.67\%$$

Vi bruker gjerne også uttrykket krav til EK-kostnad om denne størrelsen.

Den andre anvendelsen kommer i porteføljeforvaltning. En forvalter vil gjerne vite hvor risikabel porteføljen til sammen er, slik at risikoen er i overensstemmelse med målsettingene for porteføljen. Det kan vises at porteføljens beta er den veide summen av enkeltbetaene i porteføljen, med markedsverdien av den enkelte aksje over samlet markedsverdi i porteføljen som vekt. Kjenner man enkeltaksjenes beta, kan man altså finne porteføljens beta.

10.3

Oppgaven handler om kapitalstruktur, dvs. fordelingen av gjeld og egenkapital i finansieringen av foretaket.

10.3.1

Generelt har vi at

$$V = E + D \tag{10.8}$$

Når kapitalstrukturen ikke påvirker selskapet verdi, må vi ha at

$$V_U = V_L \qquad \text{og} \qquad E_U = E_L + D \tag{10.9}$$

Vi har altså at rentebetalingen er $r_D D = 0.05 \cdot 7500 = 375$.

	Utmark		Utslått	
	Lav KS	Høy KS	Lav KS	Høy KS
EBIT	800.00	1600.00	800.00	1600.00
Renter	0.00	0.00	375.00	375.00
Dividende	800.00	1600.00	425.00	1225.00

10.3.2

Når vi eier 10% i Utmark vil vi få kontantstrømmen $0.10 \cdot 800 = 80$ når KS er lav og tilsvarende 160.00 når den er høy. Kan vi duplisere denne kontantstrømmen? Vi kan utnytte at *EK i selskap uten gjeld* er det samme som *EK i selskap med gjeld pluss gjeld* etter Miller og Modiglianis teori om verdien av selskapet når det er et perfekt kapitalmarked. Dette innebærer at det ikke er skatter, ingen transaksjonskostnader og ingen asymmetrisk informasjon. Videre kan investorer og bedrifter låne og låne ut til samme lånerente.

Når disse forutsetningene er til stede, kan det vises at

$$V_E = V_L \tag{10.10}$$

Verdien av selskapet uten gjeld er altså lik et tilsvarende selskap med gjeld. Videre har vi at

$$V = E + D \tag{10.11}$$

noe som innebærer at

$$E_U = E_L + D \qquad \text{og} \qquad E_L = E_U - D \tag{10.12}$$

Vi kan kjøpe 10% av egenkapital og 10% av gjelden i B. Det gir oss tilgang til kontantstrømmen:

$$EBIT_{lav} = 0.10 \cdot 425 + 0.10 \cdot 375 = 80.00$$
$$EBIT_{hy} = 0.10 \cdot 1225 + 0.10 \cdot 375 = 160.00$$

Vi har altså duplisert kontantstrømmen til Utmark ved å kjøpe egenkapital og gjeld i Utslått. Vi har altså utnyttet den venstre sammenhengen i (10.12).

10.3.3

Dette er det motsatte problemet av det vi hadde i forrige spørsmål. Vi bruker den høye sammenhengen i (10.12). Vi vil replikere, eller etterligne, kontantstrømmen fra det å eie i Utslått med å eie i Utmark og samtidig ta opp et lån på privat hånd. Vi utnytter altså at *EK i selskap med gjeld* er det samme som *EK i selskap uten gjeld pluss privat lån.* Vi låner tilsvarende 10% av gjelden i Utslått og kjøper 10% av aksjekapitalen Utmark. Det gir kontantstrømmene i de to tilstandene:

$$EBIT_{lav} = 0.10 \cdot 800.00 - 0.10 \cdot 375.00 = 42.50$$
$$EBIT_{hy} = 0.10 \cdot 1600.00 - 0.10 \cdot 375.00 = 122.50$$

Vi har altså gjenskapt kontantstrømmene i Utslått ved å kjøpe aksjer i Utmark og samtidig ta opp et lån tilsvarende 10% av gjelden i Utslått.

10.4

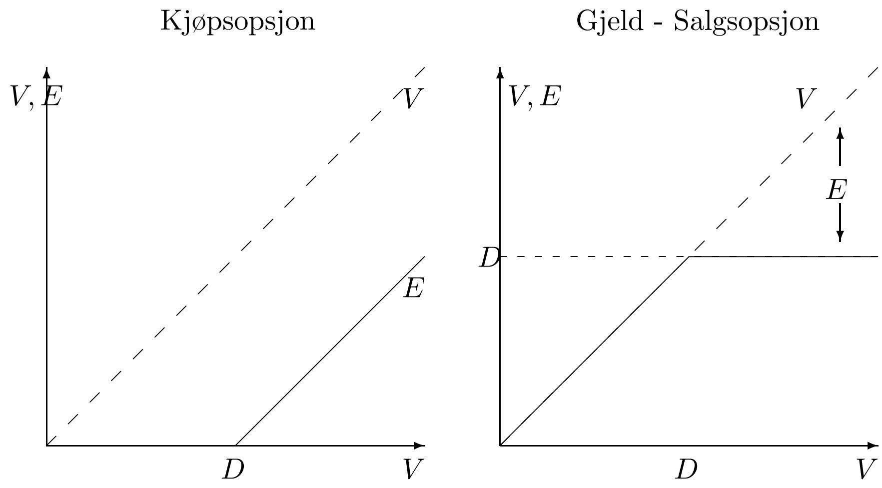
10.4.1

Vi har altså at

$$V = E + D \qquad E = V - D \qquad D = V - E \tag{10.13}$$

Skal egenkapitalen være positiv, må $V > D$. Vi kan tenke på egenkapitalen som en kjøpsopsjon med utøvelseskurs lik gjelden D. Gjelden er på sin side sammensatt av det lånte beløpet minus en salgsopsjon utstedt til eierne med utøvelseskurs lik gjeldens pålydende D. Situasjonen er fremstilt i figur 10.1.

De heltrukne linjene viser at egenkapitalen kan oppfattes som en kjøpsopsjon, gjelden som et lån og en utstedt salgsopsjon til eierne. I diagram-



Figur 10.1: Egenkapitalen som en kjøpsopsjon, gjelden som å holde gjeld og utstede en salgsopsjon til eierne

met til høyre går det frem at eierne selvsagt vil benytte sin salgsopsjon når $E < V - D$.

10.4.2

Det kan vises at prisen på en opsjon avhenger av dens volatilitet, dvs. flyktigheten i den underliggende prisprosessen. Jo høyere volatilitet, jo større verdi på opsjonen. Overført til egenkapitalen som kjøpsopsjon, betyr dette at egenkapitalen er mer verdt, jo større volatilitet aksjen har. Samtidig betyr jo større volatilitet at sannsynligheten for konkurs øker. Konflikter kan oppstå mellom eiere og långivere over nivået på foretakets volatilitet. Långiverne har som målsetting å sikre sine penger og vil ha en tendens til å motsette seg større volatilitet.

10.4.3

De kan frykte *risiko-overveltning*, dvs. at selskapet øker risikoen, noe som øker selskapets verdi, men som påfører långiverne en større risiko. Långiverne bruker låneavtalen til å begrense sin risiko eller å søke kompensasjon for økt risiko. For det første kan de øke lånerenten hvis de ser at at foretaksrisikoen øker. Dernest kan de legge begrensninger på hvilke investorer som har prioritet i utbetalinger. For eksempel kan det komme et krav om at selskapet ikke skal foreta utbetalinger av dividende før gjeldsandelen er nede på et akseptabelt nivå, slik som 40%. Et slikt krav inneholder ofte også at selskapet ikke tar opp nye lån. Et tredje moment er at långiverne kan kreve begrensninger i selskapets investeringsbeslutninger både når det gjelder omfang og type. Långiverne kan frykte at selskapet foretar investeringer med lav sannsynlighet for å lykkes, men stor gevinst hvis det lykkes.

Kapittel 11

Utsatt eksamen 2016

11.1

11.1.1 Aksjeselskap og partnerskap

- Partnerskap. Selskapet eies og drives av flere personer sammen. Eierne er ansvarlige for gjeld.
- Aksjeselskap. Selskapet eies av investorer som bare har ansvar for den kapital som er skutt inn i foretaket. Eierne har *begrenset ansvar*.

Aksjeselskapets *fordeler* ligger i to forhold. For det første er aksjeselskapet et eget rettssubjekt som innebærer at eierne er bare ansvarlige for den kapital som er skutt inn. For det andre er tilgangen på kapital enkel. Selskapet kan ta opp lån på egen hånd og det kan hente inn ny egenkapital hvis det trengs. Et aksjeselskap gjør det relativt enkelt å kjøpe og selge eierandeler, noe som har betydning ved generasjonsskifter og generelt ved eierskifter. Dette gjelder alle slags aksjeselskaper, men fordelene forsterkes hvis selskapet er børsnotert. *Ulemper* kommer først og fremst når selskapet blir stort og uoversiktlig. Det kan bli en stor avstand mellom hva eierne ønsker for selskapet og hva ledelsen ønsker. Agentkonflikter kan opptre når eierne ikke er i stand til å følge godt nok med, eller ledelsen har andre ønsker for selskapet enn det eierne har.

Et partnerskaps *fordeler* er først og fremst den nære tilstedeværelsen til driften av selskapet. Et partnerskap er ofte å finne blant arkitekter, advokater, leger og revisorer. Hver partner har gjerne sin egen kundeliste og så samarbeider man om markedsføring og fellestjenester, slik som et forværelse. Det er godt samsvar mellom partnernes individuelle ønsker og selskapets interesser. *Ulemper* kan oppstå hvis man møter begrensninger på tilgang på kapital i tider man ønsker å ekspandere, og ved eierskifter. En partners verdi ved uttreden kan være vanskelig å fastslå.

