Diversifisering

Kapittel 8

Dagens tekst

Portefølje med to eiendeler

Minimum-variansporteføljen

Portefølje med risikofri eiendel

Volatilitet og avkastning i en stor portefølje

Historiske tall

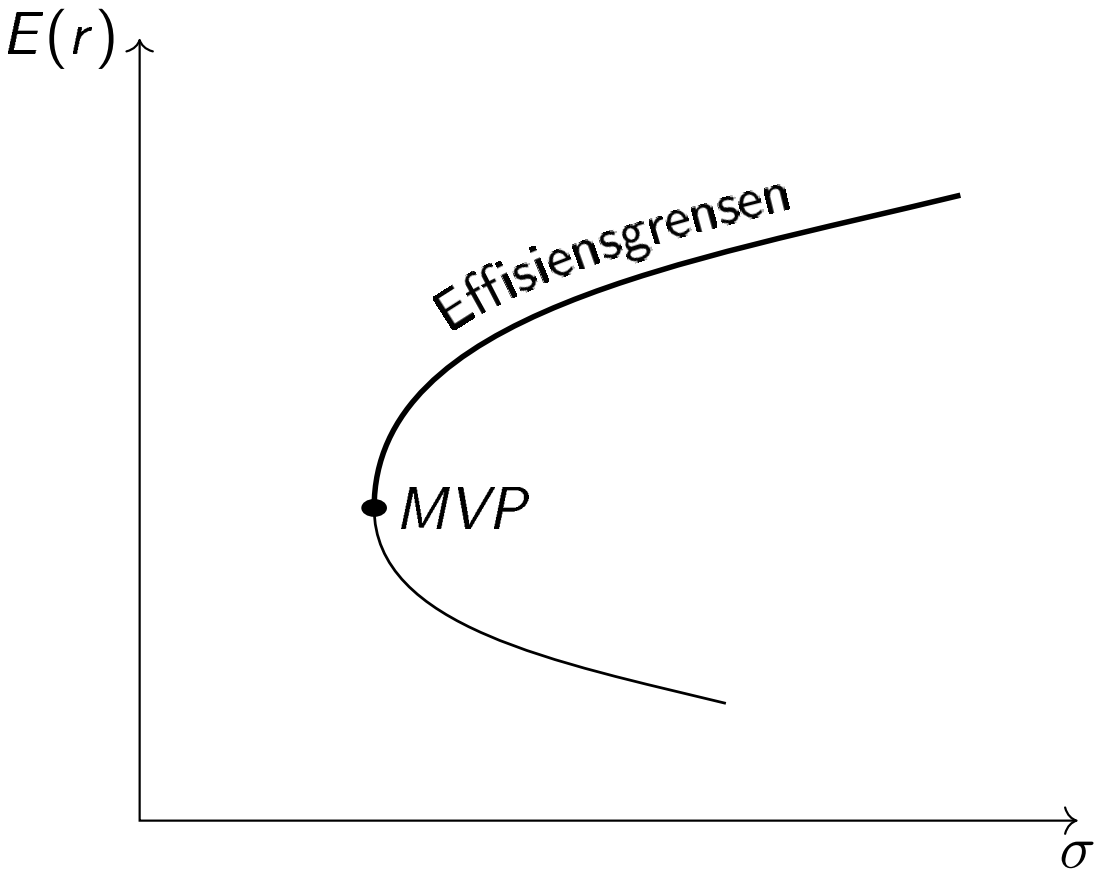
Bakgrunn

- Porteføljeteori er en av de store innsikter i finansiell økonomi
- Ved å holde en portefølje med flere eiendeler, kan en investor redusere samlet risiko
- Hovedæren for dette har Markowitz (1952).
- Innsikten leder frem til kapitalverdimodellen (KVM) utviklet av Sharpe (1963); Mossin (1966) og Lintner (1965)
- I dag brukes KVM av "alle" for å forstå krav til avkastning
- I større finansielle foretak brukes i dag faktormodeller i stigende grad ved siden av KVM

