Diversifiseringsoppgaver - Løsningsforslag

1

1.1 Forventet avkastning og standardavvik

Avkastningen r_j er gitt av:

$$r_j = \frac{S_{j1} - S_{j0} + Div_{j1}}{S_{j0}} \tag{1}$$

der

P_{j1}	Prisen på aksje j på tidspunkt 1
P_{j0}	Prisen på aksje j på tidspunkt 0
Div_{j1}	Utbetalt utbytte pr. aksje i periode 1

Vi må først finne avkastningen i de ulike tilstander, deretter finne forventet verdi for hvert prosjekt. Prosjekt A kalles 1 heretter og prosjekt B 2. Vi bruker (1) og finner for Prosjekt 1:

$$r_{1l} = \frac{90 - 100}{100} = -0.1$$

$$r_{1m} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1$$

$$r_{1h} = \frac{130 - 100}{100} = 0.3$$

Tilsvarende har vi for Prosjekt 2:

$$r_{2l} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1$$

$$r_{2m} = \frac{105 - 100}{100} = 0.05$$

$$r_{2h} = \frac{95 - 100}{100} = -0.05$$

Nå har vi avkastningene i de ulike tilstandene og kan beregne forventet avkastning og standardavvik direkte.

Tabell 1 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 1

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Lav	0.3	-10.0	-3.0	-18.0	324.0	97.2
Middels	0.5	10.0	5.0	2.0	4.0	2.0
Høy	0.2	30.0	6.0	22.0	484.0	96.8
		$E(r_1) =$	8.0		$\sigma_1^2 =$	196.0
					$\sigma_1 =$	14.0

I tabellene til Prosjekt 1 og 2 er

$$\text{Avvik}_l = (\text{Avkastning}_l - \text{Forventet avkastning})$$

eller i symboler

$$\text{Avvik}_l = r_{1l} - E(r_1)$$

for prosjekt 1 og tilsvarende for prosjekt 2. Det gjenstår å understreke at l antyder hvilken tilstand man er i, slik at l tar en av verdiene (Lav, Middels, Høy)

Tabell 2 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 2

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Lav	0.3	10.0	3.0	5.5	30.3	9.1
Middels	0.5	5.0	2.5	0.5	0.3	0.1
Høy	0.2	-5.0	-1.0	-9.5	90.3	18.1
		$E(r_2) =$	4.5		$\sigma_2^2 =$	27.3
					$\sigma_2 =$	5.2

1.2 Risikoreduksjon?

Forventet avkastning av en portefølje bestående av to eiendeler er gitt av

$$E(r_p) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{2}$$

Kan vi oppnå en risikoreduksjon ved å kombinere de to prosjektene? Dette er et spørsmål om porteføljen av de to prosjektenes standardavvik kan reduseres. Porteføljens standardavvik σ_p er

gitt ved:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{3}$$

der w er andelen av investeringen plassert i 1, $(1-w)$ er andelen av investeringen plassert i 2. For å kunne svare på dette, må vi altså vite hva korrelasjonskoeffisienten ρ_{12} er. Vi må gjennom beregning av kovariansen, siden

$$\text{Korrelasjonskoeffisient} = \frac{\text{Kovarians}}{\text{Standardavvik(1)} \times \text{Standardavvik(2)}}$$

eller i symboler

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{4}$$

Beregningen er vist i Tabell (3).

Tabell 3 Beregning av kovarians mellom Prosjekt 1 og 2

Tilstand	Sanns.	Avv1	Avv2	Prod
Lav	0.3	-18.0	5.5	-29.7
Middels	0.5	2.0	0.5	0.5
Høy	0.2	22.0	-9.5	-41.8
			σ_{12}	-71.0

Vi ser at kovariansen er negativ, dermed vet vi at det er betydelige muligheter for risikoreduksjon. Hvor stor finner vi ved å se på korrelasjonskoeffisienten. Innsetting gir:

$$\rho_{12} = \frac{-71}{14.0 \times 5.2} = -0.975$$

Korrelasjonskoeffisienten viser at de to prosjektene er nær perfekt negativt korrelerte. Nesten all risiko i porteføljen kan dermed fjernes, når vekten investert i prosjekt 1 velges med en slik risikoreduksjon for øyet.

1.3 Ulike korrelasjonskoeffisienter

Vi skal bruke ulike korrelasjonskoeffisienter for å studere virkningene på risikoreduksjon. Porteføljens standardavvik er gitt av (3), og gir for innsetting av $w = 0.25$ følgende verdi når $\rho = -1.0$:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 + 0.75^2 5.2^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 \cdot (-1.0)} = 0.5$$

