Tom Lindstrøm

Tilleggskapitler til

Kalkulus

3. utgave

Universitetsforlaget, Oslo

1. utgave 1995
2. utgave 1996

ISBN-13: 978-82-15-00977-3
ISBN-10: 82-15-00977-8

Boken har egen nettside: www.universitetsforlaget.no/kalkulus

Henvendelser om denne utgivelsen kan rettes til:
Universitetsforlaget AS
Postboks 508 Sentrum
0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Sats, figurer og formgiving: Arve Michaelsen/Matematisk Sats
Boken er satt med: MathTimes og Times Roman 10/12

Forord

Dette tilleggskapitlet gir en innføring i maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner av flere variable. Den første seksjonen konsentrerer seg om vanlige optimeringsproblemer, mens den andre tar for seg optimeringsproblemer med bibetingelser (Lagranges multiplikatormetode). Kapitlet er mindre ambisiøst enn de andre kapitlene i *Kalkulus* — det konsentrerer seg om metoder og inneholder ikke fullstendige bevis. Fremstillingen forutsetter at studentene kjenner til vektorer, matriser og partiell derivasjon, men det er ikke nødvendig å ha lest hele tilleggskapittel 2.

Blindern, 14. januar 2009,
Tom Lindstrøm

Innhold

tilleggskapittel 3

Optimering av funksjoner av flere variable

Dette kapitlet er en repetisjon og videreføring av vektorregningen i videregående skole. De fleste begrepene (som vektorer, linjer og parametriserte kurver) vil du kjenne fra før, men noen (som vektorprodukt og determinanter) vil kanskje være nye. I tillegg til vektorregning i to og tre dimensjoner skal vi begynne å se litt på vektorregning i n dimensjoner — et tema som høres mye skumlere ut enn det er!

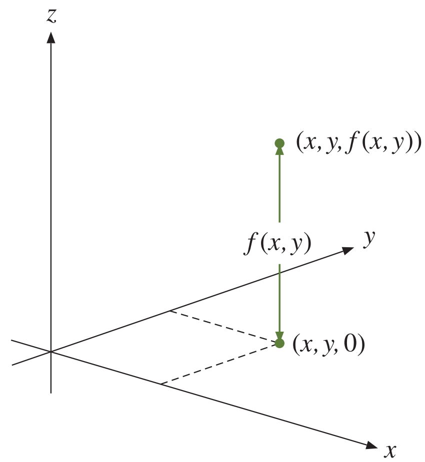
T3.1 Maksimums- og minimumsproblemer

I dette kapitlet skal vi studere to typer maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ av flere variable. I den første seksjonen skal vi se på «vanlige» maksimums- og minimumsproblemer der variablene kan ha hvilke som helst verdier i definisjonsområdet til funksjonen, mens vi i neste seksjon skal se hvordan vi kan finne maksimums- og minimumspunkter når det er begrensninger (såkalte *bibetingelser*) på hvilke verdier variablene kan ha.

Stasjonære punkter

Vanligvis er det umulig å gi realistiske, grafiske fremstillinger av funksjoner av flere variable. Det finnes imidlertid ett unntak, og det er når funksjonen går fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Slike grafisk fremstilling er nyttig å kjenne til når man skal studere maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner av flere variable, og vi skal derfor begynne med å forklare hvordan man fremstiller en funksjon $z = f(x, y)$ grafisk.

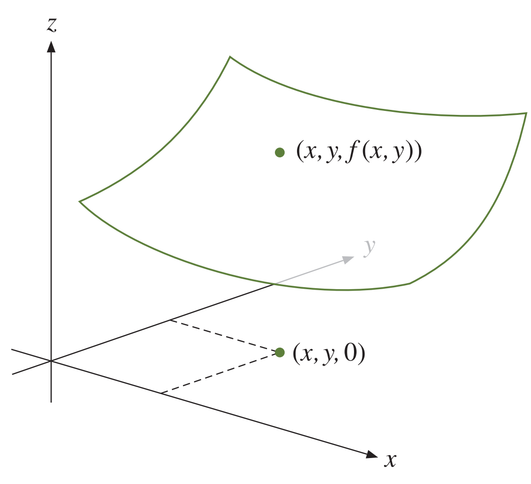
For å tegne funksjonsgrafen lager vi først et tre-dimensjonalt koordinatsystem som vist på figur T3.1.1.



Figur T3.1.1 Plotting av skalarfelt

Gitt variabelverdier x og y, finner vi punktet $(x, y, 0)$ i xy-planet. Vi flytter oss nå loddrett (dvs. parallelt med z-aksen) til vi finner punktet $(x, y, f(x, y))$. Dette er det første punktet på funksjonsgrafen vår. Gjentar vi denne prosedyren for stadig flere variabelverdier (x, y), vokser grafen etterhvert frem som en flate i rommet (se figur T3.1.2).

Selv om denne prosedyren på en grei måte forklarer hva grafen til et skalarfelt er, så er den i praksis ubrukelig som en oppskrift på hvordan man tegner grafen. Prøver du den, selv på en enkel funksjon, oppdager du fort at du helt mister romfølelsen i bildet. Det finnes bedre metoder for å tegne grafer, men de er ikke så viktige for oss i dette kapittlet — det som er viktig, er at du vet hvordan du kan tenke på grafen til f som en flate.



Figur T3.1.2 Grafisk fremstilling av skalarfelt

La oss nå definere det vi er på jakt etter. Dersom $f : A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av m variable, sier vi at $\mathbf{a} \in A$ er et *(globalt) maksimumspunkt* for f i A dersom $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Tilsvarende kaller vi $\mathbf{a} \in A$ et *(globalt) minimumspunkt* for f i

A dersom $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Et maksimumspunkt er altså et punkt der funksjonen har sin største verdi, mens et minimumspunkt er et punkt der funksjonen har sin minste verdi. Vi bruker *ekstremalpunkt* som er fellesnavn på maksimumspunkter og minimumspunkter.

Før vi ser på metoder for å finne maksimums- og minimumspunkter for funksjoner av flere variable, skal vi kaste et raskt blikk på et teorem som garanterer eksistensen av slike punkter under visse forutsetninger. Fra teorien for funksjoner av én variabel kjenner vi ekstremalverdisetningen (se setning 5.3.5 i *Kalkulus*) som sier at en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset *intervall* alltid har maksimums- og minimumspunkter. Det finnes en tilsvarende ekstremalverdisetning for funksjoner av flere variable. Den sier at alle kontinuerlige funksjoner definert på lukkede, begrensede *mengder* har maksimums- og minimumspunkter (Husker du ikke hva en lukket mengde er, så se definisjon T2.2.2 i tilleggskapittel 2. En mengde begrenset dersom det finnes et tall $K \in \mathbb{R}$ slik at $|\mathbf{x}| \leq K$ for alle $\mathbf{x} \in A$).

T3.1.1 Ekstremalverdisetningen Anta at A er en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$ og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da har f minimumspunkter og maksimumspunkter i A.

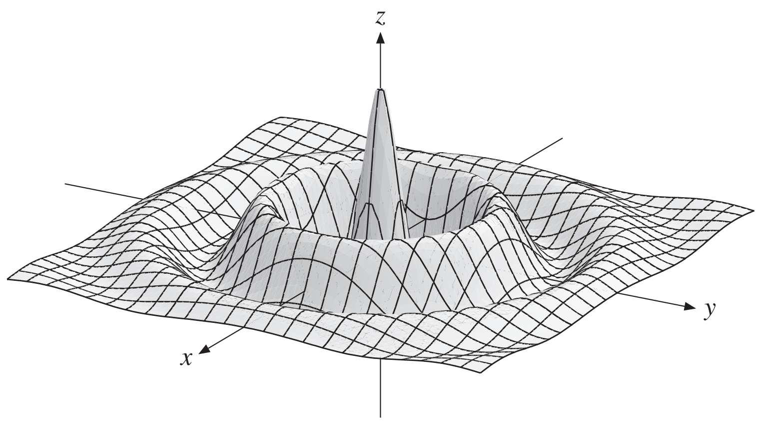
Ekstremalverdisetningen er hovedsakelig et teoretisk verktøy, men den har også en viss praktisk nytte når vi skal argumentere for at punkter vi tror muligens kan være ekstremalpunkter, virkelig er det. For å finne frem til disse «mulige ekstremalpunktene» trenger vi imidlertid andre teknikker. Før vi beskriver dem, kan det være nyttig å minne om hvordan vi finner ekstremalpunktene til funksjoner av én variabel.