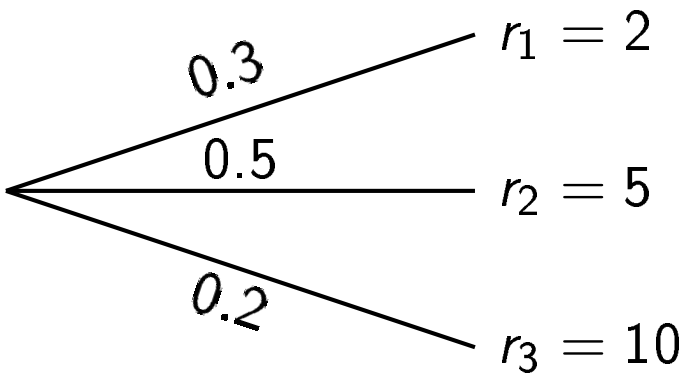
To eiendeler

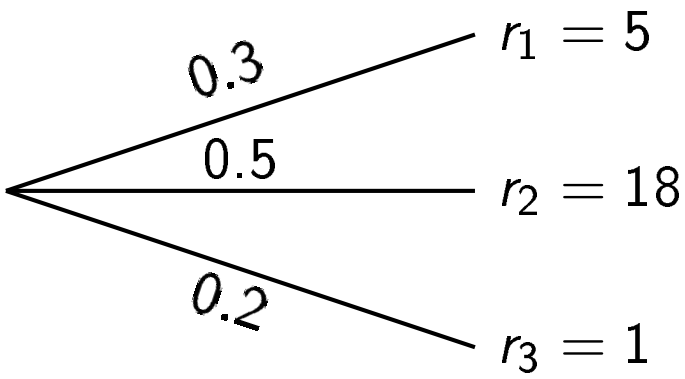
- Viser egenskapene med diversifisering med bare to eiendeler
- Det anbefalte er å holde minimum 10-15 lett omsettelige aksjer i porteføljen
- De viktigste egenskapene med investering i en portefølje av aksjer kommer frem med bare to aksjer
- Vi bruker aksjer som illustrasjon, men en portefølje kan være hus, kontanter og aksjer, for eksempel
- Vi skal finne avkastning og risiko (standardavvik) i porteføljen, finne risikominimum, og hvordan avkastning og risiko endres etter hvert som vi endrer vektene av aksjene
- Vi illustrerer hvordan variansen i porteføljen nærmer seg den gjennomsnittlige kovariansen etter hvert som antallet aksjer stiger

Avkastnings-risikodiagrammet fra Markowitz



To aksjer og usikkerhet





Vi skal sette sammen en portefølje av de to aksjene. Da trenger vi:

- Avkastningene til de to aksjene
- Volatiliteten til hver aksje, dvs. dens standardavvik
- Kovariansen eller korrelasjonskoeffisienten mellom de to

Avkastning og volatilitet for enkeltaksjer

Avkastning:

$$E\left(r_i\right) = \sum_{l=1}^{L} p_l r_{il} \tag{1}$$

Aksjen til venstre:

$$E\left(r_i\right) = 0.3 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 + 0.2 \cdot 10 = 5.10$$

Volatilitet:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} p_l \left(r_{il} - E\left(r_i\right)\right)^2} \tag{2}$$

Aksjen til venstre:

$$\sigma_i = \sqrt{0.3(2-5.1)^2 + 0.5(5-5.1)^2 + 0.2(10-5.1)^2} = 2.77$$

Kovarians og korrelasjon

Kovarians σ_{12} mellom to aksjer 1 og 2:

$$\sigma_{12} = \sum_{l=1}^{L} p_l \left(r_{1l} - E\left(r_1\right)\right)\left(r_{2l} - E\left(r_2\right)\right) \tag{3}$$

Kovarians viser om aksjene beveger seg i samme eller motsatt retning.
Korrelasjon ρ_{12} mellom to aksjer:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \qquad -1.0 \leq \rho_{12} \leq +1.0 \tag{4}$$

som også betyr at:

$$\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \tag{5}$$

Korrelasjonen viser hvor sterk samvariasjonen er

$\rho_{12} = +1.0$ De to eiendelene (feks aksjene) er *perfekt positivt korrelert*. Når avkastningen til eiendel 1 øker, øker eiendel 2 alltid like mye.