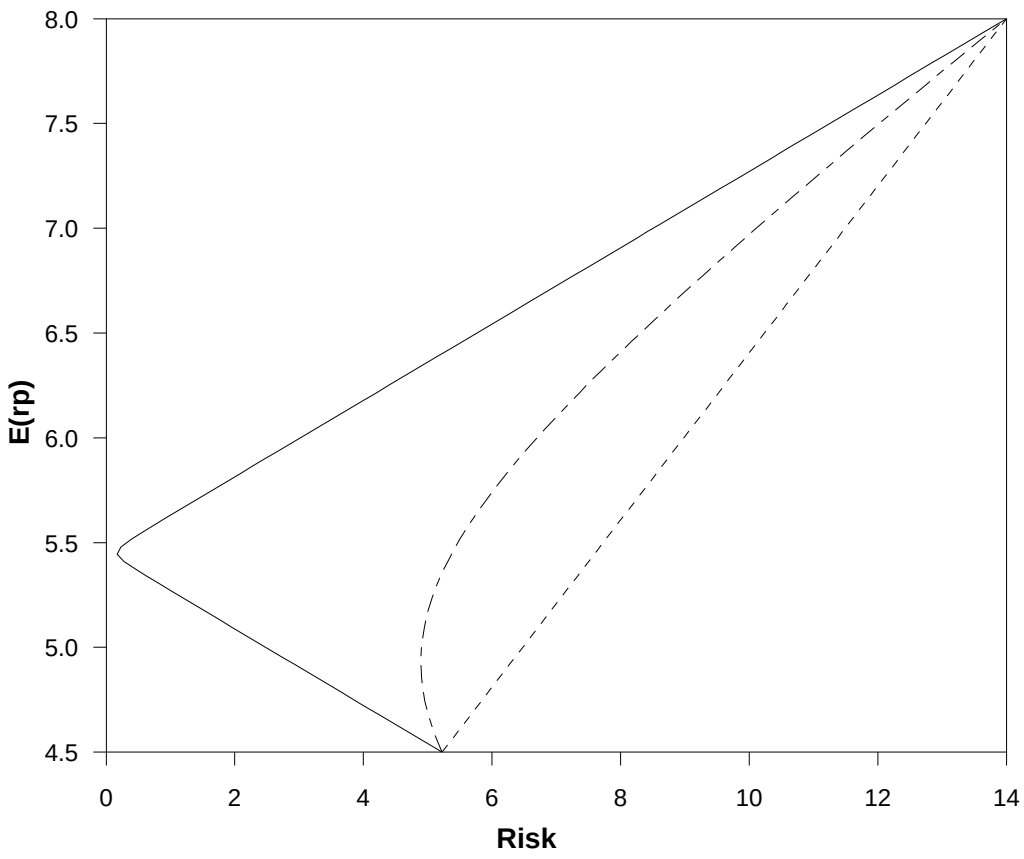
I dette tilfellet er vi altså temmelig nær 0,0 i risiko for porteføljen. For $\rho = 0.0$ har vi tilsvarende

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 + 0.75^2 5.2^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 \cdot (0.0)} = 5.3$$

Vi har nå risikoreduksjon, men adskillig lavere enn for tilfellet med $\rho_{12} = -1.0$. For $\rho = 1.0$ er situasjonen følgende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 + 0.75^2 5.2^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 \cdot (1.0)} = 7.4$$

I det siste tilfellet har vi ingen risikoreduksjon. Se også diagram 1.



Figur 1: Risiko og avkastning i porteføljen av aksje- og obligasjonsfond når korrelasjonskoeffisienten er -1.0. 0.0 eller +1.0

Vi kan også leke oss videre. Siden $\rho = -1.0$, kan vi skrive porteføljens standardavvik

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 - 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 + 0.75^2 5.2^2}$$

idet vi bare har flyttet på elementene og ganget inn minustegnet. Videre kan dette omformes

til:

$$\sigma_p = \sqrt{(0.25 \cdot 14.0 - 0.75 \cdot 5.2)^2}$$

som er

$$\sigma_p = 0.25 \cdot 14.0 + 0.75 \cdot 5.2$$

Nå vet vi at man med en portefølje av to prosjekter med korrelasjonskoeffisient lik -1.0 kan oppnå full risikoreduksjon, dvs. $\sigma_p = 0$. Fra dette kan vi finne den andel w som gjør dette mulig. Vi setter w i stedet for 0.25, og anser denne for å være en ukjent her. Vi har:

$$\sigma_p = w \cdot 14.0 - (1 - w) \cdot 5.2 = 0$$

Ved å isolere w finner vi

$$w = \frac{5.2}{14.0 + 5.2} = 0.2708$$

Kontrollregning gir at *minimum-varians-porteføljen* virkelig er 0.0. Vi setter inn for $w = 0.2708$:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 0.2708^2 196 + 0.7292^2 27.3 + 2 \cdot 0.2708 \cdot 0.7292 \cdot (-71.00) \\ &= 0.85\end{aligned}$$

Vi fikk ikke det helt ønskede resultat på $\sigma_p = 0.0$. Årsaken ligger i mindre avrundingsfeil underveis.

