Løsning av oppgaver eksamen 6. juni

1a) X = antall europeiske fond. Hypergeometrisk fordelt, $N = 21, M = 8.n = 5$

$P(X=4) = \dfrac{\binom{8}{4}\cdot\binom{13}{1}}{\binom{21}{5}} = \dfrac{70\cdot 13}{20349} = 0.0447$

$P(X \geqq 3) = \dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{13}{2}}{\binom{21}{5}} + 0.0447 + \dfrac{\binom{8}{5}\cdot\binom{13}{0}}{\binom{21}{5}} = 0.2147 + 0.0447 + 0.0028 = 0.2622$

b) Betinget sannsynlighet:

$P(R) = P(R \mid F)\cdot P(F) + P(R \mid I)\cdot P(I) = 0.6\cdot 0.75 + 0.8\cdot 0.25 = 0.65$

Sannsynligheten for rødvinsflaske er 0.65.

Bayes setning: $P(F \mid H) = \dfrac{P(H \mid F)\cdot P(F)}{P(H)} = \dfrac{0.4\cdot 0.75}{1-0.65} = 0.8571$

Oppgave 2 a) $E(X) = 0\cdot 0.125 + 1\cdot 0.495 + 2\cdot 0.333 + 3\cdot 0.027 + 4\cdot 0.019 + 5\cdot 0.001 =$ 1.323

$Var(X) = 0^2\cdot 0.125 + 1^2\cdot 0.495 + 2^2\cdot 0.333 + 3^2\cdot 0.027 + 4^2\cdot 0.019 + 5^2\cdot 0.001 - 1.323^2 =$ 0.648671

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.648671} = 0.805$

b) Uavhengighetstest

	Mann	Kvinne	Sum	Relativ frekvens
Venstrehendt	56 (47.6)	42 (50.4)	98	0.112
Høyrehendt	369 (377.4)	408 (399.6)	777	0.888
	425	450	875	

H_0 : Variablene er uavhengige.

H_1 :Variablene er avhengige

Testobservator: $Q = \sum \dfrac{(\text{observert verdi-forventet verdi})^2}{\text{Forventet verdi}} \geqq$

Testmetode: Forkast H_0 og godta H_1 dersom $Q \geqq k$.

k hentes fra kjikvadratfordeling, $1\cdot 1 = 1$ frihetsgrad.

$\alpha = P_0(Q \geqq k) = 0.05 \Rightarrow k = 3.84$.

Observert verdi: $Q = \dfrac{(56-47.6)^2}{47.6} + \dfrac{(42-50.4)^2}{50.4} + \dfrac{(369-377.4)^2}{377.4} + \dfrac{(408-399.6)^2}{399.6} =$

3.25

Vi forkaster ikke H_0 siden $3.25 < 3.84$

Ut fra disse observasjonene er det ikke grunnlag for å påstå at det er forskjell mellom kjønnene når det gjelder det å være venstrehendt.

Oppgave 3

a) Y =antall ansatte med flyskrekk. X kan antas å være binomisk fordelt.

$P(Y=7) = \binom{30}{7} \cdot 0.15^7 \cdot 0.85^{23} = 0.0828$

b) Estimat for p: $\frac{66}{400} = 0.165$

Estimert standardavvik: $\sqrt{\dfrac{0.165 \cdot 0.835}{400}} = 0.0186$

95 % - konfidenssannsynlighet og normaltilnærming gir $k = z_{0.025} = 1.96$

$[0.165 - 1.96 \cdot 0.0186,\ 0.165 + 1.96 \cdot 0.0186] = [0.129,\ 0.201]$

c) $H_0 : p = 0.15 \qquad H_1 : p > 0.15$

Testobservator: X = antall med flyskrekk blant de 400

Testmetode: Forkast H_0 og godta H_1 dersom $X \geqq k$

$$\alpha = P_0(X \geqq k) = 1 - P_0(X \leqq k-1) \approx 1 - G\left(\frac{k - 0.5 - 400 \cdot 0.15}{\sqrt{400 \cdot 0.15 \cdot 0.85}}\right) = 0.05$$

$$\frac{k - 0.5 - 400 \cdot 0.15}{\sqrt{400 \cdot 0.15 \cdot 0.85}} = 1.645 \Leftrightarrow k = 0.5 + 60 + 1.645 \cdot \sqrt{51} = 72.24$$