11.1.2 Børsnotert og ikke børsnotert

Fordelene for et børsnotert selskap er at det er forholdsvis lett å hente inn ny kapital. Man kan utvide tallet på aksjer og selge de nye i markedet. Siden aksjen er notert, er det rimelig enkelt for investorer å anslå prisen på de nye aksjene. Markedet gir så å si en uavhengig tredjeparts vurdering av prisen. Videre vet investorer at å investere i børsnoterte selskaper, er det forholdsvis lett å komme ut av aksjen igjen. De vil derfor ikke kreve en risikopremie for å sitte på aksjen, med andre ord, egenkapitalkostnaden for børsnoterte selskaper er lavere enn for ikke børsnoterte.

11.1.3 Aksjeselskapsformer

I Norge har vi to typer, AS og ASA. Et børsnotert er alltid et ASA, men ikke alle ASA'er er børsnoterte. Det er flere forhold som skiller AS fra ASA, selv om det meste av lovgivningen for de to aksjeklassene er felles. I et AS kan daglig leder og styreleder være samme person, det er ikke lov i ASA. Et ASA krever mer omfattende rapportering. Et ASA har også bestemmelser om kvotering for kvinner.

11.2

11.2.1

Størrelsen på avkastning og risiko finner vi etter formlene

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}} \end{aligned} \tag{11.2}$$

Symbolene har de vanlige definisjonene. Vi skal finne avkastning og risiko når $w = 0.5$. Avkastningen er etter (A.4):

$$E(r_p) = 0.5(10 + 4) = 7.0\%,$$

og risikoen er fra (A.5):

$$= \left(0.5^2 15^2 + 0.5^2 10^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 0.1\right)^{0.5}$$
$$= 0.5(225 + 100 + 30)^{0.5} = 9.42.$$

11.2.2

Minimum/variansporteføljen finner vi etter formelen

$$w_{min} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{11.3}$$

som gir:

$$w = \frac{10^2 - 15 \cdot 10 \cdot 0.1}{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 0.1} = 0.288.$$

Avkastning er da $E(r_p) = 5.73$ og risikoen er $\sigma_p = 8.69$ etter formlene ovenfor.

11.2.3

Vi har altså at $\rho = -1.0$. Dette betyr at en oppgang i aksje 1 motsvares av en like stor nedgang i aksje 2. Dette er svar på det første spørsmålet i deloppgaven. En perfekt negativ korrelasjon betyr at vi kan finne en portefølje som er risikofri. Vi kan vise dette ved å bruke (A.6). Vi kan også leke oss med en utledning.

Utgangspunktet er at vi kan finne en portefølje som gir $\sigma_p = 0$. Vi kan skrive:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2(-1)} = 0.0 \tag{11.4}$$

En enkel omforming gir:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 - 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 + (1-w)^2\sigma_2^2} = 0.0$$

Under rottegnet gjenkjenner vi nå en kvadrert sum av to ledd:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{(w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2)^2} = 0.0\\ &= w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2 = 0.0\\ &= w\sigma_1 - \sigma_2 + w\sigma_2 = 0.0\end{aligned}$$

som gir muligheten for å isolere w:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{11.5}$$

Det betyr at $w = 10/25 = 0.40$, følgelig $E(r_p) = 6.4$ og risikoen kan vi vise er:

$$\sigma_p = w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2 = 0.4 \cdot 15 - 0.6 \cdot 10 = 0.0$$

11.2.4

I denne delene er det viktig å få frem en del momenter:

- Markedsmodellen avslører hvor mye aksjen reagerer på endringer i markedsporteføljen. En koeffisient til r_{osebx} på 1.0 viser at aksjen har like store utslag i aksjekursen som markedsporteføljen har. Denne koeffisienten er en beregning av aksjens beta, som er en sentral størrelse i kapitalverdimodellen (KVM). I utskriften viser det seg at to aksjer har en beta godt over 1.0, mens den tredje, Marine Harvest, er omtrent 1.0. Alle disse tre koeffisientene er sterkt signifikante, dvs. alle tre har signifikansnivå lavere enn 1%. Det er med andre ord et lite slingringsmonn rundt de estimerte verdiene, og vi kan stole på at betaene er i dette området for den perioden som er studert.
- Når vi kjenner aksjens beta, kan vi beregne selskapets kapitalkostnad ved hjelp av KVM. De øvrige elementene i KVM er risikofri rente og avkastning på markedsporteføljen. Dette er offentlig tilgjengelig informasjon. En beta er også nyttig for en porteføljeforvalter som ønsker å holde en bestemt risikoprofil, og dermed kan bruke informasjon om aksjenes beta til å justere risikonivået.
- Den andre koeffisienten, α har verdi nær null og er ikke signifikant, bortsett fra for PGS. $\alpha = 0$ og $\beta \gtreqless 1.0$ er nullhypotesen for testen. Vi kan ikke avvise nullhypotesen for DNB og MH, mens den er delvis avvist for PGS. α er et mål på feilprising i aksjemarkedet. Muligens har den økende usikkerheten om olje- og gassbransjen ført til at modellen ikke fanger opp den prising som foregår imarkedet.

11.3

11.3.1 Perfekte kapitalmarkeder

Et perfekt kapitalmarked har vi når det er ingen skatter eller avgifter, ingen transaksjonskostnader og ingen asymmetrisk informasjon (dvs. både kjøpere og selgere i dette markedet har full informasjon). Da kan et selskaps verdi vurderes ved hjelp av

$$V_E = \frac{EBIT}{r_U} = V_L = \frac{EBIT}{r_U} \tag{11.6}$$

hvor vi har brukt vanlige kjente symboler. Vi kjenner $EBIT$ fra oppgaveteksten. r_U er kapitalkostnaden for et helt EK-finansiert selskap. r_U er derfor også kapitalkostnaden til eiendelene, r_A, som avspeiler den forregtningsmessige risikoen i selskapet. Vi finner r_U fra KVM:

$$E\left(r_U\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_i \tag{11.7}$$

som gir

$$r_U = 6 + (12 - 6)1.5 = 15\%.$$

Fra (A.10) har vi da at

$$V_E = \frac{750}{0.15} = 5000$$

for Hel, som er uten gjeld. For Halv må vi justere kapitalkostnaden. Generelt er kapitalkostnaden gitt av

$$r_E = r_U + \left(r_U - r_D\right)\frac{D}{E} \tag{11.8}$$

Vi ser at $r_E = r_U$ når selskapet er uten gjeld, $D = 0$. Vi kjenner alle størrelsene og setter inn:

$$r_E = 15 + (15 - 6)1.0 = 24.$$

Men halvparten av nødvendig kapital er finansiert med gjeld, slik at samlet kapitalkostnad for Halv må justeres med innslaget av gjeld og dens kostnad. Generelt er dette:

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D}r_E + \frac{D}{E+D}r_D = r_U = r_A \tag{11.9}$$

Vi setter inn i (A.11) of finner:

$r_{wacc} = 0.5 \cdot 24 + 0.5 \cdot 6 = 15.$

Siden kapitalkostnaden er den samme som Hel, selskapet uten gjeld, må de to selskapene ha lik verdi, dvs. $V_U = V_L = 5000$. Dette er jo også det ligning (A.10) forteller.

Konklusjonen er da: I et perfekt kapitalmarked er verdien av et selskap ikke påvirket av måten selskapet er finansiert på. Dette var jo konklusjonen til Miller og Modigliani (1958) om at selskapets finansiering ikke påvirker dets verdi.

11.3.2 Bedriftsskatt

Miller og Modigliani introduserte bedriftsskatter i en senere artikkel. Dette er situasjonen her. Det kan vises at verdien til et selskap uten gjeld kan nå skrives:

$$V_U = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} \tag{11.10}$$

Innsetting gir med det samme:

$$V_U = \frac{750(1 - 0.25)}{0.15} = 3750.$$

Det kan også vises at verdien av selskapet med gjeld kan bestemmes fra:

$$V_L = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = V_U + \tau_c D \tag{11.11}$$

For å regne ut denne verdien, kreves altså størrelsen D. Fra spørsmål 11.3.1 har vi at $V_U = 5000$, det innebærer jo at $D = 2500$. Dermed finner vi:

$V_L = 3750 + 0.25 \cdot 2500 = 4375$

Det er *renteskattefordelen* i $\tau_c D$ som gjør at selskapet med gjeld er mer verdt enn selskapet uten.3

11.3.3 Skatt på bedrift, inntekt og utbytte

Når alle tre skattetyper introduseres, kan det vises at verdien av et selskap kan skrives:

$$V_L = V_U + \left[1 - \frac{(1-\tau_c)(1-\tau_d)}{(1-\tau_i)}\right] \times D = V_U + N^* \times D \tag{11.12}$$

I dette tilfellet er altså verdien av Hel som før, 3750, siden $D = 0$. Vi har at N^* er:

$$N^* = 1 - \frac{(1-0.25)(1-0.00)}{1-0.25} = 0.00$$

Da har vi altså $V_L = V_U = 3750$. Med like satser på bedrifts- og inntektsskatt kombinert med ingen skatt på utbytte, er vi altså tilbake i Miller og Modiglianis første versjon, slik at selskapets verdi ikke påvirkes av dets finansiering.