2

2.1 Delspørsmål 1

Forventet avkastning får vi ved å formelen for avkastningen i en portefølje med to eiendeler. Ved 10% i A har vi:

$$E(r_p) = 0.10 \cdot 22 + 0.90 \cdot 13 = 13.9\%$$

Ved 25% i A:

$$E(r_p) = 0.25 \cdot 22 + 0.75 \cdot 13 = 15.25\%$$

Ved 50% i A:

$$E\left(r_p\right) = 0.50 \cdot 22 + 0.50 \cdot 13 = 17.5\%$$

Ved 90% i A:

$$E\left(r_p\right) = 0.90 \cdot 22 + 0.10 \cdot 13 = 21.1\%$$

2.2 Delspørsmål 2: Standardavviket til porteføljen

Innsetting i formelen for porteføljens standardavvik gir for $w = 0.1$:

$$\sigma_p = \sqrt{0.10^2 32.0^2 + 0.90^2 23^2 + 2 \cdot 0.10 \cdot 0.90 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 21.26$$

For 25% har vi tilsvarende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 32.0^2 + 0.75^2 23^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 19.73$$

For 50% har vi tilsvarende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.50^2 32.0^2 + 0.50^2 23^2 + 2 \cdot 0.50 \cdot 0.50 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 20.62$$

For 90% har vi tilsvarende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.90^2 32.0^2 + 0.10^2 23^2 + 2 \cdot 0.90 \cdot 0.10 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 29.12$$

2.3 Delspørsmål 3

Prøving og feiling med Excel gir en prosentandel for A på ca. 32.0%. Da er $\sigma_P = 19.53$.

2.4

Innsetting i formelen for minimum-variansporteføljen gir:

$$w = \frac{23^2 - 32 \cdot 23 \cdot 0,1}{32^2 + 23^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 0.3239$$

eller 32.39%. Porteføljens standardavvik er med denne vekten plassert i aksjer:

$$\sigma_p = \sqrt{0.3239^2 32.0^2 + 0.6761^2 23^2 + 2 \cdot 0.3239 \cdot 0.6761 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 19.53$$

som stemmer bra med det vi har funnet ved hjelp av Excel.

2.5

I dette tilfellet kjenner vi altså porteføljens avkastning. Vi bruker altså bare ligningen for avkastning på porteføljen, dvs. ved innsetting

$$E\left(r_p\right) = w22 + (1 - w)13 = 15.00$$

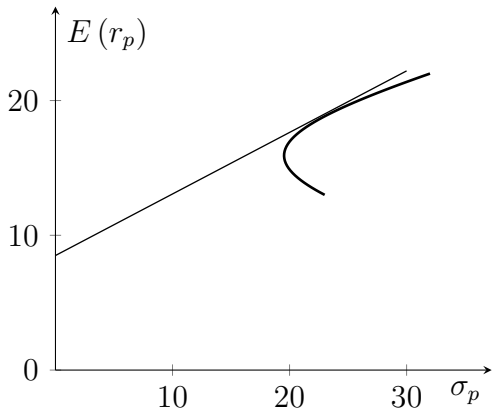
Dette er en ligning med en ukjent. Ordning gir:

$$9w = 2 \qquad w = 0.2222$$

eller 22.22%.

2.6 Risikofri og risikable eiendeler

Figur 2 viser porteføljefronten for portefølje AO sammen med den rette linjen som starter i $r_f = 8.5$.



Figur 2: Porteføljefronten kombinert med den risikofrie renten

Den risikofri rente kombineres med porteføljen AO. Det gir en rett linje fra $r_f = 8.5$ og opp til tangenten til effisiensgrensen for AO.

3

Først må de to minimum variansporteføljene finnes. Vi bruker formelen fra oppgaven. Bare korrelasjonskoeffisienten endres i forhold til den opprinnelige beregningen, altså har vi, når $\rho_{AO} = 0,75$:

$$w = \frac{23^2 - 32 \cdot 23 \cdot 0.75}{32^2 + 23^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.75} = -0.0512$$

En negativ vekt innebærer at man skal "shorte" vedkommende eiendel. Å shorte innebærer at man selger et verdipapir man ikke eier, eller at man låner et verdipapir, selger det men samtidig lover å returnere verdipapiret. For vårt formål innebærer en negativ vekt at den laveste varians porteføljen kan oppnå er variansen til det verdipapiret som har lavest varians.

Når korrelasjonskoeffisienten er lik -0.75, har vi:

$$w = \frac{23^2 - 32 \cdot 23 \cdot (-0.75)}{32^2 + 23^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23 \cdot (-0.75)} = 0.4068$$

Porteføljens standardavvik er nå $\sigma_p = 9.4$.

4

I tilfellet med $N = 3$ har vi at avkastningen i porteføljen er:

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 \tag{5}$$

Formelen for porteføljens standardavvik er ennå håndterbar:

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}} \tag{6}$$

Legg merke til at vi har tre varianser, men seks kovarianser. Vi kan stille opp korrelasjonsmatrisen for korrelasjonene mellom eiendelene, slik som nedenfor:

	1	2	3
1	1.0	-0.6	-0.6
2	-0.6	1.0	0.2
3	-0.6	0.2	1.0

Hadde vi brukt varianser og kovarianser, ville vi fått den såkalte varians-kovariansmatrisen.