$0.0 < \rho_{12} < +1.0$ De to eiendelene er positivt korrelert. Når avkastningen til eiendel 1 øker, har eiendel 2 også en tendens til å øke.

$\rho_{12} = 0.0$ De to eiendelene er *uavhengige*.

$-1.0 < \rho_{12} < 0.0$ De to eiendelene er negativt korrelert. Når avkastningen til eiendel 1 øker, har eiendel 2 en tendens til å reduseres.

$\rho_{12} = -1.0$ De to eiendelene (feks aksjene) er *perfekt negativt korrelert*. Går avkastningen til eiendel 1 opp, vil avkastningen på eiendel 2 alltid reduseres like mye.

Porteføljе med to aksjer

Avkastningen på en porteføljе med to aksjer kan skrives:

$$E(r_p) = wE(r_1) + (1-w)E(r_2) \tag{6}$$

Vårt eksempel: 65% i aksje 1, 35% i aksje 2: Vi bruker (6):

$$E(r_p) = 0.65 \cdot 5.10 + 0.35 \cdot 10.70 = \underline{7.06}$$

Variansen til en porteføljе med to aksjer:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \end{aligned} \tag{7}$$

Volatiliteten:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \tag{8}$$

Et eksempel

Været kan ha betydning for en investor. Investoren planlegger å sette penger i utendørsrestauranten Aøl og i klesforretningen Aklær. Været kan opptre i tre tilstander, regn, skyer og sol. Sannsynligheten for hver er henholdsvis 0.3, 0.5, 0.2. For eiendel 1 er avkastningen (i prosent) i tilstanden "regn" 2, i skyer 5 og i sol 10. For Aklær (eiendel 2) er avkastningene tilsvarende 5, 18, og 1.

1. *Finn kovariansen og korrelasjonen for porteføljen av de to eiendelene.*
2. *Sett $w = 0.0, 0.25, 0.50, 0.75$, og 1.0, og finn porteføljens risiko og avkastning. Tegn en figur som viser resultatet.*

Aøl	Sann-synlighet	Av-kastning	Avvik fra forv. avkastn.	Kvadrert avvik	Kvadrert avvik*Sanns.
Regn	0.30	2.00	-3.10	9.61	2.88
Skyer	0.50	5.00	-0.10	0.01	0.00
Sol	0.20	10.00	4.90	24.01	4.80
Sum	1.00	5.10		$\sigma_1^2 =$	7.69
				$\sigma_1 =$	2.77

Aklær	Sann-synlighet	Av-kastning	Avvik fra forv. avkastn.	Kvadrert avvik	Kvadrert avvik*Sanns.
Regn	0.30	5.00	-5.70	32.49	9.75
Skyer	0.50	18.00	7.30	53.29	26.65
Sol	0.20	1.00	-9.70	94.09	18.82
Sum	1.00	10.70		$\sigma_2^2 =$	55.21
				$\sigma_2 =$	7.43

Beregning av kovarians og korrelasjon

	Sann-synlighet	Avvik Aøl	Avvik Aklær	Produkt
Regn	0.30	-3.10	-5.70	5.30
Skyer	0.50	-0.10	7.30	-0.36
Sol	0.20	4.90	-9.70	-9.51
Sum	1.00		$\sigma_{12} =$	-4.57
Korrelasjon				-0.22

Korrelasjon:

$$\rho_{12} = \frac{-4.57}{2.77 \cdot 7.43} = \underline{-0.22}$$

Beregning av porteføljeverdiene

Anta $w = 0.25$. Da er avkastning i porteføljen:

$$E\left(r_{12}\right) = 0.25 \cdot 5.1 + 0.75 \cdot 10.70 = 9.30$$

og porteføljens varians er:

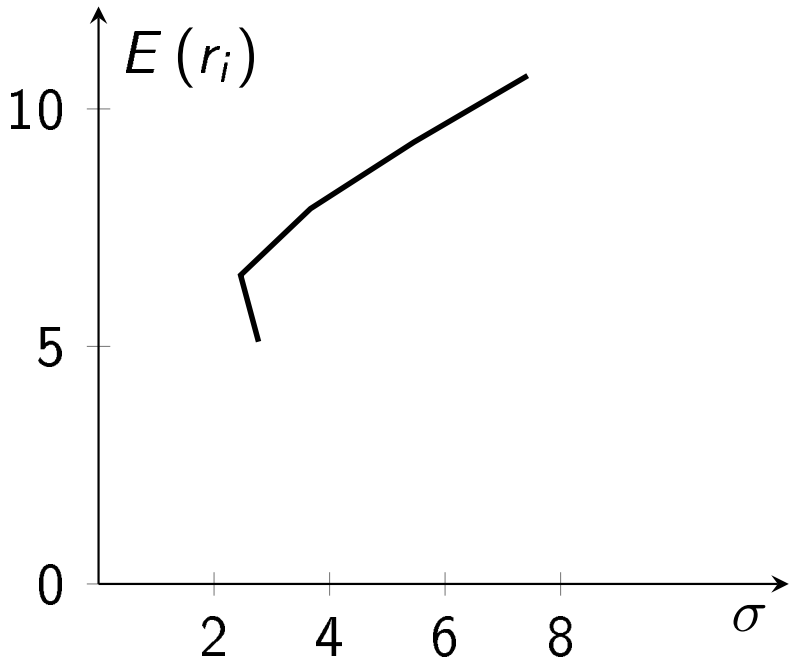
$$\sigma_{12}^2 = 0.25^2 7.69 + 0.75^2 55.21 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot (-4.57) = 29.81$$

Da har vi risikoen:

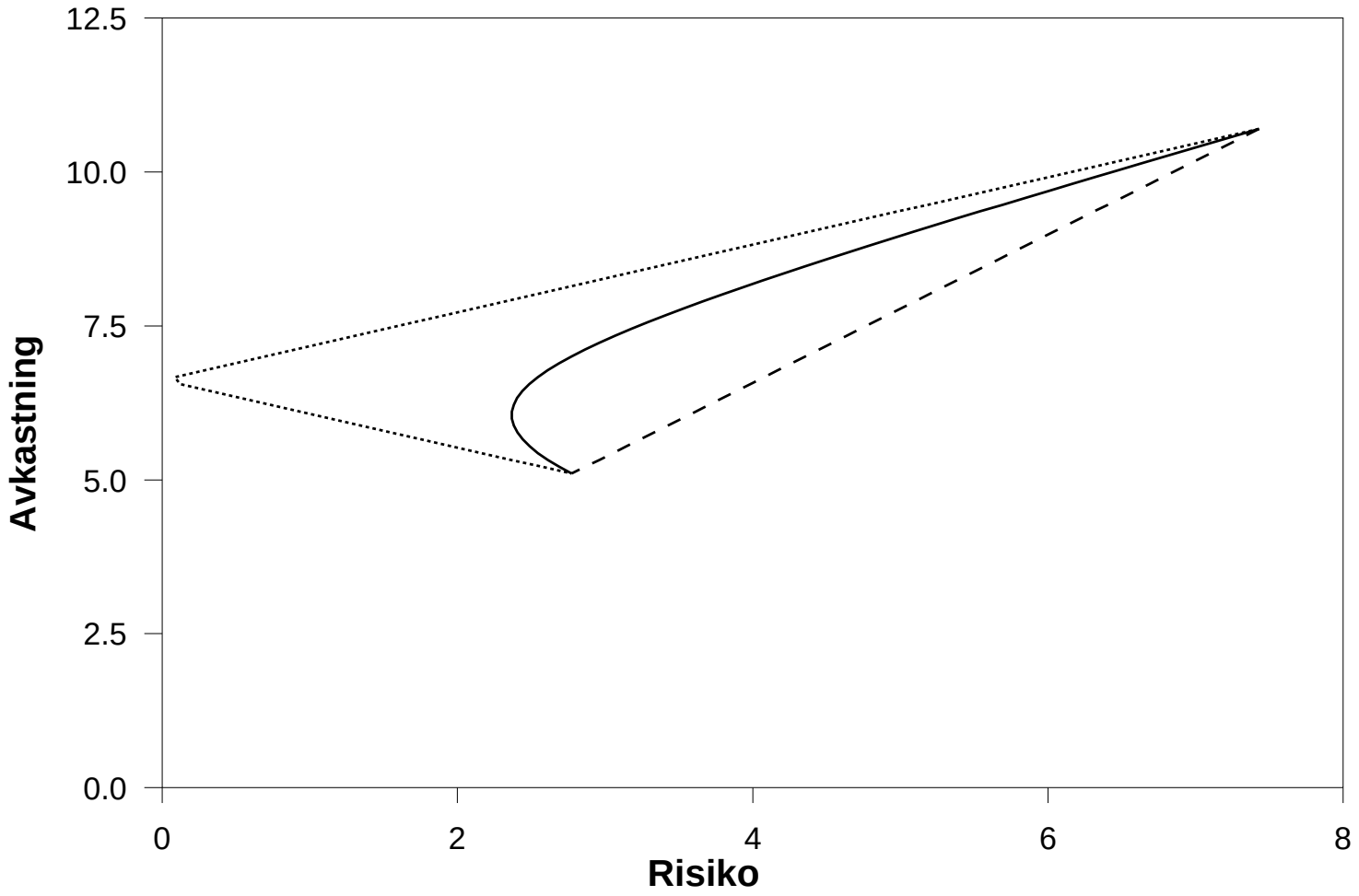
$$\sigma_{12} = \sqrt{29.81} = 5.46$$

Porteføljens risiko når vektene endres

w	$(1-w)$	r_p	σ_p
0.00	1.00	10.70	7.43
0.25	0.75	9.30	5.46
0.50	0.50	7.90	3.67
0.75	0.25	6.50	2.46
1.00	0.00	5.10	2.77



Korrelasjonen varieres; $\rho = -1$ og $\rho = +1$



Minimum-variansporteføljen (MVP)

- Vi er på jakt etter det punktet på avkastningskurven som gir minst risiko
- Dette er Minimum-variansporteføljen (MVP)
- Når $\rho = -1$, vet vi at det alltid er mulig å finne en sammensetting av porteføljen som gir $MVP = 0.0$
- Hva er porteføljevektene for tilfellet $\rho = -1$ og for $-1 \leq \rho \leq +1$?

Utledning av *MVP*

Vi setter *porteføljevariansen*:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w\sigma_{12} - 2w^2\sigma_{12}\end{aligned}$$

Deriver mhp w og sett resultatet lik null:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12} - 4w\sigma_{12} = 0|\frac{1}{2} \\ &= w\sigma_1^2 + w\sigma_2^2 - 2w\sigma_{12} = \sigma_2^2 - \sigma_{12}\end{aligned}$$

Nå kan w isoleres:

$$w = MVP = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{9}$$

MVP i vårt eksempel

Vi har:

$$w = MVP = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

Fra eksemplet har vi $\sigma_1^2 = 7.69$, $\sigma_2^2 = 55.21$ og $\sigma_{12} = -4.57$.

$$w_{MVP} = \frac{55.21 - (-4.57)}{7.69 + 55.21 - 2 \cdot (-4.57)} = 0.8298$$

Porteføljevariansen er da:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= 0.8298 \cdot 7.69 + (1 - 0.8298)55.21 \\
&\quad + 2 \cdot 0.8298(1 - 0.8298)(-4.57) = 5.60 \\
\sigma_p &= 2.37
\end{aligned}$$

Avkastningen er $r_p = 6.05$.