11.3.4 Kommentarer

11.4 Opsjon

11.4.1 Opsjonsparitet

11.4.2 Definisjoner

Prisen på en kjøpsopsjon kan skrives:

$$C_0 = \max\left[S_0 - X; 0\right] \tag{11.13}$$

og salgsopsjonen:

$$P_0 = \max\left[X - S_0; 0\right] \tag{11.14}$$

Definisjonene lyder:

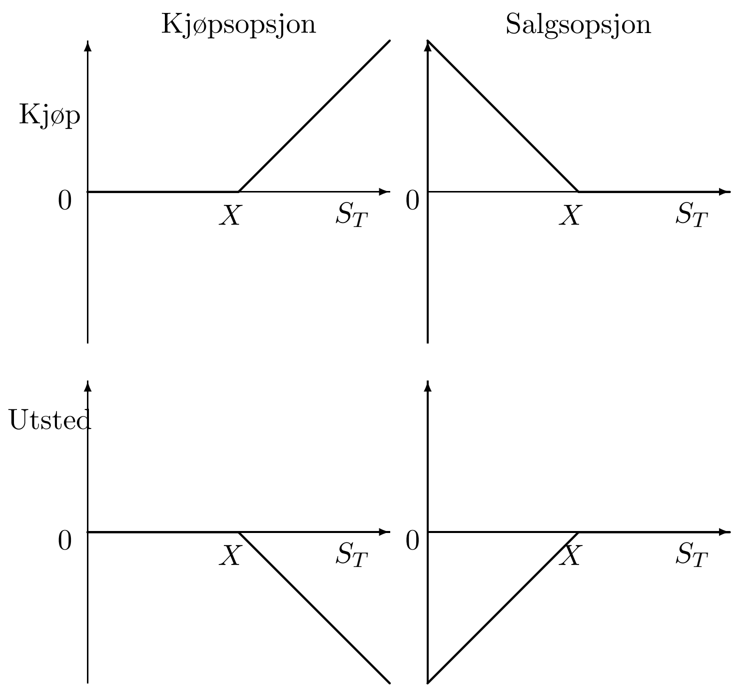
En *kjøpsopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe et bestemt antall aksjer på et bestemt tidspunkt eller før, til en på forhånd avtalt pris (utøvelsesprisen).

Definisjon 11.1: Kjøpsopsjonen

En *salgsopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å selge et bestemt antall aksjer på et bestemt tidspunkt eller før, til en på forhånd avtalt pris (utøvelsesprisen).

Definisjon 11.2: Salgsopsjonen

En opsjon kan kjøpes, eller holdes, og den kan utstedes. Dette gir fire forskjellige avkastningsprofiler for kjøps- og salgsopsjonene, se figur 11.1.



Figur 11.1: Avkastningsprofilene til europeiske kjøps- og salgsopsjoner ved forfall

Siden en eier av opsjonen kan velge å bruke opsjonen eller la være, vil alle avkastningsprofilene ha en knekk ved utøvelsesprisen.

11.4.3 Renteparitet

Vi skal finne kjøpsopsjonens pris, og ser at vi kan bruke paritetssammenhengen for formålet. Følgende sammenheng mellom opsjonspriser, aksjekurs og lån finnes i et arbitrasjefritt marked:

$$C_0 = P_0 + S_0 - \frac{1}{1 + r_f} X \tag{11.15}$$

Vi finner ved innsetting:

$$C_0 = 10 + 75 - \frac{1}{1.05}80 = 8.81.$$

11.4.4 Risikonøytral prising

En aksje har i dag verdi 10.00, som også er kjøpsopsjonens utøvelsespris. I neste periode kan prisen gå opp 20.0% eller falle 2.5%. Risikofri rente i markedet er 5.0%.

1. Hva er kjøpsopsjonens pris i dag? Bruk risikonøytral prising.
2. Anta nå at prisen kan enten gå opp 40% eller falle 5% neste periode. Hva er nå kjøpsopsjonens pris?
3. Hva er de viktigste faktorene som forklarer opsjonens pris?

11.4.5 Kjøpsopsjonens pris

Det kan vises at prisen på en kjøpsopsjon vurdert ved hjelp av risikonøytral prising er gitt av:

$$C_0 = \frac{1}{1 + r_f} [q \cdot C_u + (1 - q) \cdot C_d] \tag{11.16}$$

Vi har at $C_u = \max[12 - 10, 0] = 2$ og $C_d = \max[9.75 - 10, 0] = 0$. Da finner vi:

$$q = \frac{r_f - d}{u - d} = \frac{0.05 - (-0.025)}{0.20 - (-0.025} = \frac{0.075}{0.2251} = 0.33$$

og

$$1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} = \frac{0.20 - (-0.05)}{0.20 - (-0.025)} = 0.67$$

og prisen er:

$$C_0 = \frac{1}{1.05} (0.33 \cdot 2 + 0.67 \cdot 0.00) = 0.63$$

11.4.6 Virkningen av høyere volatilitet

Volatiliteten i aksjekursen øker slik at vi nå får $C_u = \max[14 - 10, 0] = 4$ og $C_d = \max[9.50 - 10, 0] = 0$. Med samme type utregninger som ovenfor, viser det seg at $q = 0.22$ og $1 - q = 0.78$. Da blir den nye opsjonsprisen $C_0 = 0.84$. En høyere volatilitet gir altså en høyere pris på opsjonen.

11.4.7 Hvorfor høyere opsjonspris?

Høyere volatilitet gir altså høyere opsjonspris. Vi ser grunnnen til dette fra uttrykkene for C_u og C_d i de to situasjonene.

Volatilitet	C_u	C_d
$u = 0.20, d = -0.025$	2.00	0.00
$u = 0.40, d = -0.05$	4.00	0.00

Den økte volatiliteten fører bare til at opsjonsverdien i "oppbevegelsen" endres og blir større. Opsjonsverdien påvirkes jo ikke av at avstanden mellom aksjekurs og utøvelseskurs blir større, nå aksjekursen er lavere enn utøvelseskursen. Opsjonen er jo mer verdt, dersom "oppbevegelsen" er større enn tidligere.

Kapittel 12

Eksamen 2016

12.1

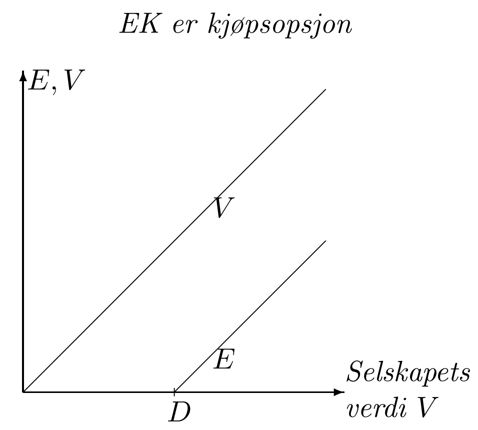
12.1.1 Begrenset ansvar

Når eierne av et selskap har *begrenset ansvar* er de bare ansvarlig for den kapital som er skutt inn i foretaket. Det kan være flere fordeler med et aksjeselskap som har begrenset ansvar:

1. Begrenset ansvar: Hver investor er bare ansvarlig for den kapital vedkommende har skutt inn.
    - Appellerer til mange ulike investorer.
    - Investorene kan *diversifisere* sine investeringer i ulike selskaper og oppnå risikoreduksjon.
2. Overføring av kontroll og utvidelse/innskrenkning av kapitalgrunnlaget er enkelt.
    - Kan hente ny EK når firmaet vokser; utsteder nye aksjer eller tar opp nye lån på selskapets hånd.
    - Eierskiftene er enkle. Feks ved konkurs: Eierkontroll går over fra nåværende eiere til kreditorer.
3. Tillater skille mellom *eierskap* og *ledelse*:
    - Profesjonelle ledere kan hyres
4. Selskapet er en egen "legal person", og kan bl.a. ta opp gjeld.

12.1.2 Aksjeselskapets risiko

Egenkapital kan tolkes som en kjøpsopsjon som er "In-The-Money" når verdien av selskapet er høyere enn selskapets gjeld.



Figur 12.1: Egenkapital som en kjøpsjon

Dette kan stimulere til å ta sjanser, spesielt hvis EK er lav.

12.1.3 Et arbitrasjefritt marked

Et arbitrasjefritt marked er et marked hvor man ikke kan oppnå en positiv netto nåverdi på en investering ved å utnytte prisforskjeller i markedet. I et arbitrasjefritt marked vil loven om en pris gjelde. Finansielle markeder regnes som arbitrasjefrie markeder.

12.2 Positiv alfa?

Investoren kan være på jakt etter såkalte positiv alfa-aksjer. Det er aksjer som har en forventet avkastning høyere enn krav til avkastning etter kapitalverdimodellen, d.v.s.

$$\alpha_s = E(r_s) - r_f - (E(r_m) - r_f)\beta_s > 0 \tag{12.1}$$

Alfa-verdiene er vist nedenfor når opplysningene fra oppgaven er tatt inn.

Aksje	Forventet avkastning	Risikofri rente	Risiko-premie	Beta	Krav til avkastning	Alfa
C	15	5	5	1.75	13.75	1.25
D	11	5	5	1.42	12.10	-1.10
H	10	5	5	0.55	7.75	2.25
D	7	5	5	1.17	10.85	-3.85

Investoren bør sette sine penger i aksjene C og H, som begge har en positiv alfa. En positiv alfa innebærer også at forventet avkastning plasserer seg over SML-linjen i diagrammet med systematisk risiko β og forventet avkastning på henholdsvis horisontal og vertikal akse.

12.3 Renteskattefordel og stresskostnader

12.3.1

Fra Miller og Modigliani vet vi at når vi tar hensyn til bedriftsskatter, vil nåverdien av selskapets renteskattefordel (RSF) være $NV(RSF) = \tau_c \cdot D$.

Stresskostnadene (S) er oppgitt å være nåverdier. Da er forventede stresskostnader $E(S) = Pr(S) \cdot S$. Utregninger er gitt i tabell 12.1.

Tabell 12.1 Beregning av optimalt gjeldsnivå når skattesatsen er 23%

	Gjeld (mill)						
	0	40	50	60	70	80	90
NV(RSF)	0.00	9.20	11.50	13.80	16.10	18.40	20.70
Prob(Stress)	0.00	0.00	0.05	0.07	0.10	0.16	0.31
Stresskostnader	10.00	15.00	20.00	22.00	24.20	26.62	29.28
NV(Stresskostnader)	0.00	0.00	1.00	1.54	2.42	4.26	9.08
Fordel gjeld	0.00	9.20	10.50	12.26	13.68	14.14	11.62
Optimalt gjeldsnivå						80	

12.3.2

Med en bedriftsskattesats $\tau_c = 0.10$ blir optimalt gjeldsnivå flyttet ned til 70 mill. Fordel av gjeld er da 4.58, altså langt under nivået i forrige deloppgave.