Vi kan nå finne svar på spørsmålene ved å sette inn i (5) og (6). Når porteføljen er likeveid, er altså $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$. Avkastningen er i dette tilfellet:

$$\frac{1}{3}(6.3 + 11.0 + 9.30) = \underline{8.87}$$

Porteføljens risiko blir:

$$\sigma_p^2 = \begin{cases} (1/3)^2\left(2.2^2 + 6.2^2 + 3.9^2\right) = & 6.50 \quad \sigma_1^2.\sigma_2^2.\sigma_3^2 \quad \text{Variansene} \\ +2\cdot(1/3)^2\left(2.2\cdot 6.2\cdot(-0.569)\right) = & -0.86 \quad 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad \text{Kovarians 1.2} \\ +2\cdot(1/3)^2\left(2.2\cdot 3.9\cdot(-0.6)\right) = & -0.57 \quad 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13} \quad \text{Kovarians 1.3} \\ +2\cdot(1/3)^2\left(6.2\cdot 3.9\cdot 0.2\right) = & \underline{0.54} \quad 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \quad \text{Kovarians 2.3} \\ = & 5.64 \end{cases}$$

Dermed er

$$\sigma_p = \sqrt{5.64} = \underline{2.37}$$

Hva blir avkastning og porteføljerisiko hvis vektene er $w_1 = 0.4, w_2 = 0.2, w_3 = 0.4$? Igjen brukes (5) og (6). Avkastningen blir denne gangen:

$$E\left(r_p\right) = 0.4\cdot 6.3 + 0.2\cdot 11.0 + 0.4\cdot 9.3 = \underline{8.44}$$

Porteføljens risiko kan vi finne på samme måte som for den likeveide porteføljen, dvs. vi har:

$$\sigma_p^2 = \begin{cases} 0.4^2 4.84 + 0.2^2 38.44 + 0.4^2 15.21 = & 4.75 \quad \sigma_1.\sigma_2.\sigma_3 \quad \text{Variansene} \\ +2\cdot 0.4\cdot 0.2\cdot 2.2\cdot 6.2\cdot(-0.569) = & -1.24 \quad 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad \text{Kovarians 1.2} \\ +2\cdot 0.4\cdot 0.4\cdot 2.2\cdot 3.9\cdot(-0.6) = & -1.65 \quad 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13} \quad \text{Kovarians 1.3} \\ +2\cdot 0.2\cdot 0.4\cdot 6.2\cdot 3.9\cdot 0.2 = & \underline{0.77} \quad 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \quad \text{Kovarians 2.3} \\ = & 2.63 \end{cases}$$

Dermed er

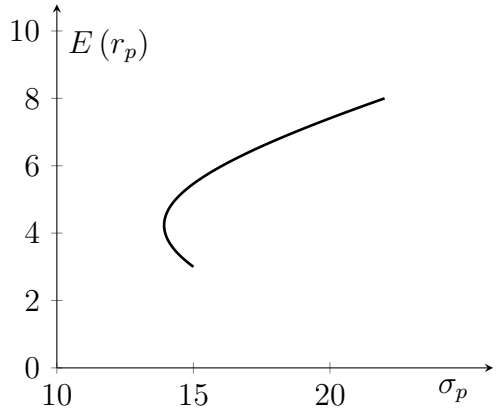
$$\sigma_p = \sqrt{2.63} = \underline{1.62}$$

Porteføljerisikoen er nå sterkt redusert i forhold til den likeveide, fordi andelen av det mest risikable verdipapiret har blitt redusert.

5

5.1 *Porteføljefronten*

Porteføljefronten er definert som kombinasjonene av avkastning og risiko etter hvert som vektene endres. Vi bruker definisjonene av forventning og risiko til porteføljen og finner at fronten er som i figur 3.



Figur 3: Porteføljefronten for eksemplet

5.2 *Minimum-variansporteføljen*

Vi kjenner formelen for minimum-variansporteføljen MVP. Innsetting gir:

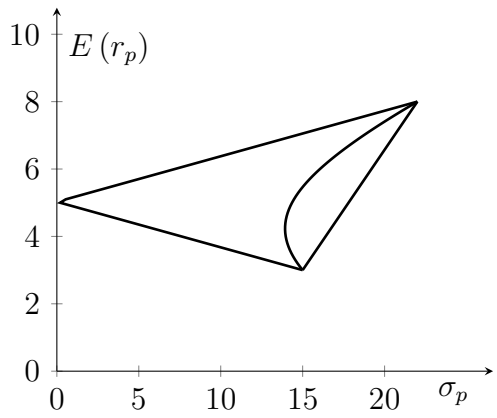
$$w_{MVP} = \frac{22^2 - 15.00 \cdot 22.00 \cdot 0.30}{15.00^2 + 22.00^2 - 2 \cdot 15.00 \cdot 22.00 \cdot 0.30} = 0.7534$$

Bruker vi denne vekten i formelen for porteføljerisiko, finner vi at $\sigma_p = 13.93$. Avkastningen er $E(r_p) = 4.23$.