Det første vi gjør er å lete etter *lokale* maksimums- og minimumspunkter ved å derivere funksjonen og finne alle punkter der den deriverte er 0. Deretter undersøker vi hva slags punkter vi har funnet ved enten å se på fortegnskiftet til den førstederiverte eller på fortegnet til den annenderiverte. Til slutt sammenligner vi funksjonsverdiene i de lokale maksimums- og minimumspunktene for å finne de globale ektremalpunktene vi egentlig er på jakt etter.

Vi skal følge akkurat samme strategi i det flervariable tilfellet, men siden geometrien er rikere, blir teknikkene litt mer kompliserte. La oss begynne med å definere de *lokale* ekstremalpunktene som vi først skal lete etter (husk at *snittet* $C \cap D$ av to mengder C og D består av de punktene som er med i *både* C og D):

T3.1.2 Definisjon La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon av m variable. Vi sier at $\mathbf{a} \in A$ er et *lokalt maksimumspunkt* for f dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ med sentrum i $\mathbf{a}$ slik at $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \cap A$. Tilsvarende kalles $\mathbf{a}$ et *lokalt minimumspunkt* dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ slik at $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \cap A$. Vi bruker *lokale ekstremalpunkter* som et fellesnavn på lokale maksimums- og minimumspunkter.

Lokale maksimumspunkter ser litt forskjellig ut ettersom de er indre punkter eller randpunkter. Figur T3.1.3 viser noen av mulighetene. Et lokalt maksimum i det indre kan f.eks. være en «fjelltopp» som den høyeste toppen på figuren, eller det kan være



Figur T3.1.3 Lokale ekstremalpunkter i det indre og på randen

et punkt på en «åskam» som de andre lokale maksimumspunktene i det indre. Det er lett å forstille seg at i begge disse tilfellene må alle de partiellderiverte i punktet være lik 0. Dette behøver imidlertid ikke være tilfellet for lokale maksimumspunkter på randen til området. Grafen i figur T3.1.3 har lokale maksimumspunkter i hjørnene av definisjonsområdet (de fire «flippene» i kanten av figuren), men de partiellderiverte i disse punktene er ikke 0 — punktene ligger i en «skråning» der funksjonen hadde fortsatt å stige hvis den var blitt forlenget på naturlig måte utover sitt definisjonsområde.

I denne seksjonen skal vi stort sett konsentrere oss om jakten på lokale ekstremalpunkter i det indre av definisjonsområdet. I neste seksjon skal vi se på en teknikk som (blant annet) kan brukes til å finne mulige ekstremalpunkter på randen. La oss først vise at det virkelig er tilfellet at de partiellderiverte er null i alle lokale ekstremalpunkter i det indre av området.

T3.1.3 Setning Anta at en funksjon $f\colon A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i et indre punkt $\mathbf{a}$. Dersom f er deriverbar i $\mathbf{a}$, må $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, dvs. at $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ for alle i.

Bevis: Vi fører resultatet tilbake til det tilsvarende resultatet for funksjoner av én variabel (*Kalkulus*, setning 6.2.1). Anta at f har et lokalt maksimum i $\mathbf{a} = (a_1, a_1, \ldots, a_m)$ (beviset for et lokalt minimum er helt tilsvarende). La g være funksjonen av én variabel definert ved

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, x_i, \ldots, a_m)$$

(g er altså funksjonen vi får når vi «fryser» alle variablene i f unntatt den i-te). Da må g ha et lokalt maksimum for $x_i = a_i$, og følgelig er $g'(a_i) = 0$. Per definisjon av partiellderiverte er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = g'(a_i)$, og følgelig er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$. ∎

Ved hjelp av setningen ovenfor kan vi innskrenke jakten på mulige maksimums- og minimumspunkter betraktelig.

T3.1.4 Eksempel La oss forsøke å lokalisere eventuelle maksimums- og minimumspunkter for funksjonen

$$f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$$

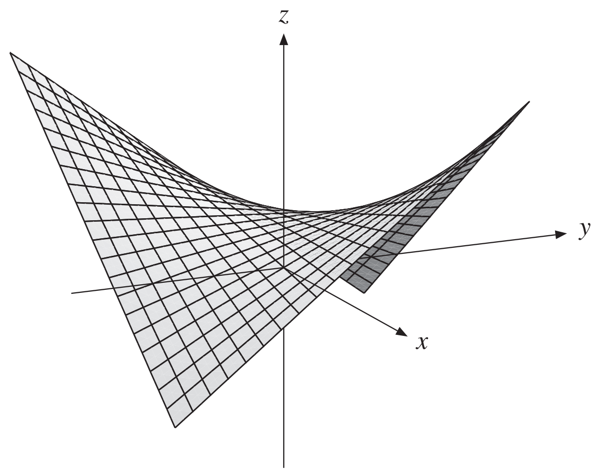
Vi deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Ifølge setningen ovenfor bør vi se etter punkter hvor begge de partiellderiverte er null. Dette gir ligningssystemet

$$3y - 3 = 0 \qquad \text{og} \qquad 3x + 9 = 0$$

som har løsningen $x = -3$, $y = 1$. Dette betyr at det eneste mulige maksimums- eller minimumspunktet til f er $(-3, 1)$, og at den tilsvarende funksjonsverdien er $f(-3, 1) = 9$.



Figur T3.1.4 Et sadelpunkt

Neste spørsmål er om $(-3, 1)$ virkelig er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt. Vi skal lære en teknikk for å besvare slike spørsmål senere i denne seksjonen, men foreløpig nøyer vi oss med å se på grafen (figur T3.1.4). Den minner litt om en sal (på en hest), og vi ser at «vårt punkt» $(-3, 1)$ ligger på det stedet der man naturlig sitter i salen. Det betyr at punktet $(3, 1)$ hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum — beveger hvis oss fra punktet i én retning, får vi større verdier, og beveger vi oss i en annen retning, får vi mindre verdier. ▮

Eksemplet ovenfor peker på det som skal være hovedproblemstillingen i resten av denne seksjonen: Hvis $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, hvordan avgjør vi da på en effektiv måte om $\mathbf{a}$ er et lokalt maksimum, minimum eller ingen av delene?

La oss begynne med å innføre litt terminologi. Et punkt $\mathbf{a}$ der $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ vil vi kalle et *stasjonært* punkt for funksjonen f. Et stasjonært punkt som hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum, vil vi kalle et *sadelpunkt* (se figur 4 ovenfor). Som vi allerede har vært inne på, er det ikke vanskelig å forstå hvor det siste navnet kommer fra — det punktet du sitter på når du rir på en hest, er et typisk eksempel på et sadelpunkt; det er et minimum når du beveger deg i hestens lengderetning og et maksimum nå du beveger deg på tvers av hesten.

Vi tar med et eksempel til på hvordan man finner stasjonære punkter.

T3.1.5 Eksempel Finn de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - 7x + 3y$$

Vi deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 7$$

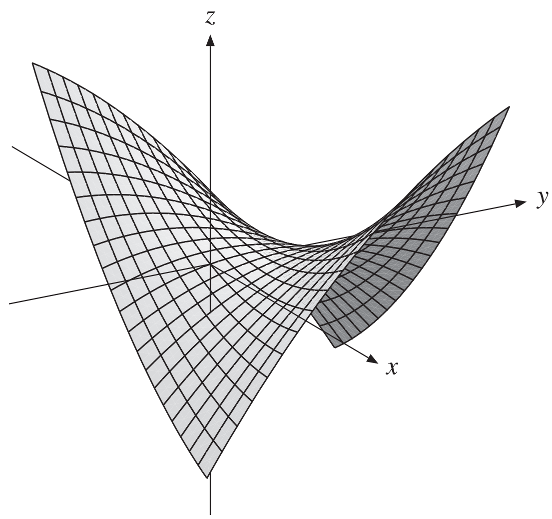
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4x + 3$$

Dette gir ligningene

$$2x + 4y = 7$$

$$4x - 2y = -3$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $x = \frac{1}{10}$, $y = \frac{17}{10}$. Det betyr at punktet $\left(\frac{1}{10}, \frac{17}{10}\right)$ er et stasjonært punkt for f. Figur T3.1.5 viser grafen, og vi ser at vi også i dette tilfellet har et sadelpunkt.