En risikabel og risikofri eiendel

Hva om den ene eiendelen er risikofri? Anta at eiendel 2 er risikofri, dvs. $\sigma_2 = 0$. Porteføljens varians:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Dermed er porteføljerisikoen lik

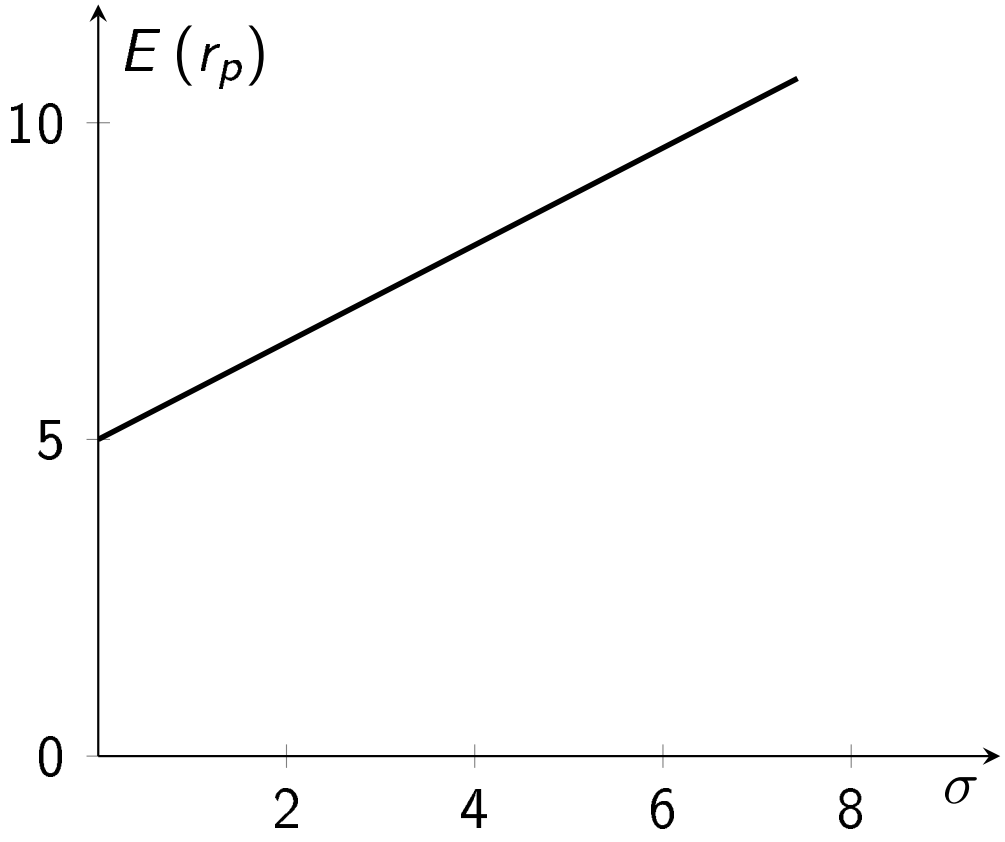
$$\sigma_p = w\sigma_1 \tag{11}$$

Porteføljens forventede avkastning:

$$\begin{aligned} E(r_p) =& w \cdot E(r_1) + (1-w) \cdot r_f \\ =& r_f + (E(r_1) - r_f) \cdot w \end{aligned} \tag{12}$$

som er en rett linje i avkastningsdiagrammet

Figuren i vårt eksempel når $r_f = 5.0$



Porteføljefronten blir en rett linje fra $r_f = 5.0$ til punktet definert av $\sigma_p = 7.43$ og $E(r_p) = 10.70$

Volatilitet og avkastning i en stor portefølje

Generelt med N eiendeler i porteføljen, gir avkastning:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i \tag{13}$$

og risiko:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \tag{14}$$

- Vi får N varianser og $N(N-1)$ kovarianser
- Kovariansen dominerer i total risiko