5.3 MVP *når korrelasjonen endres*

Oppgaven inviterer til å se på spesialtilfellene når korrelasjonen er minus 1 eller pluss en. Med korrelasjon $\rho_{12} = -1.0$ vet vi at porteføljerisikoen kan senkes til null, når vektene er valgt etter formelen for MVP. Figur 4 bekrefter dette.

Den buede kurven er tilfellet med $\rho = 0.30$, de to rette kurvene til venstre er $\rho = -1.00$ og den rette linjen til høyre er $\rho = 1.00$.



Figur 4: Porteføljefronten når korrelasjonen mellom aksjene varieres

5.4 Porteføljerisiko med ønsket avkastning

Vi ønsker en avkastning i porteføljen på $E(r_p) = 5.25$. Vi skal finne den vekten som tilsvarer dette. Vi finner:

$$E(r_p) = 3w + (1 - w)8 = 5.25$$

Vi ser dette er et enkelt problem med en ukjent, w. Vi finner at $w = 0.55$. Denne vekten inngår i formelen for porteføljerisiko som dermed blir:

$$\sigma_p = 0.55^2 15^2 + 0.45^2 22^2 + 2 \cdot 0.55 \cdot 0.45 \cdot 15 \cdot 22 \cdot 0.30 = 14.67$$

Vi finner at porteføljerisikoen er 14.67 ved dette kravet til avkastning.

6 Orkla og Statoil

6.1 Avkastningene i selskapene

Vi har brukt formelen oppgitt i oppgaven og får avkastningene nedenfor.

År	Orkla	Statoil	dork	dstl
2005	52	155		
2006	70.6	165.25	35.77	6.61
2007	105.25	169	49.08	2.27
2008	45.45	113.9	-56.82	-32.60
2009	57.65	146.5	26.84	28.62
2010	56.7	138.6	-1.65	-5.39
2011	44.65	153.5	-21.25	10.75
2012	48.5	139	8.62	-9.45
2013	47.32	147	-2.43	5.76
2014	51.15	131.2	8.09	-10.75
2015	70.1	123.7	37.05	-5.72
2016	65.8	134.4	-6.13	8.65
Sum			77.17	-1.25

6.2 Gjennomsnitt etc.

Vi bruker R for avkastningen i en periode for virkelige, empiriske avkastninger. Likedan brukes Std for risikoen over flere perioder. Da er den empiriske avkastningen og risikoen definert ved:

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t; \qquad Std = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \bar{R}\right)^2} \tag{7}$$

Kovariansen er definert som

$$Kov = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{it} - \bar{R}_i\right)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right) \tag{8}$$

Vi kan nå beregne avkastninger, risiko og kovarians og korrelasjon ut fra formlene (7) og (8). Først setter vi oppp alle avvikskolonnene og finner deres sum, deretter beregner vi de statistiske verdiene. Vi har at avviket fra gjennomsnittet for et år t er definert som: $Avvik_t = R_{it} - \bar{R}_i$.

	Orkla	Statoil	Orkla	Statoil	Avviko	Orkla	Statoil
År	Avkastninger		Avviko	Avviks	×Avviks	Avvik2	Avvik2
2006	35.77	6.61	28.75	6.73	193.41	826.77	45.24
2007	49.08	2.27	42.06	2.38	100.23	1769.36	5.68
2008	-56.82	-32.60	-63.83	-32.49	2073.93	4074.61	1055.61
2009	26.84	28.62	19.83	28.74	569.73	393.11	825.70
2010	-1.65	-5.39	-8.66	-5.28	45.74	75.06	27.87
2011	-21.25	10.75	-28.27	10.86	-307.09	799.07	118.02
2012	8.62	-9.45	1.61	-9.33	-15.00	2.58	87.10
2013	-2.43	5.76	-9.45	5.87	-55.45	89.28	34.44
2014	8.09	-10.75	1.08	-10.63	-11.47	1.16	113.10
2015	37.05	-5.72	30.03	-5.60	-168.27	901.94	31.39
2016	-6.13	8.65	-13.15	8.76	-115.24	172.91	76.80
Sum	77.17	-1.25			2310.51	9105.85	2420.96

Vi kan nå beregne de statistiske størrelsene vi trenger idet vi ser at $T - 1 = 11 - 1 = 10$ i dette tilfellet.

	Orkla	Statoil
Gjennomsnitt	7.02	-0.11
Varians	910.59	242.10
Standardavvik	30.18	15.56
Kovarians	231.05	
Korrelasjon	0.49	

Tallene viser at vi har vært gjennom en turbulent periode, først med finanskrisen i 2008 og så det store fallet i petroleumspriser fra 2014. Avkastningen er relativt lav og volatiliteten er relativt høy. Korrelasjonen i avkastningen er kanskje (?) overraskende høy, $Korr = 0.49$. En sammensatt portefølje av de to vil ikke gi stor risikoreduksjon.