Figur T3.1.5 Grafen til $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - 7x + 3y$

Annenderiverttesten

Når vi arbeider med funksjoner av to variable slik som i eksemplene ovenfor, kan vi ofte bruke dataprogrammer eller lommeregnere til å undersøke om de stasjonære punktene våre er minimumspunkter, maksimumspunkter eller sadelpunkter. Hvis funksjonsgrafen er svært flat i området rundt det stasjonære punktet, kan det imidlertid være vanskelig å avgjøre visuelt hva slags punkt vi har med å gjøre. Arbeider vi med funksjoner av flere enn to variable, er det atskillig verre å bruke visuelle hjelpemidler. Vi trenger derfor en teori som kan hjelpe oss i klassifiseringen av stasjonære punkter.

For funksjoner av én variabel har vi et slikt hjelpemiddel, nemlig *annenderiverttesten*. Den sier at hvis f er en funksjon av én variabel med $f'(a) = 0$, så er a er et lokalt minimum dersom $f''(a) > 0$ og at a er et lokalt maksimum dersom $f''(a) < 0$. Når $f''(a) = 0$, gir testen ingen konklusjon. Vårt mål er å lage en tilsvarende test for funksjoner av flere variable. Dette arbeidet er ganske komplisert fordi en funksjon av flere variable har så mange forskjellige annenderiverte, og de må kombineres på riktig måte for å få en test som virker. Heldigvis skal vi få litt hjelp av lineær algebra og matriser.

Dersom $f(x_1, \ldots, x_m)$ er en to ganger deriverbar funksjon av m variable, kan vi skrive opp alle de annenordens partiellderiverte som en $m \times m$ matrise:

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Vi kaller dette *Hesse-matrisen* til f i punktet $\mathbf{a}$ (ikke bland Hesse-matrisen, som er en matrise av annenderiverte til et skalarfelt, sammen med Jacobi-matrisen, som er en matrise av førstederiverte til en vektorvaluert funksjon!). Foreløpig er Hesse-matrisen bare en grei måte å skrive opp de annenordens partiellderiverte på, men det neste resultatet viser at den også har matematisk betydning (dersom du ikke lært om egenverdier ennå, kan du hoppe over dette resultatet og gå videre til korollaret).

Vi vet at dersom de blandede partiellderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ er kontinuerlige, så er de like. Det betyr at Hesse-matrisen $Hf(\mathbf{a})$ er symmetrisk. Et viktig resultat i lineær algebra (det såkalte *spektralteoremet*) sier at $Hf(\mathbf{a})$ da har m reelle egenverdier $\lambda_1(\mathbf{a}), \lambda_2(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{a})$ (flere av dem kan være like). Det viser seg at det er fortegnet til disse egenverdiene som avgjør om et stasjonært punkt er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et sadelpunkt.

T3.1.6 Teorem (Annenderiverttesten) La $\mathbf{a}$ være et stasjonært punkt for en funksjon f av m variable. Anta at de annenordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om $\mathbf{a}$. Da gjelder:

a) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er (strengt) positive, så er $\mathbf{a}$ et lokalt minimumspunkt.
b) Hvis alle egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er (strengt) negative, så er $\mathbf{a}$ et lokalt maksimumspunkt.
c) Hvis $Hf(\mathbf{a})$ har både (strengt) positive og (strengt) negative egenverdier, så er $\mathbf{a}$ et sadelpunkt.

Dersom noen av egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er null og de andre har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon.

For funksjoner av to variable har annenderiverttesten også en annen form som er enklere å bruke i praksis.

T3.1.7 Korollar (Annenderiverttesten i to variable) La **a** være et stasjonært punkt for en funksjon f av to variable. Anta at de annenordens partiellderiverte er kontinuerlige i en omegn om **a**. La

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$$

og la D være determinanten til Hesse-matrisen: $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Da gjelder:

(i) Hvis $D < 0$, så er **a** et sadelpunkt.

(ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er **a** et lokalt minimum.

(iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er **a** et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$, gir testen ingen konklusjon.

La oss se hvordan annenderiverttesten virker på noen eksempler. Vi tar først for oss funksjonen fra eksempel T3.1.4 på nytt.

T3.1.8 Eksempel Vi ser altså på funksjonen $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$ som vi allerede har vist har partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Vi vet også at begge de partiellderiverte er null i punktet $(-3, 1)$. For å bruke annenderiverttesten regner vi ut

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

som gir

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Ifølge annenderiverttesten er $(-3, 1)$ et sadelpunkt. ▮

La oss se på et litt mer komplisert eksempel:

T3.1.9 Eksempel Vi skal finne de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = xye^{x-y^2}$$

og avgjøre om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

Derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot ye^{x-y^2} + xye^{x-y^2} = y(1+x)e^{x-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + xye^{x-y^2}(-2y) = x(1-2y^2)e^{x-y^2}.$$

Siden e^{x-y^2} ikke kan være null, er det nok å løse ligningene

$$\begin{aligned} y(1+x) &= 0 \\ x(1-2y^2) &= 0 \end{aligned}$$

for å finne de stasjonære punktene. Den første ligningen har to løsninger $x = -1$ og $y = 0$. Setter vi $x = -1$ inn i den andre ligningen, får vi $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Setter vi $y = 0$ inn i den andre ligningen, får vi $x = 0$. Vi har altså tre stasjonære punkter $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $(0, 0)$.

Neste skritt er å regne ut de annenderiverte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2} = y(2+x)e^{x-y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 1 \cdot (1+x) \cdot e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2}(-2y) = (1+x)(1-2y^2)e^{x-y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x(-4y)e^{x-y^2} + x(1-2y^2)e^{x-y^2}(-2y) = -2xy(3-2y^2)e^{x-y^2} \end{aligned}$$

Vi må undersøke de stasjonære punktene hver for seg.

Det stasjonære punktet $(0, 0)$: Her er

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0(2+0)e^{0-0^2} = 0 \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = (1+0)(1-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 1 \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2\cdot 0 \cdot 0(3-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 0. \end{aligned}$$

Dette gir $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0^2 - 1^2 = -1$. Altså er $(0, 0)$ et sadelpunkt.

Det stasjonære punktet $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: Her er

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+(-1))e^{-1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1+(-1))\left(1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0 \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2(-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\,e^{-3/2} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A > 0$, forteller annenderiverttesten oss at $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ er et lokalt minimum.

Det stasjonære punktet $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(2 + (-1))e^{-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1 + (-1))\left(1 - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2(-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(3 - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$= -2\sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{2}}$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-3/2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}\, e^{-3/2} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A < 0$, må $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ være et lokalt maksimum. ■

Uoppstilte problemer

Til slutt i denne seksjonen skal vi se på noen eksempler på uoppstilte minimums- og maksimumsproblemer.

T3.1.10 Eksempel Vi har en 1 meter lang ståltråd som skal deles i maksimalt tre biter. Hver bit skal så bøyes sammen til et kvadrat. Hva er det største og minste samlede areal disse rektanglene kan ha?

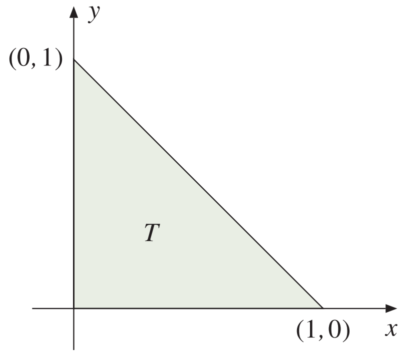
Hvis vi sier at de to første bitene har lengde x og y, må den tredje ha lengde $1 - x - y$. Det totale arealet er dermed (husk at vi må dele lengdene på 4 for å få sidekantene i kvadratene):

$$A(x, y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 - x - y}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2\right)$$

Det er fristende å sette igang å derivere med en gang, men la oss først se hvilke verdier x og y kan ha. Vi må åpenbart ha $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x + y \leq 1$ (legg merke til at vi godt kan ha $x = 0$, $y = 0$ eller $x + y = 1$ — det svarer bare til at vi deler opp ståltråden i færre enn tre biter). Dette betyr at vi ønsker å maksimere og minimere funksjonen A på området

$$T = \{\, (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \,\}$$

Dette er trekanten med hjørner (0, 0), (1, 0) og (0, 1) som vist på figur T3.1.6.



Figur T3.1.6

Siden T er en lukket mengde, vet vi fra ekstremalverdisetningen at A har en maksimums- og en minimumsverdi.

