

Kap4: Løsningsforslag

Øystein Strøm

1

Vi skal finne netto nåverdi og internrente for de ulike prosjektene. Generelt er NNV -formelen:

$$NNV = -K_0 + \sum_1^T \frac{K_t}{(1+r)^t} \quad (1)$$

Internrenten i er den rente som setter $NNV = 0$. Da har vi sammenhengen

$$NNV = -K_0 + \sum_1^T \frac{K_t}{(1+i)^t} = 0 \quad (2)$$

Kapitalkostnaden er oppgitt å være 12.5% i oppgaven.

1.1 Prosjekt 1

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1.125} = 333.33$$

Internrenten finnes fra:

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1+i} = 0$$

Vi ser med en gang at

$$1+i = \frac{1500}{1000} = 1.50 \Rightarrow i = 50\%$$

Tilbakebetalingstid er 1 år.

1.2 Prosjekt 2

Hvordan finner vi internrenten fra

$$NNV = -1000 + \frac{400}{1.125} + \frac{400}{1.125^2} + \frac{400}{1.125^3} + \frac{400}{1.125^4}$$

Kan bruke annuitet eller direkte regning. Direkte regning

$$NNV = -1000 + 355.56 + 316.05 + 280.93 + 249.72 = 202.26$$

Internrenten kan bestemmes fra

$$NNV = -1000 + 400 \frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = 0$$

Isoler annuitetsleddet:

$$\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = \frac{1000}{400} = 2.50$$

Slå opp i annuitetstabellen. Finn frem til 4 perioder. Finn den renten som svarer nærmest til 2.50. Det er ved 22%. Tabellverdien er 2.4936. Internrenten er altså 22%.

Tilbakebetalingstiden er 3 år.

1.3 Prosjekt 3

Vi har nåverdien:

$$NNV = -10 + \frac{50}{1.125} = 34.44$$

Internrenten finner vi fra

$$NNV = -10 + \frac{50}{1+i} = 0$$

dvs.

$$1+i = \frac{50}{10} = 5.0 \Rightarrow i = 400\%$$

Tilbakebetalingstiden er 1 år.

1.4 Prosjekt 4

Denne gangen har vi nåverdien

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1.125} + \frac{100}{1.125^2} + \frac{200}{1.125^3} + \frac{2000}{1.125^4}$$

Direkte regning gir nå:

$$NNV = -1000 + 44.44 + 79.01 + 140.47 + 1248.59 = 512.51$$

Internrente er definert fra uttrykket:

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1+i} + \frac{100}{(1+i)^2} + \frac{200}{(1+i)^3} + \frac{2000}{(1+i)^4} = 0$$

Her hjelper ingen triks. Det må prøves og feiles, eller man bruker kalkulator. Internrenten må altså være høyere enn 12.5%. Vi prøver 25%:

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1.25} + \frac{100}{1.25^2} + \frac{200}{1.25^3} + \frac{2000}{1.25^4} = 25.60$$

Vi er altså like i nærheten. Prøv 26%:

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1.26} + \frac{100}{1.26^2} + \frac{200}{1.26^3} + \frac{2000}{1.26^4} = -3.85$$

Vi kan konkludere med at $IRR = 26\%$. Tilbakebetalingstiden er 4 år.

1.5 Prosjekt 5

Vi har nåverdien

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1.125} - \frac{300}{1.125^2} = 96.30$$

Ingen problemer for netto nåverdiberegningene. For internrenten har vi følgende utregninger:

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1+i} - \frac{300}{(1+i)^2} = 0$$

Multipliser med $1/(1+i)^2$ på begge sider av det siste likhetsteget:

$$-1000(1+i)^2 + 1500(1+i) - 300 = 0$$

Del med -100:

$$10(1+i)^2 - 15(1+i) + 3 = 0$$

Dette er altså en kvadratisk funksjon med løsningene:

$$1+i = \frac{-(-15) + \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 3}}{2 \cdot 10} = 1.26 \quad i = 0.26$$

og

$$1+i = \frac{-(-15) - \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 3}}{2 \cdot 10} = 0.24 \quad i = -0.76$$

En realistisk internrente er 26%.

