Kap. 13: Prising av opsjoner

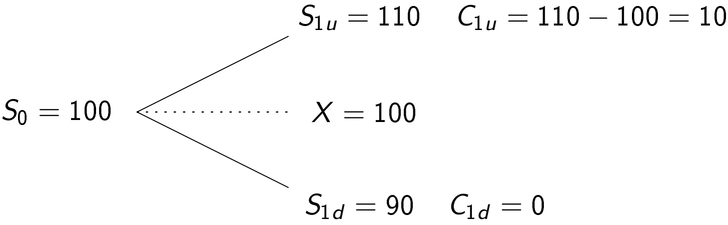
Oversikt

- Faktorer som påvirker opsjonens pris
- Binomisk prising
  - Arbitrasjefri prising av opsjon
  - Risikonøytral prising
- Black-Scholes-Merton (BSM)

Faktorer som påvirker opsjonens pris

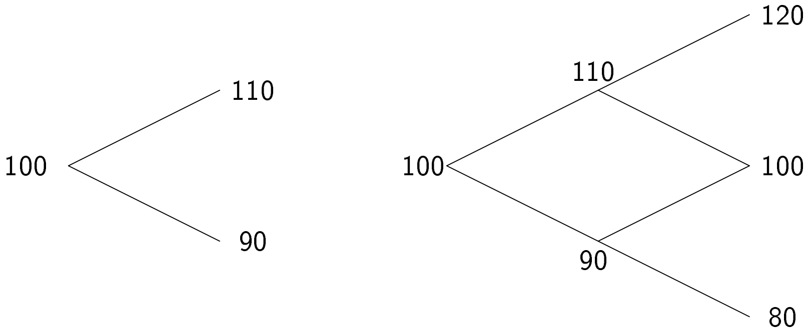
Aksjens pris	S_T	$+$
Utøvelseskurs	X	$-$
Tid til forfall	T	$+$
Volatilitet, eller aksjens flyktighet	σ	$+$
Rentenivået	r_f	$+$
Dividende	Div_t	$+$

Prinsippdiagram for binomisk prisprosess. *u* er positiv endring ("up") og *d* er negativ endring ("down")



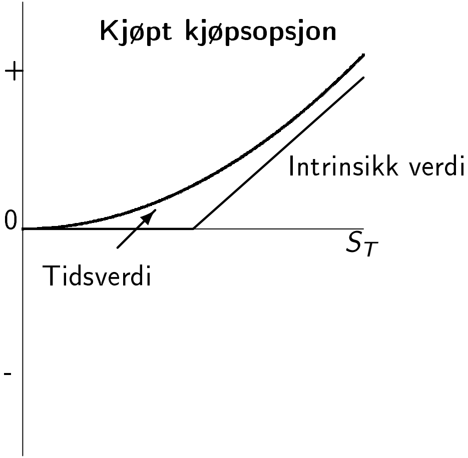
Prisprosess Måten prisen utvikler seg på. Her enten opp eller ned, d.v.s. binomisk

Lengre tid til forfall

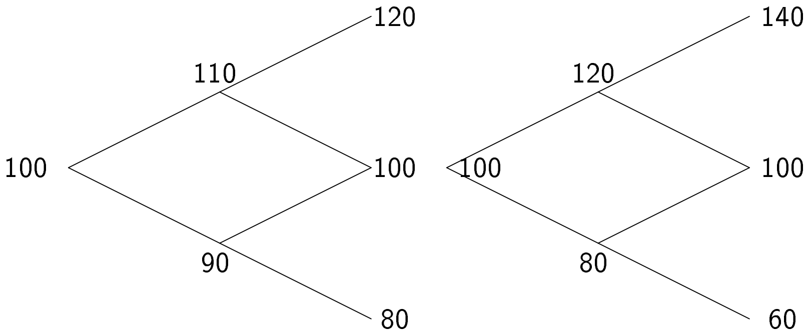


Lengre tid til forfall betyr flere sjanser til å nå høye verdier.

Opsjonens "intrinsikke" verdi



Volatilitet er bra!