Partiellderiverer vi A, får vi

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{16}\big(2x + 2(1 - x - y)(-1)\big) = \frac{1}{16}(4x + 2y - 2)$$
$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{16}\big(2y + 2(1 - x - y)(-1)\big) = \frac{1}{16}(2x + 4y - 2)$$

Ligningssystemet $4x + 2y - 2 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$ er lett å løse og gir $x = y = \frac{1}{3}$. Bruker vi annenderiverttesten (gjør det!), ser vi at $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ er et lokalt minimum.

Dette betyr at det eneste potensielle ekstremalpunktet vi har i det indre av T, er et lokalt minimum i $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. For å finne andre kandidater må vi se på randen til T. Den faller naturlig i tre deler, og vi ser på hver del for seg.

Linjestykket fra $(0, 0)$ til $(1, 0)$: På dette linjestykket er $y = 0$, og vi får

$$A(x, 0) = \frac{1}{16}\big(x^2 + (1 - x)^2\big) \qquad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Drøfter vi dette uttrykket som en vanlig funksjon av én variabel, finner vi et minimum for $x = \frac{1}{2}$ og maksima for $x = 0$ og $x = 1$. Vi har dermed et mulig minimumspunkt i $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ og mulige maksimumspunkter i $(0, 0)$ og $(1, 0)$.

Linjestykket fra $(0, 0)$ til $(0, 1)$: På dette linjestykket er $x = 0$, og vi får

$$A(0, y) = \frac{1}{16}\big(y^2 + (1 - y)^2\big) \qquad \text{for} \quad 0 \leq y \leq 1$$

Dette er samme uttrykk som ovenfor bare med x byttet ut med y. Vi får derfor et mulig minimumspunkt i $(0, \frac{1}{2})$ og mulige maksimumspunkter i $(0, 0)$ og $(0, 1)$.

Linjestykket fra $(1, 0)$ til $(0, 1)$: På dette linjestykket er $y = 1 - x$, og vi får

$$A(x, 1 - x) = \frac{1}{16}\big(x^2 + (1 - x)^2\big) \qquad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Dette er samme uttrykk som i det første punktet ovenfor, og vi finner et minimum for $x = \frac{1}{2}$ og maksima for $x = 0$ og $x = 1$. Vi har dermed et mulig minimumspunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og mulige maksimumspunkter i $(1, 0)$ og $(0, 1)$.

La oss ta en liten oppsummering: Vi har potensielle minimumspunkter i $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ og $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Regner vi ut funksjonsverdiene, får vi $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{48}$ og $A\left(\frac{1}{2}, 0\right) = A\left(0, \frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$. Dette betyr at minimumspunktet er $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ og minimumsverdien $\frac{1}{48}$. Vi får altså mimimalt areal når vi deler opp ståltråden i tre like store deler.

På tilsvarende måte har vi de potensielle maksimumspunktene $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Regner vi ut funksjonsverdiene, får vi $A(0, 0) = A(1, 0) = A(1, 1) = \frac{1}{16}$. Maksimumsverdiene er altså $\frac{1}{16}$ oppnådd i hjørnene $A(0, 0) = A(1, 0) = A(1, 1)$. Geometrisk representerer disse hjørnene den samme løsningen — vi deler ikke opp ståltråden i det hele tatt, men bøyer den sammen til ett stort kvadrat. ▮

Eksemplet ovenfor viser at vi ikke kan neglisjere punktene på randen av definisjonsområdet — det kan hende at det er der det interessante foregår! Det neste eksemplet illustrerer (blant annet) de problemene vi kan støte på når definisjonsområdet *ikke* er begrenset.

T3.1.11 Eksempel Vi skal lage en boks med volum V. Hvordan skal vi ordne oss for at overflatearealet A skal bli minst mulig?

Kaller vi sidekantene x, y og z som vist på figur T3.1.7, ser vi at arealet blir

$$A = 2xy + 2xz + 2yz$$

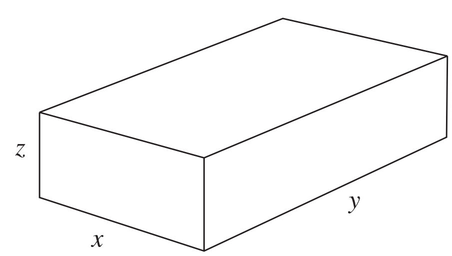
Siden volumet $V = xyz$ er gitt, kan vi eliminere en av variablene

$$z = \frac{V}{xy}$$

Dette gir

$$A(x, y) = 2xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

I dette uttrykket kan x og y være vilkårlige, positive tall.



Figur T3.1.7

Vi deriverer A:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2V}{x^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2V}{y^2}$$

For å finne de stasjonære punktene, må vi løse ligningen

$$y = \frac{V}{x^2} \qquad \text{og} \qquad x = \frac{V}{y^2}.$$

Setter vi det første uttrykket inn i det andre, ser vi at

$$x = \frac{V}{\left(\frac{V}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{V}$$

som gir $x = \sqrt[3]{V}$. Dette gir $y = \frac{V}{x^2} = \frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2} = \sqrt[3]{V}$. Vi har altså ett stasjonært punkt $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$.

La oss regne ut de annenderiverte:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = 2, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

Dette gir

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 4$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right) = 4$$

og $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12$. Følgelig er $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ et lokalt minimum. Legg merke til at siden

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[3]{V}} = \sqrt[3]{V}$$

svarer dette lokale minimumet til at vi lar kassen være en kube (alle sider like lange) med overflateareal

$$A = 6 \cdot V^{2/3}$$

La oss oppsummere våre resultater så langt: Vi har vist at funksjonen A bare har ett stasjonært punkt, og det er et lokalt minimum for $x = \sqrt[3]{V}$ og $y = \sqrt[3]{V}$. Dersom det finnes et globalt minimum, må dette være i punktet $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$. Mange vil nok slå seg til ro med at dette betyr at $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ er et globalt minimum, men det finnes faktisk en annen mulighet — det kan tenkes at A nærmer seg en lavere «minimalverdi» enn $6V^{2/3}$ uten noen gang å nå frem til den. Vi skal nå vise at dette ikke kan skje og at $A_0 = 6V^{2/3}$ faktisk er den minste verdien arealet kan ha.

Vi tar utgangspunkt i at uttrykket for arealet

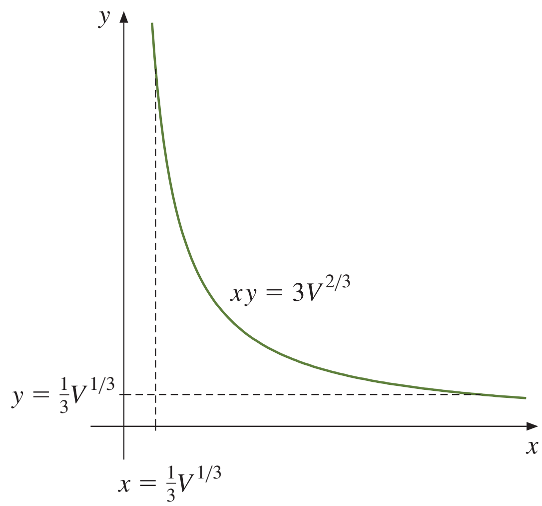
$$A(x, y) = 2xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

består av tre positive ledd $2xy$, $\frac{2V}{y}$ og $\frac{2V}{x}$. Skal arealet være mindre enn A_0, må i hvert fall hvert av disse leddene være mindre enn A_0. Begynner vi bakfra, ser vi at skal $\frac{2V}{x}$ være mindre enn A_0, må

$$x > \frac{2V}{A_0} = \frac{1}{3}V^{1/3},$$

dvs. punktet (x, y) må ligge til høyre for den vertikale linjen $x = \frac{1}{3}V^{1/3}$. Tilsvarende ser vi at skal $\frac{2V}{y}$ være mindre enn A_0, må

$$y > \frac{1}{3}V^{1/3}$$



Figur T3.1.8

dvs. punktet (x, y) må ligge over for den horisontale linjen $y = \frac{1}{3}V^{1/3}$. Til slutt ser vi at skal $2xy$ være mindre enn A_0, må

$$xy \leq \frac{A_0}{2} = 3V^{2/3}$$

dvs. punktet (x, y) må ligge under hyperbelen $xy = 3V^{2/3}$.

Kombinerer vi disse kravene, ser vi at (x, y) må ligge i det avgrensede området på figur T3.1.8 dersom det skal være noe håp om at $A(x, y) < A_0 = 6V^{2/3}$. Vi legger også merke til at på randen av det avgrensede området vil $A(x, y) > A_0$ – her er nemlig ett av de tre leddene $2xy$, $\frac{2V}{y}$ og $\frac{2V}{x}$ lik A_0 mens de to andre er positive.