6.3 Portefølje Orkla og Statoil

Vi har at avkastningen i porteføljen med to aksjer er

$$R_p = w \cdot \bar{R}_1 + (1 - w) \cdot \bar{R}_2. \tag{9}$$

Porteføljens risiko er

$$Std_p = \left(w^2 \cdot Var_1 + (1-w)^2 Var_2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot Kov_{12}\right)^{0.5} \tag{10}$$

Vi setter inn når $w = 0.25$ og får:

$$R_p = 0.25 \cdot 7.02 + 0.75 \cdot (-0.11) = 1.67.$$

6.4 Minimum-variansporteføljen

MVP skrives nå:

$$w_{mvp} = \frac{Var_2 - Kov_{12}}{Var_1 + Var_2 - Kov_{12}} \tag{11}$$

Innsetting:

$$w_{mvp} = \frac{242.10 - 231.05}{910.59 + 242.10 - 2 \cdot 231.05} = 0.02.$$

For å finne minimum-variansporteføljen, må vi altså sette mesteparten av pengene i Statoil.

7 Aksjene A og B

7.1

7.2 Avkastning, risiko og samvariasjon

Vi følger samme prosedyre som i oppgave 6 og finner følgende statistikkverdier:

	Aksje A	Aksje B
Gjennomsnitt	4.20	14.40
Varians	112.89	251.71
Standardavvik	10.62	15.87
Kovarians	12.42	
Korrelasjon	0.07	

7.3 En likeveid portefølje

Avkastningen for en likeveid portefølje for hvert år, gjennomsnittet og risikoen vises nedenfor. For hvert år legges avkstningen i Aksje 1 sammen med avkastningen i Aksje 2 og summen deles på to.

År	Aksje A	Aksje B	Like-veid	Avvik2
2007	-10.00	21.00	5.50	14.44
2008	20.00	7.00	13.50	17.64
2009	5.00	30.00	17.50	67.24
2010	-5.00	-3.00	-4.00	176.89
2011	2.00	-8.00	-3.00	151.29
2012	9.00	25.00	17.00	59.29
Sum	21.00	72.00	46.50	486.79
Gjennomsnitt	4.20	14.40	9.30	
Varians	112.89	251.71		97.36
Standardavvik	10.62	15.87		9.87

En likeveid portefølje

Vi trenger bare å finne risikoen til en likeveid portefølje av aksjene A og B og sammenligne resultatet med risikoen i tabellen over. Vi bruker (10) og setter inn tall:

$$\begin{aligned} Std &= \left(0.5^2 112.89 + 0.5^2 251.71 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 12.42\right)^{0.5} \\ &= 0.5(112.89 + 251.71 + 2 \cdot 12.42)^{0.5} = 9.87. \end{aligned}$$

Dette er det samme resultat som vi fant i tabellen i deloppgave 7.3.

En skjevt veid portefølje

Vi har nå en oppskrift på hvordan vi kan beregne porteføljerisikoen på to forskjellige måter når vi har to aksjer i porteføljen. Vi kan bruke utregning med formelen for porteføljerisikoen (10), eller vi kan bruke fremgangsmåten fra deloppgave 7.3. Vi presenterer tabellresultater først, der Aksje A har vekten 70%.

År	Aksje A	Aksje B	Skjevt veid	Avvik2
2007	-10.00	21.00	-0.70	63.36
2008	20.00	7.00	16.10	78.15
2009	5.00	30.00	12.50	27.46
2010	-5.00	-3.00	-4.40	135.96
2011	2.00	-8.00	-1.00	68.23
2012	9.00	25.00	13.80	42.77
Sum	21.00	72.00	36.30	415.92
Gjennomsnitt	4.20	14.40	7.26	
Varians	112.89	251.71		83.18
Standardavvik	10.62	15.87		9.12

En kontroll med (10) viser at:

$$\begin{aligned} Std_p &= \left(0.7^2 112.89 + 0.3^2 251.71 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 12.42\right)^{0.5} \\ &= (55.32 + 22.65 + 5.22)^{0.5} = 9.12. \end{aligned}$$

Igjen ser vi at vi får samme resultat.

Minimumvariansporteføljen

Vi finner minimumvariansporteføljen fra (11). Innsetting gir oss:

$$w_{mvp} = \frac{251.71 - 12.42}{112.89 + 251.71 - 2 \cdot 12.42} = 0.7043.$$

Vi var temmelig nær minimum-variansporteføljen i forrige delopppgave.

8 Novo og Geri

8.1 Avkastning og volatilitet i en likeveid portefølje

Porteføljens avkastning er gitt av

$$E\left(r_P\right) = w \cdot E\left(r_1\right) + (1 - w) \cdot E\left(r_2\right) \tag{12}$$

i det generelle tilfellet når porteføljen består av to eiendeler. Her er w porteføljeandelen i Novo og $(1-w)$ er andelen i Geri. Innsetting i (12) gir:

$$E\left(r_p\right) = 0.5(10+7) = \underline{8.5}$$

Porteføljens standardavvik følger av (3). Siden vi bruker forventede verdier i denne oppgaven, bruker vi forventningssymboler. Vi finner ved innsetting:

$$\sigma_p = 0.5\sqrt{20^2 + 16^2 + 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 0.22} = 0.5\sqrt{796.8} = \underline{14.11}$$

8.2 Korrelasjonen øker

Korrelasjonen er i dag $\rho_{N,G} = 0.22$.