Binomisk prising

- Opsjonsprisformelen ble først utviklet i kontinuerlig tid av Black and Scholes (1973) og Merton (1973). Vi kaller den BSM.
- Hovedprinsippene i opsjonsprising kan analyseres ved hjelp av den binomiske tilnærming, (Cox et al., 1979).
- Den binomiske konvergerer mot den kontinuerlige BSM-modellen når tallet på perioder økes.

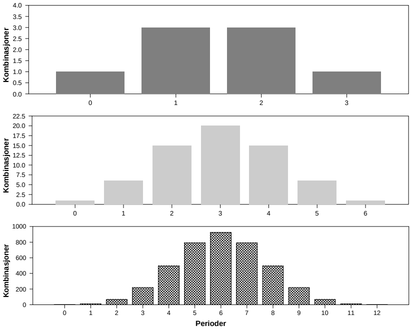
Arbitrasjefri prising
: Opprinnelige versjonen; Opsjonen må ha samme pris som en portefølje av aksjen og et lån med samme kontantstrøm

Risikonøytral prising
: Lager en risikojustert sannsynlighet som hver tilstand diskonteres med

Fordeler med en binomisk modell

- Prinsippene for opsjonsprising kan vises med enkel matematikk.
- Flere spesifikasjoner er mulige, for eksempel at endringene fra en periode til neste er ulike.
- Den binomiske modellen har den kontinuerlige som grense.

Binomisk fordeling tenderer mot den normale når tallet på perioder øker

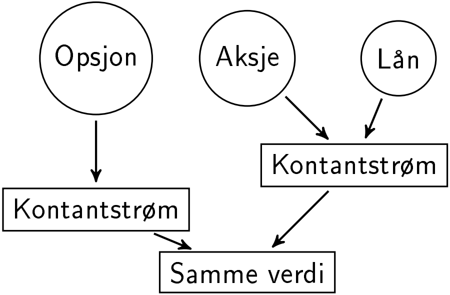


I øverste delfigur er tallet på perioder $T = 3$, i den midterste $T = 6$, og den nederste delfiguren er tallet på perioder $T = 12$.

Forutsetningene for modellen

1. Markedene er perfekte og komplette, dvs. det er ingen arbitrasjemuligheter og alle eiendeler prises. Videre: Ingen transaksjonskostnader, ingen krav til delinnbetaling og ingen skatter. Andeler av eiendeler kan kjøpes.
2. Hver periodes rente r_f og hver periodes positive endring u og negative endring d er kjent.

Like kontantstrømmer, samme verdi



Da må opsjon være lik en mengde aksjer og et lån:

$$\text{Opsjon} = \Delta\text{Aksje} + \text{Lån}$$

Denne arbitrasjesammenhengen utnyttes for å finne verdien til opsjonen

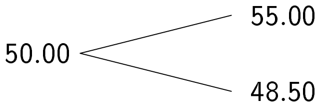
Arbitrasjefri prising: fremgangsmåte:

1. Definer aksjens prisprosess. Gitt dagens pris, kan aksjen ha en av to verdier neste periode, enten $S_0(1+u)$ eller $S_0(1+d)$.
2. Bestem verdien av kjøpsopsjonen ved forfall. Det vil bare være to mulige priser på kjøpsopsjonen ved forfall.
3. Sett verdien av en ukjent "likeverdig portefølje" av aksjen og lån lik med kontantstrømmen av kjøpsopsjonen. Dette gir to ligninger med to ukjente.
4. Benytt loven om en pris: Når to eiendeler har samme kontantstrømmer på et fremtidig tidspunkt, må de to eiendelene være like mye verdt i dag. Siden porteføljen og kjøpsopsjonen har samme kontantstrømmer, må de være like mye verdt.

Et illustrasjonseksempel

En aksje har i dag verdi 50.00, som også er kjøpsopsjonens utøvelsespris. I neste periode kan prisen gå opp 10.0% eller falle 3.0%. Risikofri rente i markedet er 6.0%. Hva er kjøpsopsjonens pris i dag?