Inkluderer vi randen, er det avgrensede området lukket og begrenset. Ifølge ekstremalverdisetningen i forrige seksjon har A et (globalt) minimumspunkt i dette området. Dette minimumspunktet kan ikke ligge på randen siden verdien på randen hele tiden er større enn verdien A_0 i det indre punktet $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$. Altså må minimumspunkt ligge i det indre, og ifølge setning T3.1.3 må det være et stasjonært punkt. Siden det eneste stasjonære punktet er $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$, må dette være et globalt minimum for A på det avgrensede området. Siden funksjonsverdien utenfor dette området alltid er større enn $A\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$, må $\left(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\right)$ være det globale minimumet for A på hele definisjonsområdet. ▮

Det siste resonnementet i eksemplet ovenfor er ganske komplisert, og i praktiske oppgaver hender det ofte at man utelater argumenter av denne typen. Isteden argumenterer man for at det ut i fra oppgavens praktiske tolkning må finnes et maksimum eller minimum. I eksemplet ovenfor virker det imidlertid ikke så lett å gi et slikt argument.

Oppgaver

1. Finn de stasjonære punktene til funksjonen:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

c) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 7y$

d) $f(x, y) = xe^{y^2+x}$

e) $f(x, y) = xy - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}$

2. Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

b) $f(x, y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$

c) $f(x, y) = e^{x^2+3y^2}$

d) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x + y + x^2 + y^2}$

e) $f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

3. Finn det stasjonære punktet til funksjonen

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$$

og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, minimimumspunkt eller sadelpunkt.

4. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

5. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

6. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = (x + y^2)e^x$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

7. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimimumspunkter eller sadelpunkter.

8. (Eksamen i MAT1110, 13/6, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = 2x^2y + 4xy - y^2$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

9. (Eksamen i MAT1110, 13/8, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^x$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

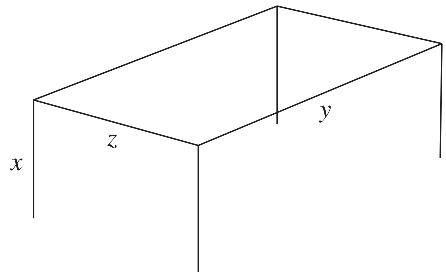
10. La $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

a) Finn de stasjonære punktene til f og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

b) Finn maksimum og minimum til f på området $\{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 3\}$. Bruk en datamaskin eller en lommeregner til å tegne grafen.

11. Du skal lage en boks med volum V. Boksen skal ha bunn og fire sideflater, men ingen topp. Hvordan skal du lage boksen for at overflatearealet skal bli minst mulig?

12. Du skal lage en ramme av stålrør som skal brukes som reisverk til et telt. Rammen består av fire bein med lengde x festet til et rektangel med sider y og z, se figur under. Lengdene x, y og z måles i meter.



Volumet $V = xyz$ av teltet skal være 500 m^3. Din oppgave er å lage teltet slik at den totale lengden L av stålrør som går med blir minst mulig.

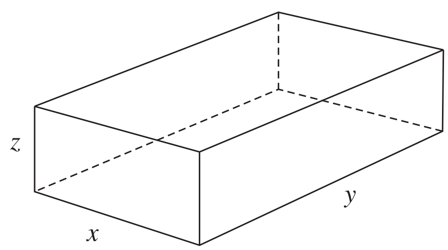
a) Begrunn at lengden L kan skrives som

$$L(x, y) = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}$$

og finn de partiellderiverte $\frac{\partial L}{\partial x}$ og $\frac{\partial L}{\partial y}$.

b) Bestem de dimensjonene av teltet som gjør totallengden av stålrør minst mulig.

13. Vi skal bygge en rettvinklet kasse uten lokk, se figur nedenfor. Kassen skal ha sidelengder x og y og høyde z. Selve «skjelettet» til kassen skal lages av 12 tynne rør (markert med streker på figuren). Den totale lengden rør vi skal benytte er 56 meter.



a) Begrunn at arealet A av kassens utside (de fire veggene pluss bunnen) som funksjon av x og y kan skrives

$$A(x, y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

og finn de partiellderiverte av A. Bestem deretter eventuelle punkter (x, y) der begge de partiellderiverte er null, og avgjør om disse punktene er lokale minimumspunkter for A, lokale maksimumspunkter for A eller ingen av delene.

b) Finn maksimumsverdien for $A(x, y)$ på området i xy-planet gitt ved $0 \le x \le 14$, $0 \le y \le 14$. Hvordan bør sidelengdene x og y velges for at arealet av kassens utside skal bli størst mulig? (Begrunn svaret.)

14. (Eksamen i MAT 1100, 9/12, 2005) Oslo kommune planlegger å bygge et akvarium med volum 5000 m^3. Kostnadene er gitt ved:

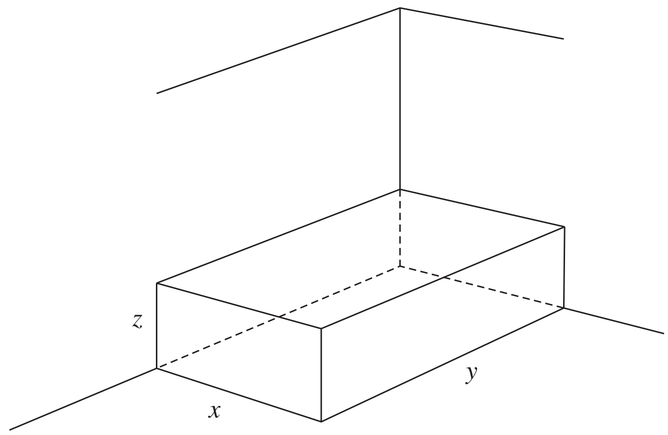
Fronten – en glassplate:	1000 kr per m^2.
Sidekantene – 3 stk i stål:	300 kr per m^2
Bunnen – i sement:	500 kr per m^2

Anta glassplaten har lengde l og høyde h. Forklar hvorfor materialene koster

$$f(l, h) = 100\left(13lh + \frac{30\,000}{l} + \frac{25\,000}{h}\right)$$

Finn l og h som minimaliserer materialkostnadene.

15. Et baderom har takhøyde 3 m og et kvadratisk gulv som er 4 m^2. I dette rommet skal vi plassere et badekar av lengde x, bredde y og høyde z (målt i meter) og med volum $xyz = \frac{2}{3}$ m^3. Badekaret skal plasseres i det ene hjørnet av baderommet som vist på tegningen.



Ut i fra dimensjonene på rommet og karet får vi: $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 < z \leq 3$ (og derfor også $xy = \frac{2}{3z} \geq \frac{2}{9}$ $(\text{m})^2$). Vi skal flislegge de to veggene badekaret berører, samt badegulvet, men vi flislegger bare de delene av veggene og gulvet som badekaret ikke dekker. Vi bruker to forskjellige typer fliser til vegger og gulv. Prisen på veggflisene er 90 kr/m^2 og på gulvflisene 60 kr/m^2. La $P(x, y)$ betegne totalprisen på flisene som funksjon av x og y angitt i kr.

a) Vis at vi får

$$P(x, y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy,$$

og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

b) For å få oversikt over utgiftene til flisleggingen ønsker vi å finne den verdien av (x, y) som gjør at $P(x, y)$ blir størst mulig. Finn denne verdien av (x, y) og den tilsvarende verdien til P.

16. Det amerikanske postvesenet ekspederer bare pakker der summen av lengde, bredde og høyde er mindre enn 108 tommer. Hva er det største volumet en kasseformet pakke kan ha?

17. En fabrikk produserer to modeller av en vare. Det koster 400 kr å lage standardmodellen og 600 kr å lage luksusmodellen. Undersøkelser viser at når utsalgsprisene for standardmodellen og luksusmodellen er hhv. x og y kroner, så får fabrikken solgt $5(y - x)$ eksemplarer av standardmodellen og $450\,000 + 500(x - 2y)$ eksemplarer av luksusmodellen. Hvordan skal prisene settes for å maksimere fortjenesten?