12.3.3 Ulike typer stresskostnader

Her er en liste over mulige stresskostnader:

- Direkte kostnader: Advokatkostnader etc. kan bli høye i krisesituasjoner
- Indirekte kostnader: Finansiell stress gir dårligere driftsbeslutninger.
  - *Kunder forlater selskapet* Stoler ikke på at det er i markedet i morgen. EKS.: SAAB

- *Leverandører svikter* Kan kreve kontant betaling. Kan la være å investere i bedriftsspesifikk kunnskap og utstyr
- *Ansatte sier opp* Ansatte føler usikkerhet og ser seg om etter ny arbeidsgiver. Vanskelig å holde på nøkkelpersonell
- *Tap på fordringer* Vansker med å inndrive fordringer, skyldnere mener de har ikke noe å tape på å la være å betale
- *Panikksalg av eiendeler* Kan måtte selge eiendeler på billigsalg for å få likvider til å drive videre
- *Ledelsestid* Ledelsen bruker tid på brannslukking og tar få beslutninger med langsiktige konsekvenser

Det ventes at studenten utdyper i hvert fall et par underpunkter her.

12.4 Signalisering med tilbakekjøp

12.4.1

Selskapsverdien EV til Kjop er gitt av $EV = E + D -$ Kontanter. Da har vi at egenkapitalen i Kjop er $E = EV +$ Kontanter, slik at

$$S_0 = \frac{100m + 10m}{1,1m} = 100.00$$

12.4.2

Kjop kan altså kjøpe tilbake $10m/100 = 100,000$ aksjer. Det er da 1,0m aksjer i tilbake i selskapet. Den gode nyheten sender aksjekursen til $150m/1m = 150.00$ og den dårlige til $50m/1m = 50.00$.

12.4.3

Nyheten er altså kjent internt i selskapet, og så kommer kunngjøringen om tilbakekjøp. Da stiger aksjekursen til $(150 + 10)/1,1 = 145.45$ hvis den gode nyheten inntreffer. med den dårlige nyheten synker aksjekursen til $(50 + 10)/1,1 = 54.55$. Legg merke til at prisutslagene (volatiliteten) i aksjekursen er mindre nå enn i avsnitt 12.4.2, fordi aksjeverdien inneholder jo også de 10m kontanter selskapet har liggende.

12.4.4

Selskapets ledelse ønsker å maksimere aksjekursen. Hvis de vet at nyheten er god, vil de foreta tilbakekjøpet før de annonserer nyheten. Da vil jo kursen stige til 150.00. Hvis nyheten er dårlig, vil de derimot vente. Kursen vil jo da være 54.55 i stedet for 50.00.

12.4.5

Ut fra svaret i avsnitt 12.4.4 vil altså ledelsen annonsere tilbakekjøp uten at der foreligger andre nyheter. Utenforstående investorer vil ta dette som et signal på at ledelsen sitter på gode nyheter, og følgelig vil aksjekursen stige. Hvis selskapet *ikke* har gode nyheter, men likevel annonserer tilbakekjøp, vil utenforstående investorer i etterhånd anse dette som forsøk på kursmanipulasjon. Aksjen kan få en kortsiktig stigning, men vil så falle under tidligere nivå, fordi selskapets ledelse nå har mistet tillit i markedet. En falsk nyhet er altså kostbar i dette tilfellet og selskapene vil avholde seg fra en slik virksomhet. Et signal om tilbakekjøp er altså et *troverdig* signal om en god nyhet.

12.4.6

12.4.7

Vi har en problemstilling med prising av en opsjon når den underliggende aksje følger en binomisk prisprosess. Prisen på aksjen kan altså neste periode være enten $S_u = 50 \cdot 1.15 = 57.50$ eller $S_d = 50 \cdot 0.95 = 47.50$. Kjøpsopsjonen er verdt $C_1 = \max[S_1 - X, 0]$ der fotskriften 1 inneholder både opp- og nedtilstanden, d.v.s. $1 \in [u, d]$. Kjøpsopsjonen er altså åpenbart enten $C_u = 17.50$ eller $C_d = 7.50$. Det kan vises at en generell formel for opsjonsprisen i periode 0 er

$$C_0 = \frac{1}{1 + r_f} \left[\frac{r_f - d}{u - d} C_u + \frac{u - r_f}{u - d} C_d \right] \tag{12.2}$$

Da har vi prisen i dag med opplysningene fra oppgaven:

$$C_0 = \frac{1}{1.05} \left[\frac{0.05 - (-0.05)}{0.15 - (-0.05)} \cdot 17.50 + \frac{0.15 - 0.05}{0.15 - (-0.05)} \cdot 7.50 \right] = \underline{11.90}.$$

Ved å sette

$$q = \frac{r_f - d}{u - d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} \tag{12.3}$$

kan vi prise opsjonen ved hjelp av *risikonøytral prising*:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right] \tag{12.4}$$

I denne oppgaven er opplagt $q = 0.50$.

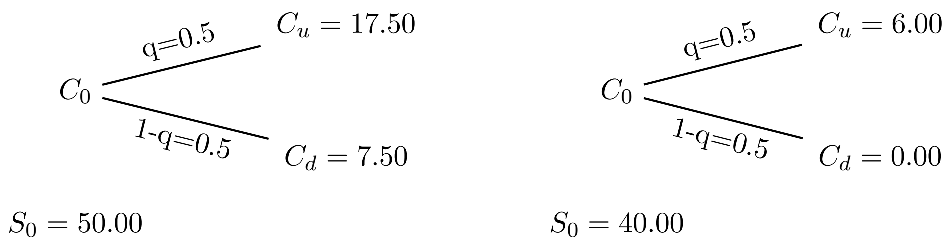
12.4.8

Vi får en ny aksjekurs $S_0 = 40.00$. Prisene blir nå enten $S_u = 40 \cdot 1.15 = 46.00$ eller $S_d = 40 \cdot 0.95 = 38.00$ og opsjonen er i de to tilstandene enten $C_u = 6.00$ eller $C_d = 0.00$. La oss bruke risikonøytral prising for å beregne dagens verdi på kjøpsopsjonen:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}(0.50 \cdot 6.00 + 0.50 \cdot 0.00) = \underline{2.86}.$$

12.4.9

I forrige deloppgave er aksjekursen lavere enn i avsnitt 12.4.7 mens andre forhold ved opsjonen er de samme. Dette svarer til en situasjon der fordelingen av aksjekurs flytter seg til lavere verdier. Når andre forhold holdes konstante, må det bli vanskeligere å oppnå at opsjonen er "In-The-Money". Problemet er illustrert i figur 12.2.



Figur 12.2: Kjøpsopsjonens verdi faller når aksjekursen er lavere

Ved siden av aksjekurs kan andre forhold påvirke opsjonens verdi. En kjøpsopsjon påvirkes av flere forhold. Her nevnes tre viktige i tillegg til aksjekurs:

Utøvelseskurs Jo høyere utøvelseskursen er, jo lavere er kjøpsopsjonens verdi

Volatilitet Jo større volatiliteten er, jo høyere er kjøpsopsjonens verdi

Tid til forfall Jo lengre tid til forfall opsjonen har, jo høyere er kjøpsopsjonens verdi

Kapittel 13

Utsatt eksamen 2017

13.1 Arbitrasje

13.1.1 Arbitrasjefri pris

Aksje	Aksjekurs	Antall	Verdi
Borregaard	84.50	2	169.00
Storebrand	45.92	3	137.76
Aker	154.50	1	154.50
Arbitrasjefri pris			461.26

En *arbitrasjefri pris* er en pris som gjør det umulig å utnytte prisforskjeller på samme gode.

13.1.2

Prisen på Notert er 430. Her oppstår en arbitrasjemulighet, d.v.s. en situasjon hvor det er mulig å oppnå en positiv kontantstrøm uten å ta risiko og uten å investere ved å utnytte prisforskjellen mellom den arbitrasjefrie prisen og prisen i markedet.

Hvordan kan du utnytte arbitrasjemuligheten? Kjøp en andel i Notert, den er jo billig. Selg samtidig alle aksjene i Notert. Inntekten er 461.26 og kostnaden er 430. Arbitrasjegevinsten er 31.26.

13.1.3

Prisen på Notert er nå 475. Her oppstår på ny en arbitrasjemulighet. Nå gjør vi det motsatte av i forrige oppgave. Vi selger en andel i Notert for 475 og kjøper to aksjer i Borregaard, tre i Storebrand og en i Aker. Arbitrasjegevinsten er $475.00 - 461.26 = 13.74$.

13.1.4 Verdiaddivitet

Verdiaddivitet betyr at verdien av en portefølje er summen av eiendelene i porteføljen. Porteføljen i dette tilfellet er en andel i Notert og eiendelene er de tre aksjene. Summen av verdien til aksjene i porteføljen bør være lik den arbitrasjefrie prisen på en andel i Notert.

13.2 Kapitalverdimodellen

Oppgaven inviterer til å bruke KVM:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\,\beta_i \tag{13.1}$$

β_i er jo videre gitt av

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{im}\sigma_i\sigma_m}{\sigma_m^2} = \rho_{im} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \tag{13.2}$$

13.2.1

Fra KVM har vi at kapitalkostnaden i Soek er:

$$E(r_i) = 4 + 10 \cdot 0.75 \cdot \sqrt{\frac{0.09}{0.0625}} = 13\%.$$

Da er netto nåverdi av investeringen:

$$NNV = -650 + \frac{800}{1.13} = \underline{57.96}.$$

$NNV > 0$ og prosjektet bør derfor gjennomføres.

13.2.2 Bedre enn markedsporteføljen?

Her er noen argumenter man kan utbrodere:

- Skal man slå markedsporteføljen, må noen andre tape. Men siden ingen ønsker å tape og alle ønsker å vinne, vil det over tid være svært vanskelig å gjøre det bedre enn gjennomsnittet, markedsporteføljen.
- Mange og godt informerte aktører gir svært små rom for arbitrasjemuligheter.
- Teknologiske endringer i det siste har ført til at informasjonsspredningen er svært rask, og at roboter i dag brukes til arbitrasjehandel.
- Undersøkelser har vist at selv de antatt best informerte aktørene, forvaltere av aksjefond, har store problemer med å slå markedsporteføljen over tid etter at deres kostnader er fratrukket.