2

2.1 Deloppgave 1

$$NNV = -720 + \frac{300}{1.1} + \frac{300}{1.1^2} + \frac{300}{1.1^3}$$

som gir $NNV = 26.06$

Internrenten er gitt ved

$$NNV = -720 + \frac{300}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{300}{(1+i)^3} = 0$$

som gir $IRR = 12.04\%$.

Mini-prosjektet har

$$NNV = -240 + \frac{100}{1.1} + \frac{100}{1.1^2} + \frac{100}{1.1^3} = 8.69$$

og internrenten er $IRR = 12.04\%$.

2.2 Deloppgave 2

Ser man nærmere på kontantstrømmene, er Mega-prosjektet tre ganger så stort som Mini. Netto nåverdien avspeiler dette, $26.06/8.69 = 3.00$. Etter NNV -kriteriet er altså Mega langt å foretrekke fremfor Mini. Internrenteregelen fanger ikke opp forskjeller i størrelse. Etter dette kriteriet er Mega og Mini like gode, siden de har samme internrente. Men vi tjener flere penger på Mega.

3

Prosjektene er gjensidig utelukkende, dvs. vi skal velge bare ett av prosjektene, enten A eller B.

3.1 Internrentemetoden

Internrenten til A er gitt ved

$$NNV = -47232 + 20000 \frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = 0$$

som ved tabellmetoden gir:

$$\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = \frac{47232}{20000} = 2.3616$$

som svarer til en $IRR = 25.0\%$.

Prosjektet B har en internrente definert ved

$$NNV = -47232 + \frac{10000}{(1+i)^2} + \frac{20000}{(1+i)^3} + \frac{65350}{(1+i)^4} = 0$$

som innebærer en internrente på $IRR = 22.00\%$.

Kapitalkostnaden er 10.0%, og begge prosjekter har en IRR som overstiger kravet til kapitalkostnad. Prosjekt A har høyest IRR , og velges fremfor B.

3.2 Nåverdimeetoden

Vurdering ved hjelp av NNV -metoden. Kapitalkostnaden er gitt og 10%, slik at Prosjekt A gir

$$NNV = -47232 + 20000 \frac{(1.1)^4 - 1}{0.10(1.1)^4} = 16165.31.$$

På samme måte har vi for prosjekt B:

$$NNV = -47232 + \frac{10000}{1.1^2} + \frac{20000}{1.1^3} + \frac{65350}{1.1^4} = 20693.69$$

Etter denne metoden er altså prosjekt B best.

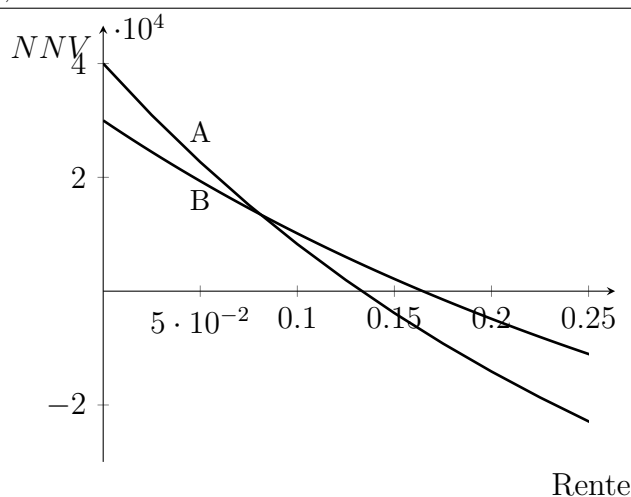
Hvilket prosjekt er riktig å velge? Etter internrentemetode skal vi velge A, etter nåverdimetoden B. Regelen er at vi bruker nåverdimetoden, det er jo denne metoden som viser hvor mye rikere eierne blir. Ved den gitte kapitalkostnaden gir prosjekt B mest kontanter til eierne av prosjektet. Internrenten, som er en prosentsats, forteller oss ikke hvilke beløp vi mottar fra prosjektene.