18. To bedrifter konkurrerer om å selge nesten identiske varer i samme marked. En økning i produksjonen hos den ene bedriften fører derfor til svikt i inntektene hos den andre. Hvis bedrift A produserer x enheter per måned, og bedrift B produserer y enheter per måned, er de månedlige fortjenestene gitt ved

$$P = 12\,000x - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} \qquad \text{for bedrift } A$$

$$Q = 12\,000y - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{6} \qquad \text{for bedrift } B$$

a) Dersom bedriftene ikke samarbeider om å fastsette produksjon, er det naturlig å anta at hver av bedriftene uavhengig av den andre fastsetter sin produksjon slik at egen fortjeneste blir så stor som mulig. Dessuten antar hver av bedriftene at den andre gjør det samme. Forklar hvorfor produksjonsnivået (x, y) er løsningen av ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Finn fortjenestene til A og B i dette tilfellet.

b) Bedriftsledelsen i de to bedriftene tror at ved å samarbeide om produksjonsnivået kan de øke den totale fortjenesten til bedriftene. Forklar at det optimale produksjonsnivået nå er løsningen av ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Finn fortjenestene til A og B i dette tilfellet.

c) Anta at bedriftene i hemmelighet har samarbeidet om å fastsette produksjonsnivået. Etter en stund oppdager bedrift B, som tidligere var mest lønnsom, at bedrift A nå er blitt markedsleder. Bedrift B bestemmer seg derfor for å bryte avtalen uten å si fra til A. Gitt at A fastholder sitt produksjonsnivå fra b), hvordan skal B velge sitt produksjonsnivå for å få størst mulig fortjeneste? Hva blir fortjenestene til A og B i dette tilfellet?

19. I denne oppgaven er $f(x, y) = x^4 + y^4$.

a) Vis at (0,0) er et stasjonært punkt der Hesse-determinanten D er lik null. Vis at (0,0) er et minimumspunkt for funksjonen.

b) Lag en funksjon $g(x, y)$ der (0,0) er et maksimumspunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lik null.

c) Lag en funksjon $h(x, y)$ slik at (0,0) er et sadelpunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lik null.

20. I denne oppgaven skal vi se på noen viktige forskjeller mellom funksjoner av henholdsvis én og flere variable.

a) La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon av én variabel og anta at det eneste stasjonære punktet til f er et lokalt maksimum i a. Vis at da er a et globalt maksimum for f.

b) La

$$f(x, y) = 1 - x^2 - (1 + x)^3 y^2$$

Vis at (0,0) er det eneste stasjonære punktet til f.

c) Vis at (0,0) er et lokalt maksimum, men ikke et globalt maksimum for f. Bruk en datamaskin eller lommeregner til å tegne grafen til f, og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

d) La $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon av én variabel og anta at a og b er to lokale maksimumspunkter for f. Vis at det finnes et lokalt minimumspunkt mellom a og b.

e) La

$$g(x, y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$$

Vis at de stasjonære punktene til g er $(-1, 0)$ og $(1, 0)$.

f) Vis at begge de to stasjonære punktene til g er lokale maksimumspunkter. Bruk en datamaskin eller lommeregner til å tegne grafen til g, og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

T3.2 Lagranges multiplikatormetode

I forrige seksjon så vi hvordan vi kan finne de lokale maksimums- og minimumspunktene til en funksjon $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ av flere variable når $x_1, x_2, \dots, x_m$ får lov til å ha *alle* verdiene i definisjonsområdet til f. Vi skal nå se hva som skjer når vi har begrensninger (såkalte *bibetingelser*) på variablene.

I de enkleste problemene av denne typen har vi to funksjoner $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og vi ønsker å finne den største og/eller minste verdien til $f(x, y)$ blant de punktene som tilfredsstiller *bibetingelsen* $g(x, y) = b$, der b er en gitt konstant. La oss begynne med et enkelt (men langt!) eksempel.

T3.2.1 Eksempel Vi skal finne maksimums- og minimumsverdien til funksjonen $f(x, y) = xy$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. Setter vi $g(x, y) = x^2 + y^2$, ser vi at dette er en bibetingelse $g(x, y) = 1$ av typen vi beskrev ovenfor. Det er flere måter å løse dette problemet på. Den mest naturlige er kanskje å løse ligningen $x^2 + y^2 = 1$ for y og sette inn (substituere) resultatet i f. Da får vi to optimeringsproblemer med én variabel,

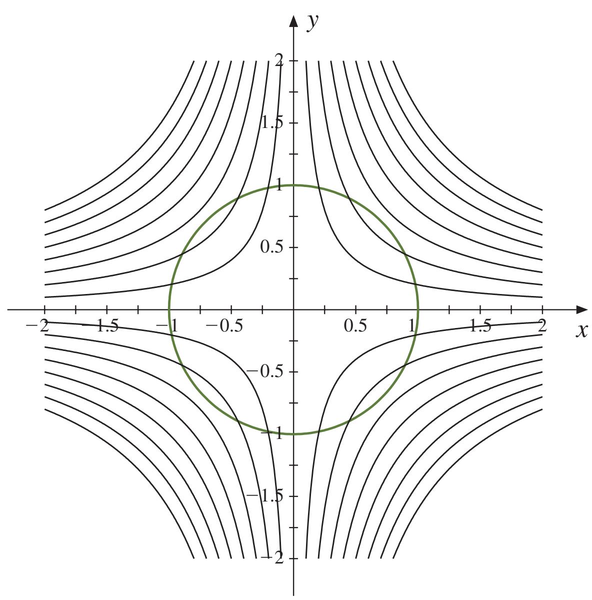
$$h(x) = x\sqrt{1 - x^2}$$

for øvre halvsirkel, og

$$k(x) = -x\sqrt{1 - x^2}$$

for nedre halvsirkel. Det er lett å finne maksimumspunktene til disse funksjonene ved vanlige metoder.

Selv om «substitusjonsmetoden» fungerer bra i dette eksemplet, har den en fundamental svakhet. Dersom bibetingelsen er mer komplisert enn $x^2 + y^2 = 1$, klarer vi ikke å løse ligningen for én av variablene, og hele forsøket vårt bryter sammen. Vi ønsker derfor å finne en metode som ikke er basert på at vi løser ligninger og substituerer.

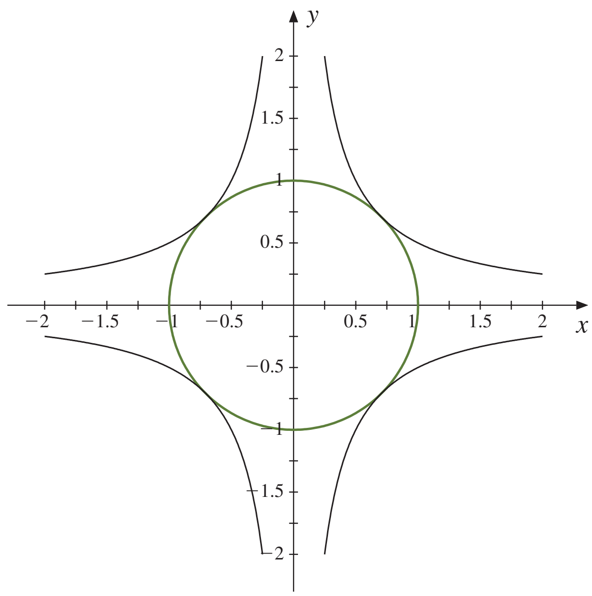


Figur T3.2.1 Nivåkurver og bibetingelseskurve

I figur T3.2.1 har vi tegnet opp punktene som tilfredsstiller bibetingelsene (sirkelen) sammen med noen av nivåkurvene til funksjonen $f(x, y) = xy$. En *nivåkurve* $N_c = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$ er en kurve bestående av alle punkter med en gitt funksjonsverdi

c. Nivåkurvene på figuren tilsvarer funksjonsverdiene fra -1.6 til 1.6 med trinn på 0.2. Absoluttverdien til funksjonen vokser med x og y, så det er de ytterste nivåkurvene som svarer til høye positive og negative funksjonsverdier (legg merke til at f har positive verdier i første og tredje kvadrant, og negative verdier i annen og fjerde kvadrant).

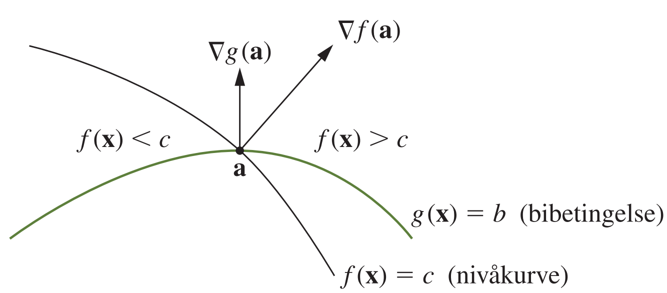
Vi ser at det er noen nivåkurver som ikke skjærer bibetingelseskurven i det hele tatt — de tilsvarer verdier som funksjonen ikke kan ha så lenge vi innskrenker oss til punkter på sirkelen. Nivåkurver som skjærer sirkelen, tilsvarer verdier som funksjonen har på sirkelen. De største og minste verdiene får vi når nivåkurvene bare berører sirkelen og går ut igjen. Figur T3.2.2 viser denne situasjonen.