13.3 MM med skatt: Rekapitalisering

Oppgaven handler om hvordan selskapet kan fange renteskattegevinsten til fordel for sine eiere ved å utstede gjeld i en situasjon der selskapet i utgangspunktet er gjeldfritt.

13.3.1 Selskapets verdi

Vi ser at Frommes verdi uten gjeld er

$$V_U = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_E} = \frac{106.67(1.00-0.25)}{0.10} = 800.00.$$

Aksjekursen er i utgangspunktet $S = 800/200 = 4$. En ny gjeld skaper en renteskattegevinst og vi har sett at nåverdien av denne er $\tau_c D$, slik at vi har at renteskattegevinsten er $0.25 \cdot 400 = 100$. Frommes nye verdi er dermed

$$V_L = V_U + \tau_c D = \underline{900.00}.$$

13.3.2 Eiernes gevinst

Egenkapitalen er nå selvsagt $E_L = V_L - D$, d.v.s. 500. Men hele verdien av selskapet, 900, tilhører eierne. Alle eierne skal ta del i verdistigningen som følge av rekapitalisering. For at aksjonærer skal være villige til å selge sine aksjer til selskapet, må Fromme tilby en pris på $S_{pre} = 900/200 = 4.50$ pr. aksje, hvor S_{pre} viser til prisen før tilbakekjøp. Investorer hører nyheten om rekapitalisering, og innser med en gang at den nye prisen må være 4.50. Dermed er selvsagt ingen villige til å selge for lavere enn 4.50. Med en gjeld på 400, betyr dette at Fromme kan kjøpe tilbake $N = 400/4.50 = 88.88$ aksjer, d.v.s. 89 aksjer. Da er det 111 aksjer igjen i selskapet. Aksjekursen etter at de 400 er brukt til å kjøpe tilbake aksjer, er $S_{ex} = 500/111 = 4.50$ (med avrunding), hvor S_{ex} er prisen på aksjen etter at tilbakekjøpet er fullført.

Vi kan tenke at hele prosessen foregår i tre etapper som vi illustrerer med en markedsbalanse i tabell 13.1. De tre delprosessene er kunngjøringen, låneopptak og til slutt tilbakekjøpet.

Tabell 13.1 Markedsbalansen for de tre steg i rekapitaliseringen av Fromme

	Opprinnelig	Steg 1 Kunngjøring	Steg 2 Låneopptak	Steg 3 Tilbakekjøp
Eiendeler				
Kontanter	0	0	400	0
Eiendeler (V_U)	800	800	800	800
$NV(RSG)$	0	100	100	100
Sum eiendeler	800	900	1300	900
Gjeld og EK				
Gjeld	0	0	400	400
EK	800	900	900	500
Aksjer	200	200	200	111
Pris pr. Aksje	4.0	4.5	4.5	4.5

Legg merke til at den nye prisen pr. aksje inntreffer allerede på kunngjøringstidspunktet, ikke når tilbakekjøpet foretas. Dette følger av ikkehandelsteoremet. Prisen justerer seg til det nye likevektsnivået så snart informasjonen er kjent.

13.4 Opsjoner – BSM

Her brukes Black–Scholes–Merton–modellen:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
\tag{13.3}
$$

13.4.1 Prisen på en kjøpsopsjon

Vi har alle opplysningene til å beregne (13.3), bortsett fra volatiliteten σ. Vi kan bruke definisjonen av beta i (13.2) for å beregne volatiliteten.

$$\beta_i = \rho_{im} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \Rightarrow 1.0 = 0.5 \frac{\sigma_i}{0.125}$$

som impliserer at $\sigma = 0.25$. Nå kan vi sette inn i (13.3). Vi finner først d_1 og d_2.

$$d_1 = \frac{\ln(100/110) + \left(0.5 \cdot 0.25^2\right) 0.75}{0.25 \cdot \sqrt{0.75}} = -0.15876$$

og

$$d_2 = -0.15876 - 0.25 \cdot \sqrt{0.75} = -0.37527$$

Fra tabellen finner vi at $\mathcal{N}(d_1) = 0.436929$ og $\mathcal{N}(d_2) = 0.353731$. Da kan vi sette inn i (13.3):

$$C_0 = 100 \cdot 0.436929 - 110 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.75} \cdot 0.353731 = \underline{6.21}.$$

13.4.2 Prisen på salgsopsjonen

Prisen på en salgsopsjon med samme utøvelseskurs er gitt av:

$$P_0 = C_0 + e^{-r_f T} X - S_0 \tag{13.4}$$

slik at vi har:

$$P_0 = 6.21 + e^{-0.05 \cdot 0.75} \cdot 110 - 100 = \underline{12.16}$$

13.4.3 Virkning av lavere utøvelsespris

Vi går gjennom de samme beregninger som før og finner at $C_0 = \underline{16.38}$ og $P_0 = \underline{3.07}$. Virkningen av lavere utøvelsespris er altså at kjøpsopsjonen blir mer verdt, mens salgsopsjonen blir mindre. Det er større sannsynlighet for at kjøpsopsjonen ender "in-the-money" sammenlignet med 13.4.1. Samtidig er det mindre sannsynlig at salgsopsjonen blir utøvd.

Kapittel 14

Eksamen 2017

14.1

14.1.1

Her ventes det at man kjenner til viktige organisasjonsformer som:

- Eneeier og partnerskap. Selskapet eies og drives av en person, eller av flere personer sammen. Eierne er ansvarlige for gjeld.
- Samvirke. Foretaket eies av:
  - Leverandørene. Eks.: Meierisamvirket.
  - Ansatte. Eks.: Arbeiderstyrte bedrifter, partnerskap.
  - Forbrukerne. Eks.: Boligsamvirke, Coop.
- Aksjeselskap. Selskapet eies av investorer som bare har ansvar for den kapital som er skutt inn i foretaket. Eierne har *begrenset ansvar*.

14.1.2

Et aksjeselskap er en egen *legal person* og kan bla. ta opp lån i selskapets navn. Fordeler kan være:

1. Begrenset ansvar: Hver investor er bare ansvarlig for den kapital vedkommende har skutt inn.
   - Appellerer til mange ulike investorer, for eksempel både store og små eiere.
   - Investorene kan *diversifisere* sine investeringer i ulike selskaper og oppnå risikoreduksjon.
2. Overføring av kontroll og utvidelse/innskrenkning av kapitalgrunnlaget er enkelt.

- Kan hente ny EK når firmaet vokser; utsteder nye aksjer eller tar opp nye lån på selskapets hånd.
- Eierskiftene er enkle. Feks ved konkurs: Eierkontroll går over fra nåværende eiere til kreditorer. Et generasjonsskifte er enklere. Etterkommere som ikke ønsker å være med lenger kan selge sine aksjer.

3. Tillater skille mellom *eierskap* og *ledelse*:
    - Profesjonelle ledere kan ansettes og eiere kan ta seg av kapitalforvaltning.

Den største ulempen med aksjeselskapet er at det kan oppstå agentproblemer: Styret og daglig leder (DL) gjør beslutninger som ikke nødvendigvis er best for eierne.

- Styret og DL maksimerer egen nytte, som ikke alltid sammenfaller med eiernes interesser.
- DL kan ikke diversifisere, og opplever risiko for oppsigelse. DL vil derfor velge prosjekter med mindre usikkerhet enn det godt diversifiserte eiere vil gjøre.
- Styret kontrollerer ikke DL godt nok.

14.1.3

En fordel med målsettingen om å maksimere selskapets verdi for eierne er at den er klar og enkel. Alternativet er å ha flere målsettinger, for eksempel for miljø, sikkerhet, rettferdighet. Problemet med flersidige målsetting er at de er vanskelige å vurdere mot hverandre. For eksempel kan et selskap vise svak lønnsomhet, men samtidig gjøre det bra på miljøfeltet.

Målsettingen om maksimering gjelder for hele selskapet under ett, ikke for enkeltgrupper slik som ansatte eller samfunnet rundt selskapet. Tilhengere av interessentteorien ("stakeholder theory") hevder at selskapet må ta hensyn til ansatte, leverandører etc., dvs. alle som har en interesse i selskapet. Men disse interessentene forfølger sine egne, avgrensede målsettinger for sin gruppe.

Et selskap som søker å maksimere selskapets verdi for eierne må ta hensyn til kunder, ansatte etc. for å kunne drive forsvarlig og for å overleve i markedet. For eksempel vil en baker som ikke leverer gode varer vil over tid ha problemer med å beholde kunder.