Kovarianser og varianser

	1	2	3	4	$\cdots$	N
1	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}		σ_{1N}
2	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}	σ_{24}		σ_{2N}
3	σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}	σ_{34}		σ_{3N}
4	σ_{41}	σ_{42}	σ_{43}	σ_{44}		σ_{4N}
$\vdots$						
N	σ_{N1}	σ_{N2}	σ_{N3}	σ_{N4}		σ_{NN}

$$\sigma_{11} = \sigma_1^2$$

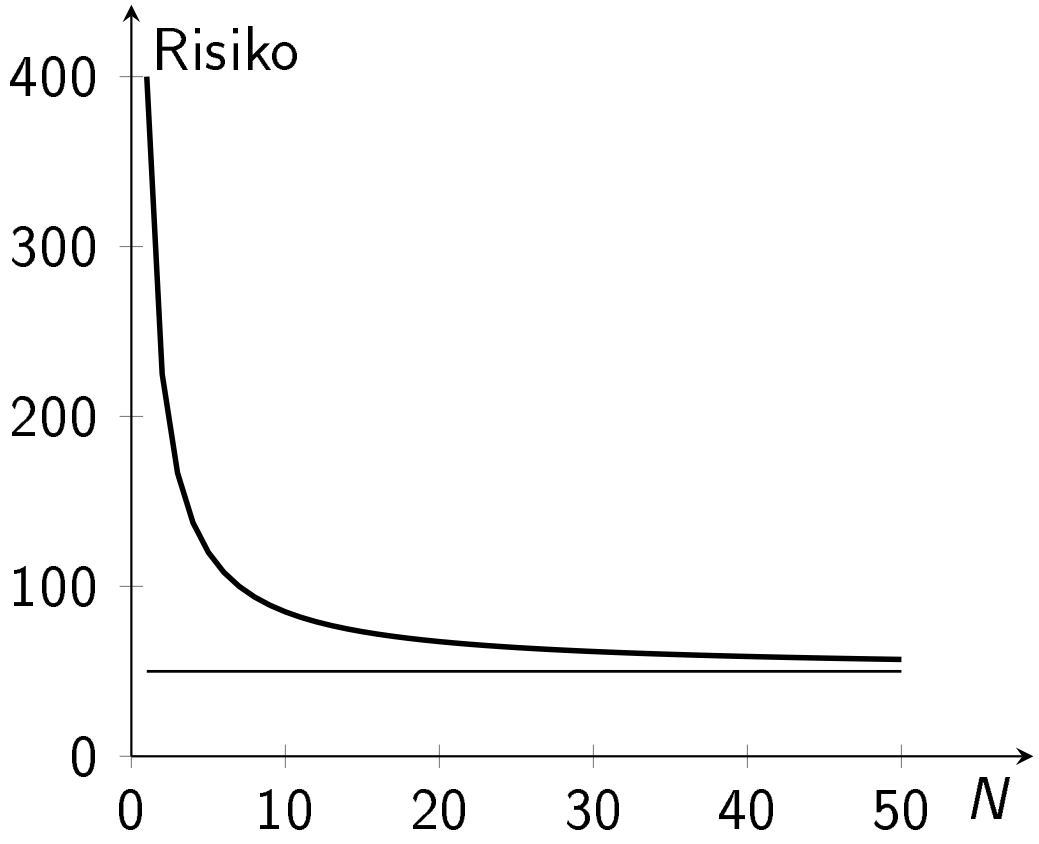
Likeveid porteføljе med like varianser og kovarianser

1. N eiendeler
2. $w_1 = \ldots = w_N = 1/N$ En likeveid porteføljе.
3. $\sigma_1^2 = \ldots \sigma_N^2 = \sigma^2$ Alle variansene er like.
4. σ_{ij} er alle like. Kovariansene er like.

Da kan vi skrive porteføljens varians som:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= N\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma^2 + \left(N^2 - N\right)\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N}\sigma^2 + \frac{N^2 - N}{N^2}\sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N}\sigma^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\sigma_{ij} \\
&= \sigma_{ij} + \frac{1}{N}\left(\sigma^2 - \sigma_{ij}\right) = \sigma_{ij} + \frac{1}{N}\sigma^2 - \frac{1}{N}\sigma_{ij}
\end{aligned} \tag{15}$$

Porteføljevariansen nærmer seg gjennomsnittlig kovarians når tallet på aksjer i porteføljen øker



Usystematisk risiko, eller selskapsspesifikk risiko, eller diversifiserbar risiko