4

4.1 Deloppgave 1

Vi skal vise nåverdiprofilene til prosjektene. Figur 1 viser profilene.

Figur 1 Nåverdiprofilene til Nilsens prosjekter A og B. y -aksen er i vitenskapelig uttrykk; $10^4 = 10,000$.



Vi finner internrenten på det stedet der nåverdiprofilen skjærer x -aksen. x -aksen er plassert der $NNV = 0$. Nåverdiprofilene viser at prosjekt B er bedre enn prosjekt A ved de høyere rentene.

4.2

Internrenten til A fra

$$NNV = -100 + \frac{60}{1+i} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{30}{(1+i)^3} = 0$$

som impliserer at $IRR = 16,46\%$ og for B:

$$NNV = -100 + \frac{10}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3} = 0$$

som betyr at internrenten er $IRR = 13,32\%$

4.3

Vi kan finne NNV etter de samme metoder som før. Resultatene for A og B er satt opp nedenfor.

r	A	B
6%	17392	19592
12%	6813	3168

4.4

Vi har altså en situasjon med to gjensidig utelukkende prosjekter. Beslutningsregelen for internrente er da:

Aksepter det prosjektet som har høyest internrente, hvis internrenten er høyere enn kravet til kapitalkostnad.

Etter dette kriteriet skal vi altså velge prosjekt A.

Beslutningsregelen for netto nåverdi er:

Aksepter det prosjektet som har høyest positiv netto nåverdi.

Ved en kapitalkostnad på 6% er prosjekt B best, ved kapitalkostnad 12% er prosjekt A best. Beslutningen om å velge det eller det andre prosjektet avhenger altså av det krav til kapitalkostnad som settes.

4.5

Annen informasjon. Det kan være informasjon som

- Prosjektene følsomhet overfor endringer i forutsetninger om pris, variable kostnader etc.
- Prosjektets risiko, målt i forhold til risikoen ved prosjektene ellers i økonomien.

5 Oppgave 1.5

5.1 Deloppgave 1

NNV for A og B:

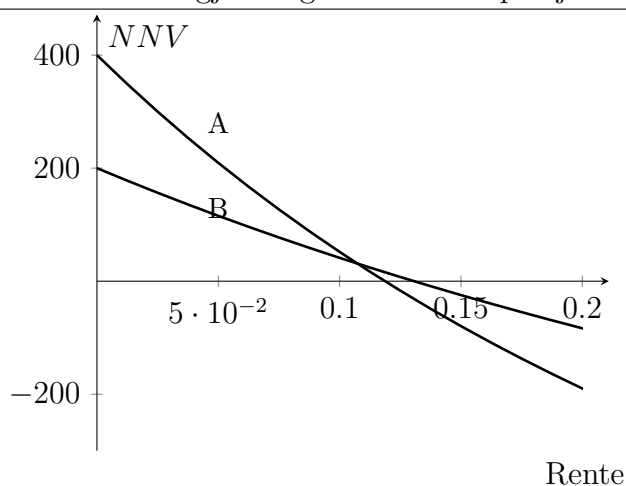
$$NNV_A = -1000 + \frac{600}{1.12} + \frac{600}{1.12^2} = 14.03; \quad NNV_B = -3.51$$

5.2 Deloppgave 2

Finn nåverdiprofilen til de to prosjektene. Etter vanlige metoder har vi at: A: $IRR = 13.07\%$