Steg 1: Aksjens prisprosess



Steg 2: Fastlegg verdien av kjøpsopjonen i neste periode

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & C_u = \max\left[0, 55.00 - 50.00\right] = 5.00 \\
C_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & C_d = \max\left[0, 48.50 - 50.00\right] = 0.00
\end{tikzcd}
$$

Steg 3: Dann en portefølje med en andel Δ av aksjen og et kontantbeløp B og sett lik opsjonen

$$\Delta S_0 + B \quad \begin{cases} \Delta S_u + (1 + r_f)\, B = 5.00 \\ \Delta S_d + (1 + r_f)\, B = 0.00 \end{cases}$$

Steg 4: To ligninger med to ukjente Δ, B

$$\Delta S_u + (1 + r_f)\, B = 5.00$$
$$\Delta S_d + (1 + r_f)\, B = 0.00$$

Verdiene må være

$$\Delta = 0.769231; \qquad B = -35.1959$$

Altså: Lån 35.20 og hold en andel 0.77 av aksjen.

Vi har dermed:

$$C_0 = 0.769231 \times 50.00 - 35.1959 = 3.2656$$

Illustrerer *arbitrasjeprinsippet*:

- Opsjonen er like mye verdt som en andel i aksjen og et lån, siden begge har samme kontantstrøm.
- Tolkning: Den likeverdige porteføljen av aksjen finansiert med lån brukes til å sette riktig pris på opsjonen.
- Videre: Opsjonen vil være mer volatil enn aksjen selv.

Generelt har vi altså at

$$C_0 = \Delta S_0 - B \tag{1}$$

Sammenhengen er svært nyttig i BSM-modellen og i verdsetting av et selskaps eiendeler.

Generell fremgangsmåte

$$S_0 \quad \begin{cases} S_u = (1+u)S_0 \\ S_d = (1+d)S_0 \end{cases}$$

$$C_0 \quad \begin{cases} C_u = \max[0, S_u - X] = \max[0, (1+u)S_0 - X] \\ C_d = \max[0, S_d - X] = \max[0, (1+d)S_0 - X] \end{cases}$$

$$\Delta S_0 + B \quad \begin{cases} \Delta S_u + (1+r_f)\,B = \Delta(1+u)S_0 + (1+r_f)\,B = C_u \\ \Delta S_d + (1+r_f)\,B = \Delta(1+d)S_0 + (1+r_f)\,B = C_d \end{cases}$$

Generell formel

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{2}$$

Prøv i eksemplet:

$$C_0 = \frac{1}{1.06}\left[\frac{0.06-(-0.03)}{0.10-(-0.03)}5.00 + \frac{0.10-0.06}{0.10-(-0.03)}0.00\right] = 3.27$$

Kontroll:

$$C_0 = \Delta S_0 - B = 0.769231 \cdot 50.00 - 35.1959 = 3.2656$$

Risikonøytral prising

Gå tilbake til (2):

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u-r_f}{u-d}C_d\right]$$

og eksemplet. Regn ut brøkene:

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} \rightarrow \frac{0.06-(-0.03)}{0.10-(-0.03)} = 0.6923$$

$$1-q = \frac{u-r_f}{u-d} \rightarrow \frac{0.10-0.06}{0.10-(-0.03)} = 0.3077$$

q Den risikonøytrale sannsynligheten for opp-tilstanden

$1-q$ Den risikonøytrale sannsynligheten for ned-tilstanden

Risikonøytral prising

Nå kan vi skrive (2):

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \tag{3}$$

Formuleringen er spesielt nyttig når det er flere perioder. To perioder:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{4}$$

Eksempel på risikonøytral prising

Fortsett eksemplet vi allerede har.
$C_{uu} = 55 \cdot 1.10 - 50 = 10.50$, $C_{ud} = 55 \cdot 0.97 - 50 = 3.35$,
$C_{dd} = 48.50 \cdot 0.97 - 50 = 0.00$ *og*
$C_{du} = 48.50 \cdot 1.10 - 50 = 3.35$.