14.2

14.2.1

Vi skal finne forventet avkastning og risiko. Vi definerer "Olje" som eiendel 1 og "Annet" som eiendel 2. Når vi definerer i som tilstand nr. i, finner vi for "Olje":

Til-stand	Sanns p_i	Utfall r_{1i}	$p_i r_{1i}$	$r_{1i} - E(r_1)$	$(r_{1i} - E(r_1))^2$	$p_i (r_{1i} - E(r_1))^2$
1	0.33	40.00	13.33	15.00	225.00	75.00
2	0.33	30.00	10.00	5.00	25.00	8.33
3	0.33	5.00	1.67	-20.00	400.00	133.33
	1.0	$E(r_1)$	25.00		σ_1^2	216.67
					σ_1	14.72

For "Annet" har vi:

Til-stand	Sanns p_i	Utfall r_{2i}	$p_i \cdot r_{2i}$	$r_{2i} - E(r_2)$	$(r_{2i} - E(r_2))^2$	$p_i (r_{2i} - E(r_2))^2$
1	0.33	2.50	0.83	-7.50	56.25	18.75
2	0.33	10.00	3.33	0.00	0.00	0.00
3	0.33	17.50	5.83	7.50	56.25	18.75
	1.00	$E(r_2)$	10.00		σ_2^2	37.50
					σ_2	6.12

Vi skal også finne korrelasjonen mellom de to eiendelene. Da må vi først beregne kovariansen. Den er:

Tilstand	Sanns	$r_{1i} - E(r_1)$	$r_{2i} - E(r_2)$	$p_i (r_{1i} - E(r_1))(r_{2i} - E(r_2))$
1	0.33	15.00	-7.50	-37.50
2	0.33	5.00	0.00	0.00
3	0.33	-20.00	7.50	-50.00
			σ_{12}	-87.50

Siden korrelasjonen er definert som $\rho_{12} = \sigma_{12}/(\sigma_1 \sigma_2)$, har vi at

$$\rho_{12} = \frac{-87.50}{14.72 \cdot 6.12} = -0.97$$

14.2.2 Ulike målsettinger

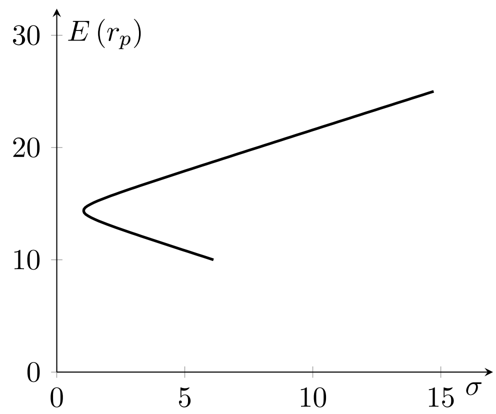
Fondet har en portefølje av "Olje" og "Annet". Avkastning for en portefølje med to eiendeler er:

$$E(r_p) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{14.1}$$

der w er andelen plassert i eiendel 1. Risikoen i porteføljen er definert som:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}}\end{aligned} \tag{14.2}$$

Ved å variere w fra 0.0 til 1.0 fremkommer porteføljefronten i figur 14.1.



Figur 14.1: Porteføljefronten

14.2.3 Maksimal avkastning

Maksimal avkastning får vi ved å plassere hele porteføljen i den eiendelen som har størst avkastning. Det er "Olje". Her får vi en avkastning på 25.00% når $w = 1.0$.

14.2.4 Minimal risiko

Hvis målsettingen er minimal risiko, kan det vises at minimumvariansporteføljen (MVP) er definert av

$$w_{mvp} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{14.3}$$

Innsetting gir:

$$w_{mvp} = \frac{37.50 - (-87.50)}{216.67 + 37.50 - 2(-87.50)} = 0.2913$$

Det viser seg at fondet bør holde 29.13% av investeringene i olje og resten i Annet. Legger man mer vekt på risiko, vil andelen som investeres i oljesektoren nødvendigvis falle.

Med 29.13% i "Olje", viser det seg at porteføljens risiko er:

$$\sigma_p = \left(0.2913^2 216.67 + 0.7087^2 37.50 + 2 \cdot 0.2913 \cdot 0.7087 \cdot (-87.50)\right)^{0.5} = 1.045$$

Dette er også som forventet. Med en korrelasjon $\rho_{12} = -0.97$, forstår vi at det meste av porteføljens risiko er mulig å diversifisere bort.

14.2.5 Målsettinger om avkastning og risiko

14.2.6 Avkastning på 20.0%

Avkastningen av porteføljen er gitt av (14.1). Vi vet avkastningen skal være 20.0%. Innsetting gir videre:

$$E(r_p) = w25.00 + (1 - w)10.00 = 20.00$$

Vi isolerer w og finner at $w = 2/3$ eller 66.67%. Med et avkastningskrav på 20.00%, vil altså to tredjedeler av porteføljen plasseres i "Olje".

14.2.7 Risiko er gitt til 5%

Vi bruker nå (14.2). Fra figur 14.1 ser vi at en risiko på 5.00 inntreffer to ganger. Med alle opplysningene på plass har vi at:

$$\sigma_p = \left(w^2 216.67 + (1 - w)^2 37.50 + 2w(1 - w)(-87.50)\right)^{0.5} = 5.00$$

Med ordning av uttrykket munner dette ut i den kvadratiske funksjonen

$$429.17w^2 - 250.00w + 12.50 = 0$$

som har løsningene

$$w = \frac{250.00 \pm \sqrt{250^2 - 4 \cdot 429.17 \cdot 12.50}}{2 \cdot 429.17} = \frac{250 \pm 202.587}{858.34}.$$

Vi finner at w kan være $w = 0.5273$ og $w = 0.0552$. Figur 14.1 viser at det er to løsninger. Men løsningen med $w = 0.0552$ gir høyere avkastning for den samme risiko. En investor som foretrekker høyere avkastning for samme risiko vil derfor velge denne porteføljen. En kontroll med $w = 0.5273$ viser at

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left(0.5273^2 216.67 + (1-0.5273)^2 37.50 + 2 \cdot 0.5273(1-0.5273)(-87.50)\right)^{0.5} \\ &= 5.0004\end{aligned}$$

dvs. praktisk talt $\sigma_p = 5.00$.

En porteføljerisiko på $\sigma_p = 5.00$ gir som ventet en høyere andel i "Olje", men likevel lavere enn hvis man velger et avkastningsnivå på $E(r_p) = 0.20$.

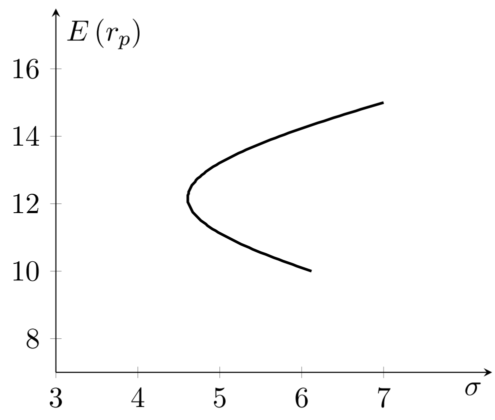
14.2.8 Endring i olje

Først må vi finne avkastning og risiko for "Olje" og "Annet". Ved å bruke kjente formler kommer vi frem til følgende størrelser.

	Olje	Annet
Avkastning	15.00	10.00
Varians	49.00	37.50
Stavvik	7.00	6.12
Korrelasjon	0.00	

14.2.9 Målsetting: Maksimal avkastning

Fremdeles får fondet høyest forventet avkastning dersom man plasserer det hele i olje. Man får nå $E(r_p) = 15\%$.



Figur 14.2: Porteføljefronten når avkastning og risiko endres i "Olje"

14.2.10 Minimal risiko

Vi bruker igjen (14.3) og får nå:

$$w_{mvp} = \frac{37.50 - (7.00 \cdot 6.12 \cdot 0.00)}{49.00 + 37.50 - 2(7.00 \cdot 6.12 \cdot 0.00)} = 0.4335$$

Minimal risiko oppnås nå ved å holde 43.35% i "Olje". Dette er en høyere andel enn det vi først fikk, i deloppgave 14.2.4.

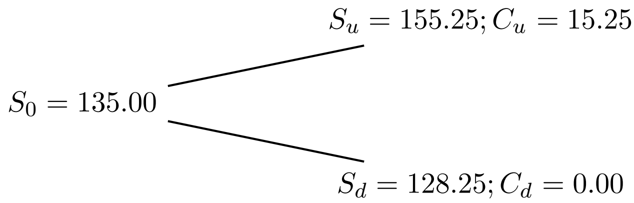
Det er godt mulig at oljesektoren vil se lave oljepriser i tiden som kommer. Men her er det motstridende tendenser.

1. I mange land begrenser man nå bruken av kull til produksjon av elektrisitet og går over til gass og fornybar energi. Overgang til gass tilsier en høyere oljepris.
2. Økt bruk av fornybar energi i sol, vind og vannfall til stadig lavere priser skaper vanskelige konkurranseforhold for olje. Dette tilsier lavere eller ikke stigende oljepris i fremtiden.

14.3

Ut fra opplysningene i oppgaven ser vi at prisprosessen etter en periode gir verdiene

Vi ser av figur 14.3 at utøvelseskursen X må være $X = 155.25 - 15.25 = 140.00$.



Figur 14.3: Prisprosess og opsjonsverdier i utgangspunktet

14.3.1 Opsjonsprisen

For å finne opsjonsprisen starter vi med å danne en replikerende portefølje av en andel aksje og et lån og setter porteføljen lik verdien av opsjonen i de to tilstandene i periode 1. Vi konstruerer altså porteføljen slik at

$$\Delta S_u + (1 + r_f)\, B = C_u \tag{14.4}$$

og

$$\Delta S_d + (1 + r_f)\, B = C_d \tag{14.5}$$

Innsetting av verdier fra oppgaven gir ligningssettet:

$$\Delta 155.25 + 1.05B = 15.25$$
$$\Delta 128.25 + 1.05B = 0.00$$

Vi finner at $\Delta = 0.5648$ og $B = -68.99$. Porteføljen settes altså sammen av 56.48% av aksjen og et lån på 68.99.

Siden porteføljen er lik opsjonen i periode 1, må det samme gjelde i periode 0. Vi må altså ha at

$$C_0 = \Delta S_0 + B$$

Opsjonsverdien er dermed:

$$C_0 = 0.5648 \cdot 135.00 - 68.99 = 7.26$$

Opsjonsprisen er 7.26.

14.3.2 Paritet

Hvis det er likevekt i markedet , skal vi ha at følgende partitetsbetingelse gjelder:

$$P_0 = C_0 + \frac{1}{1 + r_f} X - S_0 \tag{14.6}$$

Vi får:

$$P_0 = 7.26 + \frac{1}{1.05} 140.00 - 135.00 = 5.59$$

Prisen på salgsopsjonen må være 5.59 for at det skal være paritet i prisene for kjøps- og salgsopsjonen.

