Oppgaver i obligasjoner - Løsningsforslag

R. Øystein Strøm*

1

Prisen B på en nullkupongobligasjon er gitt av:

$$B = \frac{M}{(1+r)^T} \tag{1}$$

M er obligasjonens pålydende, r er investorenes kapitalkostnad eller markedsrenten og T er tid til forfall.

1.1

Tabell 1 Prisen på nullkupongobligasjonene. Pålydende $M = 100$.

Forfall	Rente	Pris
1	5.00	95.24
2	5.50	89.85
3	5.75	84.56
4	5.95	79.36
5	6.05	74.55

1.2

Den risikofrie renten er 6.05%.

2

2.1

Obligasjonen har en kupongrente på 6.00%. Dette gir en årlig kupongutbetaling på

$$\text{Kupongutbetaling} = \text{Kupongrente} \times \text{Pålydende} = 0.06 \times 1000 = 60$$

*Handelshøyskolen ved HiOA

Kontantstrømmen er altså (60;1060).

Vi har altså oppgitt de risikofrie avkastningene til forfall for hvert år. Det riktige er da å diskontere med hver periodes avkastning, dvs. prisformelen blir:

$$B = \frac{K}{1+y_1} + \frac{K+M}{(1+y_2)^2} \tag{2}$$

For toårsobligasjonen har vi dermed:

$$B = \frac{60}{1.040} + \frac{1060}{1.043^2} = 57.69 + 974.40 = 1032.09$$

Obligasjonen handles med en premie, siden $B > M$; prisen er høyere enn pålydende.

2.2

Vi bruker (1) og setter inn:

$$B = \frac{1000}{1.048^5} = 791.03$$

2.3

Vi har altså at kupongutbetalingen blir 40 og at kontantstrømmen dermed blir (40,40,1040). Prisen på obligasjonen er fra (2):

$$B = \frac{40}{1.040} + \frac{40}{1.043^2} + \frac{1040}{1.045^3} = 986.58$$

Avkastningen til forfall y får vi fra relasjonen

$$B = \frac{K}{1+y} + \frac{K}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{K+M}{(1+y)^T} \tag{3}$$

Innsetting i (3) gir direkte:

$$986.58 = \frac{40}{1+y} + \frac{40}{(1+y)^2} + \frac{1040}{(1+y)^3}$$

y er altså definert som internrenten til dette problemet. Prøving og feiling og kalkulator gir $y = 0.0449$. Avkastning til forfall er altså 4.49%.

2.4

Tid til forfall må være ett år. Bare en ettårig nullkupongobligasjon har en avkastning til forfall på 4.00%. Var den lengre, ville der jo være arbitrasjemuligheter.

2.5

Vi har altså at $B = M$. Vi kjenner ikke kupongutbetalingene, men vi har fått opplyst avkastning til forfall frem til år 5. Vi kan dermed bruke (2). Ved innsetting har vi altså:

$$1000 = K\left(\frac{1}{1.040} + \frac{1}{1.043^2} + \frac{1}{1.045^3} + \frac{1}{1.047^4}\right) + \frac{1000}{1.047^4}$$

Denne ligningen har en ukjent, K, og utregningen av dette følger vanlige regler. Den kupongutbetaling som løser dette problemet er 46.76. Kupongrenten er dermed

$$\text{Kupongrente} = \frac{\text{Kupongutbetaling}}{\text{Pålydende}} = \frac{46.76}{1000} = 0.04676$$

dvs. kupongrenten er 4.676%.

2.6

2.6.1

Obligasjonen må handles med premie, dvs. $B > M$. Kupongrenten på 5% er over alle avkastninger til forfall, dvs. obligasjonens avkastning til forfall er en veid sum av alle enkeltperioders avkastning og denne veide summen må bli lavere enn 5.00%.

2.6.2

Vi må kombinere (2) og (3) for å komme frem til avkastningen frem til forfall. Prisrelasjonen (2) gir oss først prisen på obligasjonen:

$$B = \frac{50}{1.04} + \frac{50}{1.043^2} + \frac{50}{1.045^3} + \frac{50}{1.047^4} + \frac{50+1000}{1.048^5} = 1010.05$$

Med prisen i hånd kan vi finne avkastningen på obligasjonen fra (3):

$$1010.05 = \frac{50}{1+y} + \frac{50}{(1+y)^2} + \frac{50}{(1+y)^3} + \frac{50}{(1+y)^4} + \frac{50+1000}{(1+y)^5}$$

Internrenten til dette problemet er 4.77%.