Figur T3.2.2 Optimale nivåkurver

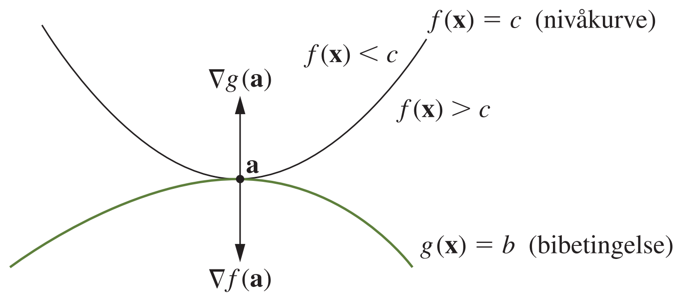
Nivåkurvene i figur T3.2.2 tilsvarer verdiene $\frac{1}{2}$ (i første og tredje kvadrant) og $-\frac{1}{2}$ (i annen og fjerde kvadrant), så maksimumsverdien til funksjonen på sirkelen er $\frac{1}{2}$ og minimumsverdien er $-\frac{1}{2}$.

Legg merke til at nivåkurvene i figur T3.2.2 tangerer bibetingelseskurven. Det er lett å innse at dette er et fenomen som ikke bare gjelder i dette eksemplet, men som gjelder generelt når man skal optimere en funksjon $f(x, y)$ under en bibetingelse $g(x, y) = b$ — dersom nivåkurven *krysser* bibetingelseskurven, vil vi normalt ha større verdier på den ene siden av skjæringspunktet og mindre på den andre (se figur T3.2.3).



Figur T3.2.3 $\mathbf{a}$ er ikke et ekstremalpunkt under bibetingelsen $g(\mathbf{x}) = b$

Dette betyr at når vi leter etter våre maksimums- og minimumspunkter, så må vi lete etter punkter der nivåkurven *tangerer* bibetingelseskurven, eller – sagt med andre ord — der normalen til nivåkurven er parallell med normalen til bibetingelseskurven (se figur T3.2.4). Disse normalene er lette å finne siden det viser seg at gradienter alltid står normalt på nivåkurver (prøv å overbevise deg selv om dette — det henger sammen med at gradienten peker i en retningen hvor funksjonen vokser raskest), og bibetingelseskurven er en nivåkurve for funksjonen $g(x, y)$. Vi leter altså etter punkter der de to gradientene $\nabla f(x, y)$ og $\nabla g(x, y)$ er parallelle, dvs. punkter der det finnes et tall λ slik at $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.



Figur T3.2.4 $\mathbf{a}$ er et minimumspunkt under bibetingelsen $g(\mathbf{x}) = b$

I eksemplet vårt er

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

og vi er på jakt etter punkter der disse er parallelle, dvs. punkter der det finnes et tall λ slik at

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x \\ x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Dette gir oss to ligninger med tre ukjente, x, y og λ. Den nye ukjente λ som har sneket seg inn i regnestykket, kalles en *Lagrangemultiplikator* og har gitt navn til hele metoden. I tillegg har vi en tredje ligning siden punktet vårt må tilfredsstille bibetingelsen:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dette ligningssystemet med tre ligninger og tre ukjente kan løses på mange måter. La oss først observere at ingen av de ukjente x, y kan være 0, for hvis den ene er det, må den andre også være det, og da får vi ikke oppfylt ligningen $x^2 + y^2 = 1$. Dette medfører at heller ikke λ kan være 0. Dermed kan vi dele den første av ligningene våre på den andre, og få

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

som gir $y^2 = x^2$. Setter vi dette inn i den tredje ligningen, får vi $2x^2 = 1$ som gir $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden $y^2 = x^2$, får vi også $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dermed har vi fire punkter vi må se videre på: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Setter vi inn i funksjonen $f(x, y) = xy$, får vi

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

og

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dette stemmer svært godt med våre grafiske undersøkelser ovenfor, og siden ekstremalverdisetningen forteller oss at funksjonen f må ha maksimums- og minimumspunkter på sirkelen (som er en lukket, begrenset mengde), må vi ha en maksimumsverdi $\frac{1}{2}$ som oppnås i punktene $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og en minimumsverdi $-\frac{1}{2}$ som oppnås i punktene $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ▮

La oss oppsummere eksemplet ovenfor i litt mer generelle vendinger. Vi har en funksjon $f(x, y)$ som vi ønsker å maksimere eller minimere under bibetingelsen $g(x, y) = b$, der b er en konstant. Da må vi lete etter punkter på bibetingelseskurven der $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi to ligninger med to ukjente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

I tillegg har vi bibetingelsen

$$g(x, y) = b$$

slik at vi får tre ligninger med tre ukjente. Løser vi dette ligningssystemet, vil vi (under svært generelle betingelser) ha funnet alle potensielle maksimums- og minimumspunkter for problemet vårt.

Vi kan generalisere enda litt lenger. Anta at vi har en funksjon

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

av m variable og en bibetingelse

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b$$

Setter vi opp den samme ligningen $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ som før og skriver den ut komponentvis, får vi m ligninger med $m+1$ ukjente $x_1, x_2, \ldots, x_m$, λ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Legger vi til bibetingelsen

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

har vi $m + 1$ ligninger med $m + 1$ ukjente. Igjen viser det seg at dette ligningssystemet gir oss alle mulige maksimums- og minimumspunkter.

BEMERKNING: Ser du i litteraturen, vil du finne at bibetingelsene formuleres litt forskjellig — i noen bøker finner du alltid formen $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, mens andre tillater $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$ for en vilkårlig $b \in \mathbb{R}$. Egentlig er det ikke noen forskjell på disse formene — har vi et krav av typen $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$, innfører vi bare en ny funksjon

$$\tilde{g}(x_1, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m) - b,$$

og dermed har vi en bibetingelse av typen

$$\tilde{g}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

Siden $\nabla\tilde{g} = \nabla g$, blir betingelsene for maksimums-/minimumspunkt uforandret.

T3.2.2 Teorem (Lagranges multiplikatormetode med én bibetingelse)
Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $f, g : U \to \mathbb{R}$ er to funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. La b være et reelt tall, og anta at $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f på mengden

$$A = \{\, \mathbf{x} \in U \mid g(\mathbf{x}) = b \,\}$$

Dersom $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, finnes det en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}})$$

Legg merke til at det i teoremet er kommet inn en betingelse som vi ikke har nevnt tidligere, nemlig at $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Dette er bare naturlig — dersom $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, bryter vårt geometriske resonnement sammen, og hva som helst kan hende. Vi understreker også at teoremet bare hjelper oss å finne *potensielle* maksimums- og minimumspunkter — et punkt som tilfredsstiller betingelsene, behøver ikke å være noen av delene, men kan være et generalisert sadelpunkt.

La oss se på et eksempel på bruken.

T3.2.3 Eksempel Vi skal finne minimumsverdien til funksjonen

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsen $x^2 + 4y^2 - z = 0$. Legg merke til at problemet har en geometrisk tolkning — vi ønsker å finne det punktet (x, y, z) på flaten $z = x^2 + 4y^2$ som har kortest avstand til punktet $(3, 0, 0)$.

Lar vi $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z = 0$, ser vi at

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siden ∇g aldri er null, slipper vi å bry oss om tilfellet $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Vi ser videre at

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 6 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Skriver vi ligningen $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ på komponentform, får vi (etter å ha forkortet litt)

$$\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ y &= 4\lambda y \\ 2z &= -\lambda \end{aligned}$$

I tillegg har vi bibetingelsen

$$x^2 + 4y^2 - z = 0$$

En av utfordringene ved Lagranges multiplikatormetode er å løse ligningssystemene vi kommer frem til. Ofte er dette ganske krevende fordi ligningssystemene får en uvant form som vi ikke har noen standardmetode for løse. I tilfellet vi nå ser på, kan det være lurt å starte med ligning nummer to, $y = 4\lambda y$. Her er det to muligheter. Dersom $y \neq 0$, må $\lambda = \frac{1}{4}$. Dersom $y = 0$, kan derimot λ være hva som helst. Vi ser på disse tilfellene hver for seg:

Tilfellet $\lambda = \frac{1}{4}$: Den øverste ligningen blir nå til $x - 3 = \frac{1}{4}x$, som gir $x = 4$, og den tredje ligningen gir $z = -\frac{1}{8}$. Setter vi dette inn i den nederste ligningen, får vi

$$16 + 4y^2 + \frac{1}{8} = 0$$

som åpenbart ikke har noen løsning. Tilfellet $\lambda = \frac{1}{4}$ fører derfor ikke frem.