14.3.3 To perioder

Vi kan bruke risikonøytral prising i to perioder for dette problemer. Opsjonsprisen er gitt av

$$C_0 = \frac{1}{(1 + r_f)^2} \left[q^2 C_{uu} + 2q(1 - q)C_{ud} + (1 - q)^2 C_{dd} \right] \tag{14.7}$$

Her mangler verdiene til q og $1 - q$. Disse er generelt gitt som:

$$q = \frac{r_f - d}{u - d}; \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} \tag{14.8}$$

Vi finner først u, d:

$$u = \frac{155.25}{135.00} - 1.00 = 0.15; \qquad d = \frac{128.25}{135.00} - 1.00 = -0.05$$

Nå er q og $1 - q$:

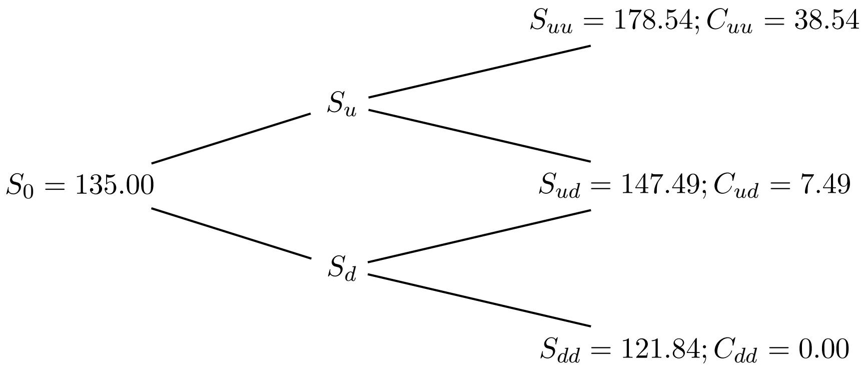
$$q = \frac{0.05 - (-0.05)}{0.15 - (-0.05)} = 0.50; \qquad 1 - q = \frac{0.15 - 0.05}{0.15 - (-0.05)} = 0.50$$

Videre trenger vi opsjonsverdiene i andre periode. Figur 14.4 viser prisprosess og andre periodes opsjonsverdier.

Nå kan vi bruke (14.7):

$$C_0 = \frac{1}{1.05^2} \left(0.50^2 38.54 + 2 \cdot 0.50^2 7.49 + 0.50^2 0.00 \right) = 12.14$$

Prisen på opsjonen har økt betydelig i forhold til verdien i første periode.

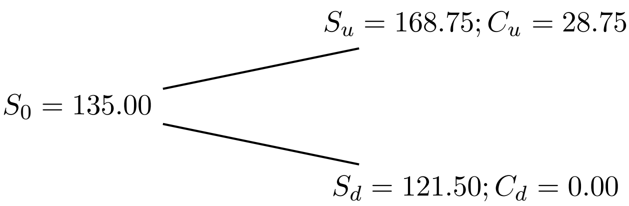


Figur 14.4: Prisprosess og opsjonsverdier når forfall er om to perioder

Forklaringen er at med ytterligere en periode er det mulig å oppnå høyere opsjonsverdier enn i første. Opsjonen er enda mer "In The Money".

14.3.4 Høyere volatilitet

Prisutslagene er nå enda sterkere, idet $u = 0.25$ og $d = -0.10$. Prisprosess og opsjonsverdier er da i dette enperiodes problemet vist i figur 14.5.



Figur 14.5: Prisprosess og opsjonsverdier med høyere volatilitet

Vi har opsjonsprisen direkte fra

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{14.9}$$

Dermed får vi:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.10)}{0.25-(-0.10)}28.75 + \frac{0.25-0.05}{0.25-(-0.10)}0.00\right) = 11.73.$$

Opsjonsprisen stiger med høyere volatilitet. Økningen i forhold til utgangspunktet er betydelig. Forklaringen på økt verdi er at opsjonsverdien i "opptilstanden" er nå høyere enn i utgangspunktet. Samtidig er opsjonsverdien i "nedtilstanden" like stor, nemlig null. Alt i alt må derfor opsjonsverdien stige.

14.4 Risiko-overveltning og kapitalstruktur

14.4.1 Investere i tapsprosjekt?

Vi ser først på selskapets stilling i starten med bare prosjekt A, se tabell 14.1.

Tabell 14.1 Welltings verdi med bare prosjekt A

	Tilstand			
	Høy 50%	Lav 50%	Forventet verdi	$NV(r = 10\%)$
Selskapet	240.00	90.00	165.00	150.00
Långiverne	82.50	82.50	82.50	75.00
Eierne	157.50	7.50	82.50	75.00

Nå får altså Wellting et nytt prosjekt B som er helt uavhengig av prosjekt A. Vi ser på hvordan dette virker inn på betalingene til långivere og eiere. Siden prosjektene er uavhengige, kan høy- og lavtilstanden for B inntreffe med like stor sannsynlighet i både høy- og lavtilstanden for A. Vi kaller høy for H og lav for L.

Tabell 14.2 Oversikt over selskapsverdier ved ulike mulige kombinasjoner av A og B

	Prosjekt A		
	H: 240.00	L: 90.00	Tilstands-
Prosjekt B	$E(A) = 165.00$		verdier
H: 75.00	315.00	165.00	240.00
L: -90.00	150.00	0.00	75.00
$E(B) = -7.50$			
Tilstandsverdier	232.50	82.50	157.50

Nåverdien av prosjekt B er $NV(B) = -7.50/1.1 = -6.82$ og av selskapet med A og B er $NV(A+B) = 157.50/1.1 = 143.18$. Med negativ nåverdi for prosjekt B ville en forsvarlig vurdering resultere i et avslag.

Hva skjer nå med fordelingen av selskapets verdi mellom eiere og långivere? Dette er satt opp i tabell 14.3. Her står E for Eiere og D for Långivere.

Nåverdien av gjeld er $NV(D) = 41.25/1.1 = 37.50$ og for egenkapitalen $NV(E) = 63.75/1.1 = 57.95$.

Tabell 14.3 Oversikt over selskapsverdier ved ulike mulige kombinasjoner av A og B

	Prosjekt A		
	H: 240.00	L: 90.00	Tilstands-
Prosjekt B	$E(A) = 165.00$		verdier
H: 75.00	E: 232.50	E: 82.50	E: 157.50
	D: 82.50	D: 82.50	D: 82.50
L: -90.00	E: 67.50	E: 0.00	E: 33.75
	D: 82.50	D: 0.00	D: 41.25
$E(B) = -7.50$			
Tilstandsverdier	232.50	82.50	157.50
Forventet verdi eiere			95.63
Forventet verdi bank			61.88

Sammenlignet med tabell 14.1 viser det seg nå at eierne økt sine forventede verdier fra 75 med bare prosjekt A til $E(Eier) = 0.5(157.50 + 33.75) = 95.625$ ved at man godtok et risikabelt prosjekt B i tillegg. Det risikable prosjektet har ført til en *risikoooverv elting* fra eiere til långivere. Konkursrisikoen har økt, og det medfører en risiko for at långiverne ikke får noe i den verst tenkelige tilstand.

14.4.2 Avveiningsteorien

Avveiningsteorien sier at det er fordeler og ulemper med gjeld. Selskapets bestemmer hvilken fordeling av egenkapital og gjeld som er optimal for selskapet. Avveiningsteorien innebærer for det første at det kan være et optimalt nivå på kapitalstruktur. Dette strider mot Miller og Modigliani sine resultater. For det andre innebærer teorien at det optimale nivået kan være unikt for hvert selskap.

Fordeler med gjeld. Den viktigste fordelen er antakelig renteskattefordelen. Når vi tar hensyn til bedriftsskatter, er det jo slik at verdien av et selskap med gjeld er høyere enn et helt likt selskap uten gjeld, dvs. $V_L = V_U + r_D D$ der $r_D D > 0$ er renteskattefordelen.

En annen fordel med gjeld er at den gir ledelsen et insentiv til god drift av selskapet. Gjeld begrenser den frie kontantstrømmen for ledelsen, de må jobbe hardere for å oppnå tilfredsstillende resultater for selskapet.

Ulemper med gjeld. Her kan det nevnes mange faktorer. Et skille er mellom direkte og indirekte kostnader med høy gjeldsandel. De direkte kostnadene kan måles i advokathonorar, gebyrer etc., de indirekte påvirker forretingsdriften på ulike måter. En høy gjeldsandel kan føre til at selskapet opplever tap av handlefrihet. Leverandører krever kontant betaling, fordi de er usikre på om selskapet vil eksistere eller ikke i nær fremtid. Ansatte kan slutte av samme årsak, kunder vil begynne å lete etter andre leverndører for å sikre seg osv. Det er også viktig å nevne at ledelsens tid brukes til å berge selskapet nærmest fra dag til dag.