2.6.3

Avkastning til forfall (ATF) øker altså til 5.2%, og vi skal finne den nye prisen. Vi må oppfatte den nye ATF som markedsrenten, altså investorenes alternative investeringsmulighet. Problemet er da:

$$B = \frac{50}{1.052} + \frac{50}{1.052^2} + \frac{50}{1.052^3} + \frac{50}{1.052^4} + \frac{50+1000}{1.052^5} = 991.39$$

Diskonteringsrenten er nå overalt høyere enn de vi opprinnelig brukte. Prisen på obligasjonen faller nå. Siden diskonteringsrenten er høyere enn kupongrenten, vil prisen falle til under pari, dvs. den vil selges med rabatt.

3 Kontinuasjon 2011

3.1

Nåverdien av en risikofri obligasjon med årlige renteutbetalinger er definert i (2). Den høyeste pris jeg ville betale er altså nåverdien av de fremtidige betalingene.

Tabell 2 Utregning av obligasjonens pris

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdi
1	5	0.9390	4.69
2	5	0.8817	4.41
3	5	0.8278	4.14
4	5	0.7773	3.89
5	5	0.7299	3.65
5	100	0.7299	72.99
Sum			93.77

KS er obligasjonens kontantstrøm. Rentefaktoren er definert som

$$\text{Rentefaktor} = R = \frac{1}{(1+r)^t} \tag{4}$$

Jeg ville altså betale maksimalt 93.77 for en obligasjon med de kjennetegnene som er gitt i oppgaven.

3.2

Hvis markedsrenten var 5%, ville jeg være villig til å betale 100.00 for obligasjonen. Markedsrente og kupongrente vil nå være like. Den kupongrente som brukes for å skape rentekontantstrømmen i obligasjonen er altså den samme som brukes for å diskontere kontantstrømmen tilbake til dagens verdi. De to utligner hverandre og vi står tilbake med obligasjonens pålydende verdi, 100.00.

4

4.1

Avkastning til forfall y for en nullkupongobligasjon er gitt i (1). Vi kjenner altså M, r, T og kupongrenten, slik at vi kan regne oss frem til prisen B. Vi har for A:

$$B = \frac{100}{1.06^{15}} = 41.73$$

Når avkastningen til forfall faller til 5%, har vi at prisen blir:

$$B = \frac{100}{1.05^{15}} = 48.10$$

Den prosentvise endringen er dermed:

$$\Delta B\% = \frac{48.10 - 41.73}{41.73} \cdot 100 = 15.27$$

En enprosents nedgang i avkastning til forfall innebærer altså en øking i obligasjonens pris på 15.27%. Dette resultatet og de øvrige er vist i tabellen nedenfor:

Obligasjon	Kupongrente	Forfall	Pris $y = 0.06$	Pris $y = 0.05$	Endring i %
A	0	15	41.73	48.10	15.26
B	0	10	55.84	61.39	9.94
C	4% årlig	15	80.58	89.62	11.23
D	8% årlig	10	114.72	123.17	7.36

Vi kan finne prisen på obligasjonene C og D på samme måte som feks. i tabell 2.

4.2

Vi definerer prisfølsomhet eller prissensitivitet som prosentvis endring i obligasjonsprisen av en gitt endring i avkastning til forfall y. Vi ser at prisfølsomheten er større, jo lenger tid det er til forfall og jo lavere kupongrenten er. Eller omvendt: Kort tid til forfall og høy kupongrente er minst påvirket av renteendringer. Obligasjon A er mest prisfølsom og obligasjon D er minst.

Effekten av tid til forfall ser vi av nullkupongobligasjonene. En rentenedgang medfører at betalinger lenger ut i perioden blir mer verdt i dag. Effekten må jo da være større, jo lenger ut i perioden betalingen kommer.

Effekten av rentenedgang på obligasjoner som betaler en kupong er likedan. En høy kupongbetaling i forhold til pålydende betyr at relativt mer av de samlede betalingene fra obligasjonen forfaller tidlig i perioden. En lav kupongutbetaling innebærer at hoveddelen av betalingene skyves ut i perioden. Renteendringene må påvirke de obligasjonene som har relativt mer av sene utbetalinger mer enn de med tidlige.