Vi bruker altså

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right]$$

Vi har:

$$C_0 = \frac{1}{1.06^2}\Big[0.6923^2 10.50 + 2 \cdot 0.6923 \cdot 0.3077 \cdot 3.35 \\ + 0.3077^2 0.00\Big] = 5.7492$$

Black-Scholes-Merton (BSM)

- Opsjonsprismodell for prisprosesser i kontinuerlig tid.
- Kontinuerlig tid: Kan tegnes på papiret uten å løfte pennen.
- Relativt utilgjengelig matematikk - vi forholder oss til resultatene.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{5}$$

μ er forventet avkastning på aksjen, σ er aksjens volatilitet, dt er en svært liten endring i tid, og dz tilhører en såkalt Wiener-prosess (Hull, 2000, s. 220-225).

Renteregning i kontinuerlig tid

Anta du mottar m renteutbetalinger til r/m pr. år. Etter ett år:

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Anta nå at $m \to \infty$. Da vil

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = e^{m \ln(1+(r/m))} \sim e^r$$

Etter at det har gått t perioder:

$$e^{rt} \qquad \text{Forrentning} \qquad e^{-rt} \qquad \text{Diskontering} \tag{6}$$

EKS.: Sett $r = 10\%, t = 0.25$. Et innskudd på 100 vil da vokse til:

$$100 \cdot e^{0.1 \cdot 0.25} = 102.53$$

Et beløp på 100 som mottas på tidspunkt $t = 0.25$ gir *nåverdien*:

$$100 \cdot e^{-0.1 \cdot 0.25} = 97.53$$

Forutsetninger

- De finansielle markedene er perfekte, dvs. uten transaksjonskostnader og skatter. Short-salg er tillatt, og eiendelene er perfekt oppdelbare.
- Alle investorer kan låne og låne ut til samme risikofrie rente, som er konstant frem til opsjonens forfall.
- Aksjen gir ikke noe utbytte.
- Markedene er komplette, dvs. alle eiendeler i økonomien har en pris, markedene er alltid åpne og handelen skjer kontinuerlig.

BSM-opsjonsprisen

$$
\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

σ	Volatilitet, dvs. standardavvik til aksjeavkastningen dS
$\ln(S_0/X)$	Den naturlige logaritmen til S_0/X
$e^{-r_f T}$	Nåverdi-faktoren når r_f beregnes i kontinuerlig tid
$\mathcal{N}(\cdot)$	Arealet av den normaliserte normalfordelingen opp til verdien i parentesen

BSM: et eksempel

Aksjekursen er 50.00 i dag, utøvelseskursen er det samme, aksjens volatilitet er 0.40, risikofri rente er 6.00% og det er et halvt år til forfall.

1. *Hva er opsjonsprisen?*
2. *Hva blir opsjonsprisen hvis volatiliteten synker til 0.25?*
3. *Hva blir opsjonsprisen hvis tid til forfall øker til ett år?*

BSM - Løsning

Bruk formelen (7). Start med d_1:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(50.00/50.00) + \left(0.06 + \frac{0.40^2}{2}\right) 0.50}{0.40\sqrt{0.50}} \\
&= \frac{0.00 + 0.140 \cdot 0.5}{0.28284} \\
&= \frac{0.07}{0.28284} \\
&= 0.24749
\end{aligned}
$$

$$d_2 = 0.24749 - 0.40 \cdot \sqrt{0.50} = -0.03536$$

Verdiene i den normaliserte normalfordeling

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(0.24749) &\sim 0.597734 \\
\mathcal{N}(-0.03536) &\sim 0.485898
\end{aligned}
$$

BSM - Løsning

Innsatt i første linje:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
&= 50.00 \cdot 0.597734 - 50.00 \cdot e^{-0.06 \cdot 0.50} \cdot 0.485898 \\
&= 29.89 - 50.00 \cdot 0.97045 \cdot 0.485898 \\
&= \underline{6.31}
\end{aligned}
$$

2. Hvis $\sigma = 0.25$ $C_0 = \underline{4.26}$
3. Hvis $T = 1$ $C_0 = \underline{9.24}$

Litteratur

Black, F. and M. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy 81*, 637–654.

Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics 7*, 229–263.

Hull, J. C. (2000). *Options, Futures, & Other Derivatives* (fourth ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science 4*, 141–183.