Tillegg A

Symboler, formler og tabell

S_t	Aksjekurs i periode t
B	Kurs på obligasjon
M	Obligasjonens pålydende
y	Avkastning til forfall (også YTM)
K_t	Kontantstrøm i periode t
I	Investering
V	Selskapets verdi; V_U uten gjeld, V_L med gjeld
E, D	Egenkapital, gjeld
DIV_t	Utbytte i periode t
Div_t	Utbytte pr. aksje i periode t
C_0	Kjøpsopsjonens verdi i periode 0
P_0	Salgssopsjonens verdi i periode 0
X	Utøvelseskurs
q	Risikonøytral sannsynlighet
r_E	Avkastning på egenkapitalen
r_D	Selskapets lånerente
r_{wacc}	Veid gjennomsnittlig kapitalkostnad
r_f	Risikofri rente
r_i	Avkastning på verdipapir i
r_m	Avkastning på markedet i gjennomsnitt
r_U	Aksjeavkastning på et gjeldfritt selskap
r_L	Aksjeavkastning på et selskap med gjeld
g	Veksthastighet
EPS	"Earnings per share" Driftsresultat/(antall aksjer)
r_P	Avkastning på porteføljen
τ_c	Selskapsskattesats
τ_d	Skattesats på utbytte
τ_i	inntektsskattesats
τ_g	Skattesats på kursstigning
β_i	Systematisk risiko for aksje i
σ_i	Selskapsspesifikk risiko for selskap i
σ_p	Porteføljens risiko
σ_{ij}	Kovariansen mellom selskapene i og j
ρ_{ij}	Korrelasjonen mellom selskapene i og j

Liste over formler

$$y = \left(\frac{M}{B}\right)^{1/T} - 1 \tag{A.1}$$

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta EBIT}{EBIT} &= \text{Driftsresultatets vekstrate} \\ &= \text{Tilbakeholdsandel} \times \text{Avkastning på investering} \\ &= \left(1 - \frac{Div}{EPS}\right) \times \text{Avkastning på investering}\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}}\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{A.6}$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{ij} + \frac{1}{N}\left(\sigma^2 - \sigma_{ij}\right) \tag{A.7}$$

$$E\left(r_i\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_i \tag{A.8}$$

$$r_E = r_U + \left(r_U - r_D\right)\frac{D}{E} \tag{A.9}$$

$$V_E = \frac{EBIT}{r_U} = V_L = \frac{EBIT}{r_U} \tag{A.10}$$

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_U = r_A \tag{A.11}$$

$$V_U = \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} \\ &= V_U + \tau_c D \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)(1-\tau_c)\frac{D}{E} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} V_L &= V_U + \left[1 - \frac{(1-\tau_c)(1-\tau_d)}{(1-\tau_i)}\right] \times D \\ &= V_U + N^* \times D \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f}X = P_0 + S_0 \qquad \text{eller} \qquad C_0 + \frac{1}{1+r_f}X - P_0 - S_0 = 0 \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \\ &= \frac{1}{1+r_f}\left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right] \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\beta_E = \frac{A\Delta}{A\Delta + B}\beta_U = \frac{(E+D)\Delta}{E}\beta_U = \Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_U \tag{A.20}$$

$$\beta_D = (1-\Delta)\frac{A}{D}\beta_U = (1-\Delta)\left(1 + \frac{E}{D}\right)\beta_U \tag{A.21}$$

$$\beta_U = \frac{\beta_E}{\Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)} \tag{A.22}$$

$$\frac{NNV}{I} = \frac{\beta_D}{\beta_E} \cdot \frac{D}{E} \tag{A.23}$$

Tabell A.1 Verdier i den standardiserte normalfordelingen

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
-3.00	0.00135	-2.30	0.01072	-1.60	0.05480	-0.90	0.18406	-0.20	0.42074
-2.98	0.00144	-2.28	0.01130	-1.58	0.05705	-0.88	0.18943	-0.18	0.42858
-2.96	0.00154	-2.26	0.01191	-1.56	0.05938	-0.86	0.19489	-0.16	0.43644
-2.94	0.00164	-2.24	0.01255	-1.54	0.06178	-0.84	0.20045	-0.14	0.44433
-2.92	0.00175	-2.22	0.01321	-1.52	0.06426	-0.82	0.20611	-0.12	0.45224
-2.90	0.00187	-2.20	0.01390	-1.50	0.06681	-0.80	0.21186	-0.10	0.46017
-2.88	0.00199	-2.18	0.01463	-1.48	0.06944	-0.78	0.21770	-0.08	0.46812
-2.86	0.00212	-2.16	0.01539	-1.46	0.07215	-0.76	0.22363	-0.06	0.47608
-2.84	0.00226	-2.14	0.01618	-1.44	0.07493	-0.74	0.22965	-0.04	0.48405
-2.82	0.00240	-2.12	0.01700	-1.42	0.07780	-0.72	0.23576	-0.02	0.49202
-2.80	0.00256	-2.10	0.01786	-1.40	0.08076	-0.70	0.24196	0.00	0.50000
-2.78	0.00272	-2.08	0.01876	-1.38	0.08379	-0.68	0.24825	0.02	0.50798
-2.76	0.00289	-2.06	0.01970	-1.36	0.08691	-0.66	0.25463	0.04	0.51595
-2.74	0.00307	-2.04	0.02068	-1.34	0.09012	-0.64	0.26109	0.06	0.52392
-2.72	0.00326	-2.02	0.02169	-1.32	0.09342	-0.62	0.26763	0.08	0.53188
-2.70	0.00347	-2.00	0.02275	-1.30	0.09680	-0.60	0.27425	0.10	0.53983
-2.68	0.00368	-1.98	0.02385	-1.28	0.10027	-0.58	0.28096	0.12	0.54776
-2.66	0.00391	-1.96	0.02500	-1.26	0.10383	-0.56	0.28774	0.14	0.55567
-2.64	0.00415	-1.94	0.02619	-1.24	0.10749	-0.54	0.29460	0.16	0.56356
-2.62	0.00440	-1.92	0.02743	-1.22	0.11123	-0.52	0.30153	0.18	0.57142
-2.60	0.00466	-1.90	0.02872	-1.20	0.11507	-0.50	0.30854	0.20	0.57926
-2.58	0.00494	-1.88	0.03005	-1.18	0.11900	-0.48	0.31561	0.22	0.58706
-2.56	0.00523	-1.86	0.03144	-1.16	0.12302	-0.46	0.32276	0.24	0.59483
-2.54	0.00554	-1.84	0.03288	-1.14	0.12714	-0.44	0.32997	0.26	0.60257
-2.52	0.00587	-1.82	0.03438	-1.12	0.13136	-0.42	0.33724	0.28	0.61026
-2.50	0.00621	-1.80	0.03593	-1.10	0.13567	-0.40	0.34458	0.30	0.61791
-2.48	0.00657	-1.78	0.03754	-1.08	0.14007	-0.38	0.35197	0.32	0.62552
-2.46	0.00695	-1.76	0.03920	-1.06	0.14457	-0.36	0.35942	0.34	0.63307
-2.44	0.00734	-1.74	0.04093	-1.04	0.14917	-0.34	0.36693	0.36	0.64058
-2.42	0.00776	-1.72	0.04272	-1.02	0.15386	-0.32	0.37448	0.38	0.64803
-2.40	0.00820	-1.70	0.04457	-1.00	0.15866	-0.30	0.38209	0.40	0.65542
-2.38	0.00866	-1.68	0.04648	-0.98	0.16354	-0.28	0.38974	0.42	0.66276
-2.36	0.00914	-1.66	0.04846	-0.96	0.16853	-0.26	0.39743	0.44	0.67003
-2.34	0.00964	-1.64	0.05050	-0.94	0.17361	-0.24	0.40517	0.46	0.67724
-2.32	0.01017	-1.62	0.05262	-0.92	0.17879	-0.22	0.41294	0.48	0.68439

Tabell A.2 Verdier i den standardiserte normalfordelingen (forts.)

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
0.50	0.69146	1.20	0.88493	1.90	0.97128	2.60	0.99534
0.52	0.69847	1.22	0.88877	1.92	0.97257	2.62	0.99560
0.54	0.70540	1.24	0.89251	1.94	0.97381	2.64	0.99585
0.56	0.71226	1.26	0.89617	1.96	0.97500	2.66	0.99609
0.58	0.71904	1.28	0.89973	1.98	0.97615	2.68	0.99632
0.60	0.72575	1.30	0.90320	2.00	0.97725	2.70	0.99653
0.62	0.73237	1.32	0.90658	2.02	0.97831	2.72	0.99674
0.64	0.73891	1.34	0.90988	2.04	0.97932	2.74	0.99693
0.66	0.74537	1.36	0.91309	2.06	0.98030	2.76	0.99711
0.68	0.75175	1.38	0.91621	2.08	0.98124	2.78	0.99728
0.70	0.75804	1.40	0.91924	2.10	0.98214	2.80	0.99744
0.72	0.76424	1.42	0.92220	2.12	0.98300	2.82	0.99760
0.74	0.77035	1.44	0.92507	2.14	0.98382	2.84	0.99774
0.76	0.77637	1.46	0.92785	2.16	0.98461	2.86	0.99788
0.78	0.78230	1.48	0.93056	2.18	0.98537	2.88	0.99801
0.80	0.78814	1.50	0.93319	2.20	0.98610	2.90	0.99813
0.82	0.79389	1.52	0.93574	2.22	0.98679	2.92	0.99825
0.84	0.79955	1.54	0.93822	2.24	0.98745	2.94	0.99836
0.86	0.80511	1.56	0.94062	2.26	0.98809	2.96	0.99846
0.88	0.81057	1.58	0.94295	2.28	0.98870	2.98	0.99856
0.90	0.81594	1.60	0.94520	2.30	0.98928	3.00	0.99865
0.92	0.82121	1.62	0.94738	2.32	0.98983	3.02	0.99874
0.94	0.82639	1.64	0.94950	2.34	0.99036	3.04	0.99882
0.96	0.83147	1.66	0.95154	2.36	0.99086	3.06	0.99889
0.98	0.83646	1.68	0.95352	2.38	0.99134	3.08	0.99896
1.00	0.84134	1.70	0.95543	2.40	0.99180	3.10	0.99903
1.02	0.84614	1.72	0.95728	2.42	0.99224	3.12	0.99910
1.04	0.85083	1.74	0.95907	2.44	0.99266	3.14	0.99916
1.06	0.85543	1.76	0.96080	2.46	0.99305	3.16	0.99921
1.08	0.85993	1.78	0.96246	2.48	0.99343	3.18	0.99926
1.10	0.86433	1.80	0.96407	2.50	0.99379	3.20	0.99931
1.12	0.86864	1.82	0.96562	2.52	0.99413	3.22	0.99936
1.14	0.87286	1.84	0.96712	2.54	0.99446	3.24	0.99940
1.16	0.87698	1.86	0.96856	2.56	0.99477	3.26	0.99944
1.18	0.88100	1.88	0.96995	2.58	0.99506	3.28	0.99948

Bibliografi

Michael C. Jensen and William Meckling. Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs, and ownership structure. *Journal of Financial Economics*, 3:305–360, 1976.

Franco Modigliani and Merton H. Miller. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment. *American Economic Review*, 48(3): 261–297, 1958.

Franco Modigliani and Merton H. Miller. Corporate income taxes and the cost of capital: A correction. *American Economic Review*, 53(3):433–443, 1963.