Lærdommer

- Diversifisering fjerner usystematisk risiko men ikke systematisk
- Investorene er bare villige til å kompensere for den systematiske risikoen, den usystematiske kan de jo fjerne selv
- Hvert enkelt selskap kan ha høy usystematisk risiko

Historiske tall

- Porteføljeteorien ser fremover i tid, det beregnes avkastninger og risiko ut fra *forventninger*
- Forventninger skapes av erfaringer; første steg er å se på historiske priser
- Vi skal danne tall for avkastninger og risiko fra historiske gjennomsnitt, standardavvik og kovarians

Definisjoner

Den empiriske avkastningen og risikoen definert ved:

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t; \qquad Std = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \bar{R}\right)^2} \tag{16}$$

Kovariansen mellom to aksjer i, j er definert som

$$Kov_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{it} - \bar{R}_i\right)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right) \tag{17}$$

Korrelasjonen er som før definert som:

$$Korr_{i,j} = \frac{Kov_{ij}}{Std_i Std_j} \tag{18}$$

Porteføljedefinisjoner

Avkastningen i porteføljen med to aksjer er

$$R_p = w \cdot \bar{R}_1 + (1 - w) \cdot \bar{R}_2. \tag{19}$$

Porteføljens risiko er

$$\begin{aligned} Std_p = \big(w^2 \cdot Var_1 + (1 - w)^2 Var_2 \\ + 2 \cdot w \cdot (1 - w) \cdot Kov_{12}\big)^{0.5} \end{aligned} \tag{20}$$

Minimum-variansporteføljen er

$$w_{mvp} = \frac{Var_2 - Kov_{12}}{Var_1 + Var_2 - Kov_{12}} \tag{21}$$

Eksempel: Orkla og Statoil

	Sluttkurs i	
År	Orkla	Statoil
2005	52.00	155.00
2006	70.60	165.25
2007	105.25	169.00
2008	45.45	113.90
2009	57.65	146.50
2010	56.70	138.60
2011	44.65	153.50
2012	48.50	139.00
2013	47.32	147.00
2014	51.15	131.20
2015	70.10	123.70
2016	65.80	134.40

Eksempel: Beregninger

	Orkla	Statoil	Orkla	Statoil	Avviko	Orkla	Statoil
År	Avkastninger		Avviko	Avviks	×Avviks	Avvik2	Avvik2
2006	35.77	6.61	28.75	6.73	193.41	826.77	45.24
2007	49.08	2.27	42.06	2.38	100.23	1769.36	5.68
2008	-56.82	-32.60	-63.83	-32.49	2073.93	4074.61	1055.61
2009	26.84	28.62	19.83	28.74	569.73	393.11	825.70
2010	-1.65	-5.39	-8.66	-5.28	45.74	75.06	27.87
2011	-21.25	10.75	-28.27	10.86	-307.09	799.07	118.02
2012	8.62	-9.45	1.61	-9.33	-15.00	2.58	87.10
2013	-2.43	5.76	-9.45	5.87	-55.45	89.28	34.44
2014	8.09	-10.75	1.08	-10.63	-11.47	1.16	113.10
2015	37.05	-5.72	30.03	-5.60	-168.27	901.94	31.39
2016	-6.13	8.65	-13.15	8.76	-115.24	172.91	76.80
Gj.snitt	7.02	-0.11					
Std						30.18	15.56
Kovar					231.05		

Porteføljeresultater

Kan nå beregne avkastning og risiko i porteføljen på vanlig måte. Anta $w = 0.25$ for Orkla. Avkastningen:

$$R_p = 0.25 \cdot 7.02 + 0.75 \cdot (-0.11) = 1.67.$$

Risikoen:

$$\begin{aligned} Std_p &= \left(0.25^2 \cdot 30.18^2 + 0.75^2 15.56^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 231.05\right)^{0.5} \\ &= 16.72. \end{aligned}$$

Litteratur

Lintner, J. (1965). A valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economic Studies 47*, 13–37.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance 8*, 77–91.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica 35*, 768–783.

Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science 9*(2), 277–293.