(a) En økning har ingenting å si for avkastningen. Grunnen er at korrelasjonen ikke har noe med avkastningen til porteføljen å gjøre, se (2).

(b) Når korrelasjonen øker, vil volatiliteten i porteføljen øke. Det går frem av (3).

Kombinasjon av kort og lang posisjon

I dette tilfellet skal vi altså investere 10,000 i Novo og 2,000 i Geri. Samlet investering er dermed $10,000 - 2,000 = 8,000$. Porteføljevektene er nå:

$$w = \frac{10,000}{8,000} = 1.25; \qquad 1 - w = \frac{-2,000}{8,000} = -0.25.$$

Forventet avkastning er idet vi bruker (2):

$$E\left(r_p\right) = 1.25 \cdot 10 - 0.25 \cdot 7 = \underline{10.75}$$

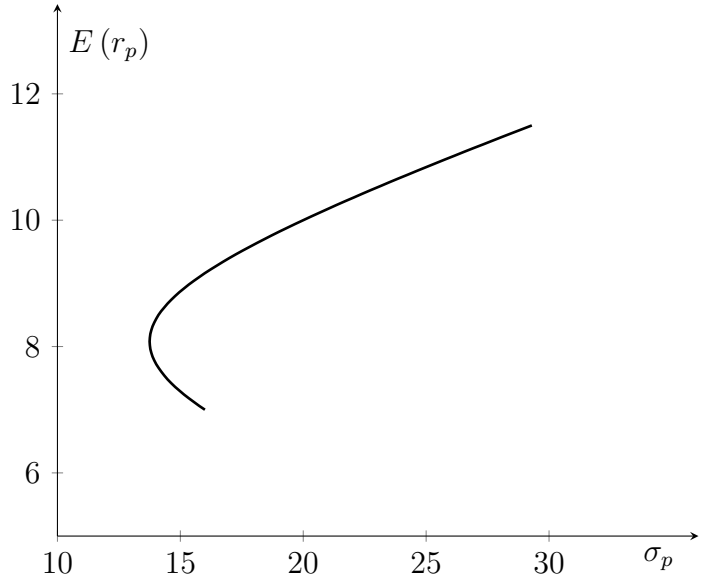
Porteføljens volatilitet har vi fra (3):

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{1.25^2 20^2 +^{(} -0.25)^2 16^2 + 2 \cdot 1.25 \cdot (-0.25) \cdot 20 \cdot 16 \cdot 0.22} \\ &= \sqrt{425 - 44} = \underline{24.43}\end{aligned}$$

Denne strategien fører altså med seg en høyere avkastning, men også en høyere volatilitet. Grunnen til dette er at den bedriftsspesifikke risikoen i Novo øker mye, dvs. leddet $1.25^2 20^2$ i porteføljen.

Mange porteføljevarianter

(a) Vi skal variere porteføljevektene og lage et diagram over porteføljefronten hvor Novo og Geri inngår. Figur 5 viser hvor fronten plasserer seg i avkastnings-risiko-rommet når w varieres fra $w = 0.00$ til $w = 1.50$.



Figur 5: Fronten for Novo og Geri når w varieres fra 0.0 til 1.50

Vi ser av figuren at avkastningen i porteføljen øker med en strategi som plasserer mer i Novo. Prisen for dette er at risikoen øker betydelig etter hvert som w økes over 1.0. En belånt portefølje er mer risikabel enn en fullt ut EK-finansiert portefølje.

(b) Figuren viser hvor MVP befinner seg. Vi finner også MVP analytisk fra

$$w_{mvp} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{13}$$

Innsetting:

$$w_{min} = \frac{256 - 20 \cdot 16 \cdot 0.22}{400 + 256 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 0.22} = \underline{0.36}.$$

Når $w = 0.36$, er porteføljens avkastning $E(r_p) = 8.08$ og volatiliteten er $\sigma_p = 13.75$.

(c) De effisiente porteføljene er definert som alle porteføljer hvor man ikke kan oppnå lavere risiko for en gitt avkastning, eller en høyere avkastning for en gitt volatilitet. Disse strekker seg fra MVP og opp til høyre i figur 5.

9 To aksjer, korrelasjon lik 1.0

Avkastningene i de to aksjene følger hverandre konsekvent. Når den ene har avkastning over gjennomsnittet av aksjer, må også den andre ha det.

10 Gode og Haab

Vi skal se på en situasjon der aksjer i selskapene Gode og Haab har ulike korrelasjoner, men lik volatilitet. Vi kan bruke (3) for å studere dette spørsmålet når vi setter inn verdiene fra oppgaven. Vi får i første omgang at

$$\sigma_p = \left(0.5^2 40^2 + 0.5^2 40^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 40 \cdot 40 \cdot \rho_{12}\right)^{0.5}$$

som i første omgang leder til:

$$\sigma_p = 0.5 \cdot 40\sqrt{1 + 1 + 2\rho_{12}}$$

Da har vi resultatene:

a) $\rho_{12} = 1.0$**.** Nå har vi at $\sigma_p = 0.5 \cdot 40\sqrt{1 + 1 + 2 \cdot 1} = 40$, som betyr ingen risikoreduksjon.
b) $\rho_{12} = 0.5$**.** $\sigma_p = 34.64$, en viss risikoreduksjon.
c) $\rho_{12} = 0.0$**.** $\sigma_p = 28.28$, en stor risikoreduksjon.
d) $\rho_{12} = -0.5$**.** $\sigma_p = 20.00$, risikoen er halvert.
e) $\rho_{12} = -1.0$**.** $\sigma_p = 0.00$, dvs. full risikoreduksjon.