B: $IRR = 11.87\%$

Figur 2 Nåverdiprofilene til to gjensidig utelukkende prosjekter A og B



5.3 Deloppgave 3

Ved $r = 0$ er $NNV_A = 200$ og $NNV_B = 400$. Prosjekt B må ha høyere NNV i et intervall fra $r = 0$ og utover. Prosjektene vil ha samme NNV når

$$NNV_A = NNV_B$$

altså når

$$-1000 + \frac{600}{(1+r)} + \frac{600}{(1+r)^2} = -1000 + \frac{1400}{(1+r)^3}$$

Forenkling av uttrykket gir:

$$\frac{600}{(1+r)} + \frac{600}{(1+r)^2} - \frac{1400}{(1+r)^3} = 0$$

Multipliserer med $(1+r)^3/100$ på begge sider av likhetstegnet:

$$6(1+r)^2 + 6(1+r) - 14 = 0$$

som vi gjenkjenner som en kvadratisk funksjon. Da har vi:

$$1+r = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-14)}}{2 \cdot 6} = 1.1073$$

dvs $IRR = 10.73\%$, mens den andre roten blir negativ og gir dermed ingen mening.

Prosjekt B har dermed høyere NNV enn B i området $r = 0$ til 10.73% . Alt i alt kan vi dele beslutningene inn i tre deler:

$0 < r < 0.1073$ Prosjekt B har høyest NNV og bør velges.

$0.1073 < r < 0.1307$ Prosjekt A har høyest NNV og bør velges.

$r > 0.1307$ Også prosjekt A har negativ NNV og bør ikke aksepteres.

5.4 Deloppgave 4

Differanseprosjektet (B-A) er gitt ved

B	-1000	0	0	1400
A	-1000	600	600	0
B-A	0	-600	-600	1400

Internrenten finnes ved:

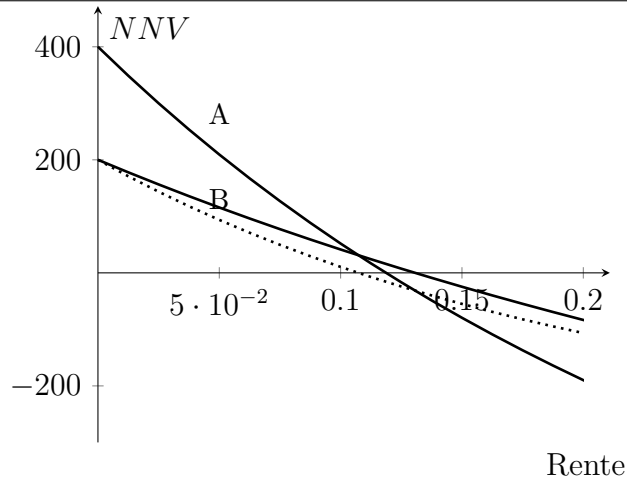
$$NNV = -\frac{600}{1+i} - \frac{600}{(1+i)^2} + \frac{1400}{(1+i)^3} = 0$$

som vi altså gjenkjenner fra Deloppgave 3, dvs. $IRR = 10.73\%$. Vi har samme konklusjoner som ovenfor.

Nåverdiprofilene til differanseinvesteringene sammen med nåverdiprofilene til prosjektene er vist i figur 4.

Legg merke til at nåverdiprofilen til differanseinvesteringen akkurat bryter x -linjen der nåverdiprofilene til prosjekt A og B krysser hverandre.

Figur 3 Nåverdiprofilene til to gjensidig utelukkende prosjekter A og B sammen med differanseinvesteringen (prikket linje)



6 Oppgave 1.6

6.1 Deloppgave 1

Primo har NNV :

$$NNV = -100 + \frac{10}{1.12} + \frac{10}{1.12^2} + \frac{25}{1.12^3} + \frac{50}{1.12^4} + \frac{100}{1.12^5}$$

som betyr at $NNV = 23.21$. Secondo gir

$$NNV = -100 + \frac{100}{1.12} + \frac{20}{1.12^2} + \frac{10}{1.12^3} + \frac{10}{1.12^4} + \frac{5}{1.12^5}$$

Altså $NNV = 21.54$.