Runder av til $k = 73$

Observert verdi: $X = 66$

Vi forkaster ikke H_0 siden $66 < 73$.

$$P-\text{verdi: } P = P_0(X \geqq 66) \approx 1 - G\left(\frac{65.5 - 400 \cdot 0.15}{\sqrt{400 \cdot 0.15 \cdot 0.85}}\right) = 1 - G(0.77) = 0.2206$$

Med 1 % signifikansnivå er fortsatt $P > \alpha$, noe som betyr at H_0

ikke forkastes.

d) $$\gamma(0.20) = P_{0.2}(X \geqq 73) \approx 1 - G\left(\frac{72.5 - 400 \cdot 0.20}{\sqrt{400 \cdot 0.20 \cdot 0.80}}\right) = 1 - G(-0.94) = 0.8264$$

Oppgave 4 a) $P(X < 18) = G\left(\dfrac{18 - 25.6}{5.1}\right) = G(-1.49) = 0.0681$

$P(24 < X < 30) = G\left(\frac{30-25.6}{5.1}\right) - G\left(\frac{24-25.6}{5.1}\right) = G(0.86) - G(-0.31) = 0.8051 - 0.3783 = 0.4268$

b) $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = 25.6 \qquad \mathrm{H}_1 : \mu_1 > 25.6$

Testobservator: $T = \dfrac{\overline{X} - 25.6}{\frac{S_X}{\sqrt{20}}}$

Testmetode: Forkast H_0 og godta H_1 dersom $T \geqq k$.

$t-$tabell, 19 frihetsgrader, $k = t_{0.05} = 1.729$

Observert verdi: $T = \dfrac{27.8 - 25.6}{\frac{6.0}{\sqrt{20}}} = 1.639$

Vi forkaster ikke H_0 siden $1.639 < 1.729$

$$\left[27.8 - 2.093 \cdot \frac{6.0}{\sqrt{20}}, 27.8 + 2.093 \cdot \frac{6.0}{\sqrt{20}}\right] = [24.99, 30.61]$$

b) Når standardavviket antas å være kjent, kan vi bruke normalfordeling til å gjennomføre testen.)5 % konfidenssannsynlighet gir da $k = 1.96$

$L = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = 4 \cdot 1.96^2 \cdot \dfrac{\sigma^2}{L^2} = 4 \cdot 1.96^2 \cdot \dfrac{5.1^2}{2^2} = 99.92 \Rightarrow n = 100$

Oppgave 5 a) $r = -0.9634$

$\widehat{Y} = 599.68 - 3.9087 \cdot X$

Sterk og negativ lineær samvariasjon siden r er nær -1.

Estimat når $X = 60 : \widehat{Y} = 599.68 - 3.9087 \cdot 60 = 365.16 \approx 365$ pølser

b) $\mathrm{H}_0 : \beta = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : \beta \neq 0$

Testobservator: $T = \dfrac{\widehat{\beta}}{\frac{S}{\sqrt{M}}}$

$t-$fordeling, $8 - 2 = 6$ frihetsgrader.

Testmetode: Forkast H_0 og godta H_1 dersom $T \leqq k_1$ eller $T \geqq k_2$

$k_1 = -t_{0.025} = -2.447, k_2 = 2.447$

$M = 1512 \quad S = \sqrt{\dfrac{1788.42}{6}} = 17.26$

$T = \dfrac{-3.9087}{\frac{17.27}{\sqrt{1512}}} = -8.46$

$-8.46 < -2.447$

Vi forkaster H_0.Signifikant lieær samvariasjon.

95 % - konfidensintervall:

$$\left[-3.9087 - 2.447 \cdot \frac{17.27}{\sqrt{1512}},\ -3.9087 + 2.447 \cdot \frac{17.27}{\sqrt{1512}}\right] = [-5.00,\ -2.82]$$

H_0 går ut på at $\beta = 0$. Konfidensintervallet inneholder ikke 0. Det er et tegn på at H_0 forkastes.

(NB! Dette forusetter at konfidenssannsynligheten er lik $1-$ signifikansnivået, noe som er oppfylt her.)