Volatiliteten er altså lavere for alle korrelasjoner lavere enn 1.0, $\rho_{12} < 1.0$.

11 Arne og Nils

Vi vet at når $\rho_{12} = -1.0$, kan vi få en porteføljerisiko $\sigma_p = 0.0$. Vi bruker opplysningene fra oppgaven og setter inn i (3).

$$\sigma_p = \left(w^2 50^2 + (1-w)^2 25^2 - 2 \cdot w(1-w)50 \cdot 25 \cdot 1\right)^{0.5} = 0.0$$

Vi ser at uttrykket inne i parentesen kan omformes slik at vi får:

$$\sigma_p = \left[(w50 - (1-w)25)^2\right]^{0.5} = 0.0$$

Dette resulterer i

$$\sigma_p = w50 - (1-w)25 = 0.0$$

og

$$w_{mvp} = \frac{25}{75} = 1/3.$$

12 Tex og Mex

12.1 Risiko som Tex

Korrelasjonen er altså nå $\rho_{12} = 0$. Porteføljevariansen kan nå skrives med opplysningene fra oppgaven:

$$\sigma_p^2 = w^2 40^2 + (1-w)^2 20^2 + 2 \cdot w(1-w)40 \cdot 20 \cdot 0.0 = 40^2$$

som jo er lik:

$$\sigma_p^2 = w^2 1600 + (1-w)^2 400 = 1600$$

Vi deler på begge sider med 400 og løser opp parentesen. Det gir den kvadratiske funksjonen

$$\sigma_p^2 = 5w^2 - 2w - 3 = 0$$

slik at w er gitt av:

$$w = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm 8.00}{8.00}$$

Hvis vi antar at $w \leq 1.0$, betyr det at telleren må være positiv, slik at

$$w = \frac{6}{8} = 0.75.$$

Vi må altså ha 75% av porteføljen plassert i Tex for at porteføljens volatilitet skal være den samme som i Tex.

12.2 Minimum risiko

Generelt er porteføljens varians når $\rho_{12} = 0.0$ lik

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 \tag{14}$$

Minimering av (14) innebærer at vi skal derivere uttrykket mhp. w og sette resultatet lik null:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 = 0\\ &= w\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + w\sigma_2^2 = 0\end{aligned}$$

som gir

$$w_{mvp} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{15}$$

Vi kan bruke dette siste resultatet til å finne at

$$w_{mvp} = \frac{400}{400 + 1600} = 0.25$$

Den laveste porteføljerisikoen får vi altså når $w = 0.25$.

13 Mange aksjer

13.1 Risiko i likeveid portefølje

Vi kan bruke at

$$Var_p = \overline{Kovar}_{ij} + \frac{1}{N}\left(\overline{Var} - \overline{Kovar}_{ij}\right) \tag{16}$$

der streken over uttrykker viser at dette er gjennomsnittsverdier. Vi ser at

$$\overline{Kovar}_{ij} = \overline{Std}_i\overline{Std}_j Korr_{ij} \tag{17}$$

som gir $\overline{Kovar}_{ij} = 50{\cdot}50{\cdot}0.20 = 500$. Når porteføljen inneholder en aksje, er porteføljevariansen:

$$Var_p = 500 + \frac{1}{1}\left(50^2 - 500\right) = 2,500; \qquad Std_p = 50$$

30 aksjer innebærer:

$$Var_p = 500 + \frac{1}{30}\left(50^2 - 500\right) = 566.67; \qquad Std_p = 23.80$$

og med 1,000 aksjer:

$$Var_p = 500 + \frac{1}{1000}\left(50^2 - 500\right) = 502.00; \qquad Std_p = 22.41$$

13.2 Risiko i likeveid portefølje

Vi vet at porteføljevariansen vil nærme seg den gjennomsnittlige kovariansen i porteføljen når porteføljen er likeveid, ifølge 16. Vi kan benytte (17) til å finne kovariansen: $Kovar_{ij} = 50^2 0.40 = 1000$. Volatiliteten er dermed $Std_p = 31.62$.

13.3 Delta, Gamma og Omega

a) Den høyest mulige volatiliten må være et veid gjennomsnitt av de tre volatilitetene:

$$\sigma_P = 0.50 \cdot 60 + 0.25 \cdot 30 + 0.25 \cdot 20 = 42.5\%.$$

b) Hvis resultatet i **??** faktisk finner sted, må korrelasjonen mellom Delta, Gamma og Omega være 1.0, dvs. det ville ikke være mulig å oppnå en diversifiseringsgevinst.