6.2 Deloppgave 2

Differanseprosjektet (Primo - Secondo) er gitt ved

Primo	-100	10	10	25	50	100
Secondo	-100	100	20	10	10	5
$P - S$	0	-90	-10	15	40	95

Internrenten er da gitt ved:

$$NNV = -\frac{90}{1+i} - \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{15}{(1+i)^3} + \frac{40}{(1+i)^4} + \frac{95}{(1+i)^5} = 0$$

Vi finner at internrenten til differanseinvesteringen $IRR = 12.62\%$.

6.3 Deloppgave 3

Nåverdiprofilene viser følgende skjæringspunkter med linjen for $NNV = 0$.

$$IRR_P = 18.11\%$$

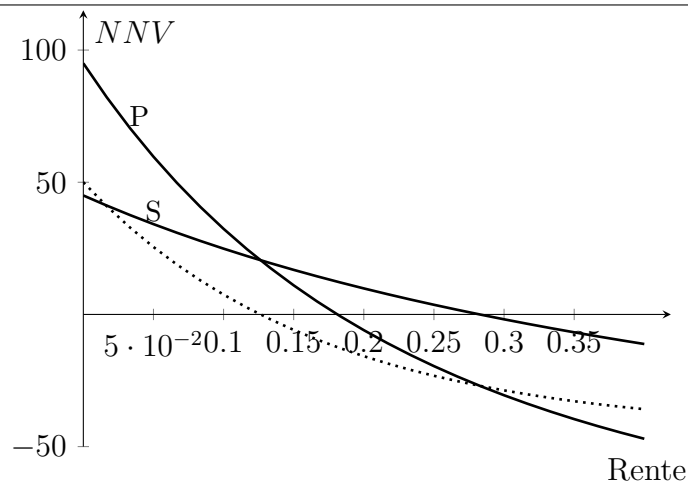
$$IRR_S = 28.26\%$$

$0 < r < 0.1262$ Prosjektet Primo velges, siden det har høyest NNV .

$0.1262 < r < 0.2826$ Secondo velges, siden dens NNV er høyest i området.

$r > 0.2826$ Ingen av prosjektene aksepteres.

Figur 4 Nåverdiprofilene til to gjensidig utelukkende prosjekter Primo og Secondo sammen med differanseinvesteringen (prikket linje)



7 Oppgave 1.7

7.1 Deloppgave 1

Netto nåverdi og internrente er gitt i tabellen nedenfor.

	0	1	2	3	<i>NNV</i>	<i>IRR</i>
1	-60000	30000	25000	25000	6716.75	0.16
2	-30000	-20000	25000	45000	6288.50	0.16
3	-40000	-50000	60000	70000	16724.27	0.20
4	0	-80000	45000	55000	5785.12	0.16
5	-50000	10000	30000	40000	13936.89	0.22

7.2 Deloppgave 2

Alle prosjektene har positiv netto nåverdi, og ville altså blitt akseptert.

7.3 Deloppgave 3

Mobekken bør velge de prosjekter som har høyest *nåverdiindeks* innenfor investeringsbudsjettet. Denne er definert ved:

$$NI = \frac{NNV}{K_0} \tag{3}$$

	0	<i>NNV</i>	<i>NI</i>
1	-60000	6716.75	0.11
2	-30000	6288.50	0.21
3	-40000	16724.27	0.42
4	0	5785.12	
5	-50000	13936.89	0.28

Prosjekt 3 skal velges først, deretter prosjekt 5. Da er 90,000 av investeringsbudsjettet brukt opp, og de siste 10,000 skal brukes på prosjekt 2. Legg merke til at vi kan gjennomføre et gitt prosjekt delvis. Noter også at prosjekt 4 ikke er med i vurderingen i denne perioden. Investeringen kommer først neste periode, og beslutningen om gjennomføring kan utsettes til da.