Tilfellet $y = 0$: Vi sitter nå igjen med tre ligninger for x, z og λ, nemlig

$$\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ 2z &= -\lambda \\ x^2 - z &= 0 \end{aligned}$$

Eliminerer vi z fra de to siste, ser vi at $\lambda = -2x^2$, og setter vi dette inn i den øverste ligningen, sitter vi igjen med $x - 3 = -2x^3$, dvs.

$$2x^3 + x - 3 = 0$$

Vi ser at $x = 1$ er en løsning av denne ligningen. For å undersøke om det finnes flere løsninger, polynomdividerer vi $2x^3 + x - 3$ med $x - 1$, og får $2x^2 + 2x + 3$ som ikke har reelle røtter. Dermed har vi bare én løsning for x, nemlig $x = 1$. Siden $x^2 - z = 0$, følger det at $z = 1$, (det følger også at $\lambda = -2$, men λ er vi egentlig ikke interessert i).

Vi har dermed sett at den eneste løsningen av ligningssystemet er $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Siden den geometriske tolkningen forteller oss at funksjonen må ha et minimumspunkt, er det dette vi har funnet. ▮

BEMERKNING: Som vi allerede har observert, er det ofte krevende å løse ligningssystemene vi får fra Lagranges metode. I praksis bruker man gjerne numeriske teknikker (f.eks. Newtons metode) til å finne løsningene.

I forrige seksjon viste vi hvordan man kan finne lokale maksimums- og minimumspunkter i *det indre* av et område ved å lete etter punkter der alle de partiellderiverte er null. Men hva med eventuelle maksimal- og minimalpunkter på randen til området? De kan vi ofte finne ved hjelp av Lagranges multiplikatormetode slik neste eksempel viser.

T3.2.4 Eksempel Vi skal finne maksimums- og minimumspunktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

på området

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

Hvis et slikt punkt ligger i det indre av området, vet vi at de partiellderiverte må være null i punktet. Siden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2,$$

ser vi at det eneste stasjonære punktet er $(0, 0)$ og at $f(0, 0) = 0$. Dette er vår første kandidat til tittelen som maksimums- og minimumspunkt. De andre kandidatene må ligge på randen

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \},$$

så vi bruker Lagranges multiplikatormetode med $f(x, y) = x^2 - y^3$ og $g(x, y) = x^2 + y^2$. Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

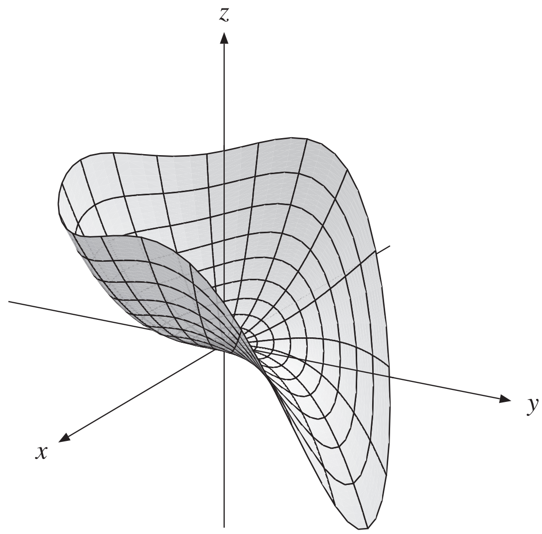
og skriver vi ligningen $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ på komponentform, får vi (etter litt forkorting) ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &= \lambda x \\ -3y^2 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Den første ligningen kan oppfylles på to måter, enten er $x = 0$ eller så er $\lambda = 1$. Vi ser på tilfellene hver for seg. Hvis $x = 0$, følger det fra den siste ligningen at $y = \pm 1$. Dette betyr at $(0, \pm 1)$ er mulige ekstremalpunkter. Setter vi isteden $\lambda = 1$, får den andre ligningen i systemet formen $-3y^2 = 2y$. Denne ligningen har to løsninger, $y = 0$ og $y = -\frac{2}{3}$. Setter vi disse løsningene inn i den tredje ligningen, ser vi at $y = 0$ gir $x = \pm 1$ og at $y = -\frac{2}{3}$ gir $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ialt har vi dermed sju kandidater: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ og $\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. For å finne maksimum og minimum, regner vi ut alle funksjonsverdiene:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \pm 1) = \mp 1, \quad f(\pm 1, 0) = 1, \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{27}$$



Figur T3.2.5 Grafisk fremstilling av flaten $f(x, y) = x^2 - y^3$

Dette viser at maksimumsverdien 1 finner vi i punktene $(0, -1)$, $(\pm 1, 0)$, mens minimumsverdien -1 finner vi i punktet $(0, 1)$.

Figur T3.2.5 viser grafen. Du ser tydelig de tre maksimumspunktene og det ene minimumspunktet. Punktene $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ er lokale minimumspunkter når du går fra topp til topp langs randen. Det indre punktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt (men du kan ikke vise det ved annenderivertesten siden determinanten D er null).

BEMERKNING OM LAGRANGEFUNKSJONER: I mange bøker vil du finne teorien ovenfor fremstilt på en litt annen måte ved hjelp av såkalte *Lagrangefunksjoner*. For å optimere funksjonen $f(x_1, \ldots, x_m)$ under bibetingelsen $g(x_1, \ldots, x_m) = b$, definerer man *Lagrangefunksjonen*

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_m) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_m) - b)$$

(legg merke til at λ nå er blitt en variabel på linje med $x_1, \ldots, x_m$). La oss glemme det opprinnelige problemet et øyeblikk, og heller finne de stasjonære punktene til L. Regner vi ut de partiellderiverte til L, får vi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial L}{\partial x_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_m} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_m} \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -g(x_1, \ldots, x_m) + b
\end{aligned}$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi akkurat de ligningene vi må løse når vi bruker Lagranges multiplikatormetode — å bruke denne metoden er altså det samme som å finne de stasjonære punktene til Lagrangefunksjonen! I en del bøker vil du derfor se at man løser optimeringsproblemer under bibetingelser ved å skrive opp Lagrangefunksjoner og lete etter deres stasjonære punkter.

Det er en ting til du bør være klar over. Noen bøker bytter fortegn på λ-leddet i Lagrangefunksjonen og skriver den som

$$L(x_1, \ldots, x_m, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_m) + \lambda\big(g(x_1, \ldots, x_m) - b\big)$$

Dette spiller ingen rolle — maksimums- og minimumspunktene er de samme som før, det er bare λ som får omvendt fortegn av det den ellers ville ha fått.

Lagranges multiplikatormetode med flere bibetingelser

Vi skal nå se på Lagranges multiplikatormetode når vi ønsker å optimere en funksjon

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

under *flere* bibetingelser

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= b_k \end{aligned}$$

Normalt må vi ha $k < m$ for å få et fornuftig ekstremalproblem, og vi skal derfor anta at dette alltid er tilfellet.

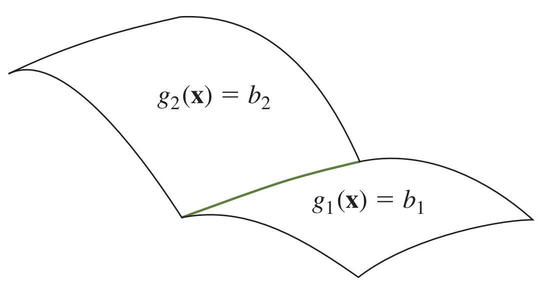
For å få en følelse for problemet ser vi først på tilfellet der vi ønsker å maksimere en funksjon

$$f(x, y, z)$$

av tre variable under to bibetingelser

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= b_1 \\ g_2(x, y, z) &= b_2 \end{aligned}$$

De to ligningene $g_1(x, y, z) = b_1$ og $g_2(x, y, z) = b_2$ vil normalt definere to flater i rommet som skjærer hverandre langs en kurve (se figur T3.2.6). Problemet er altså å finne den største verdien til f langs denne kurven.



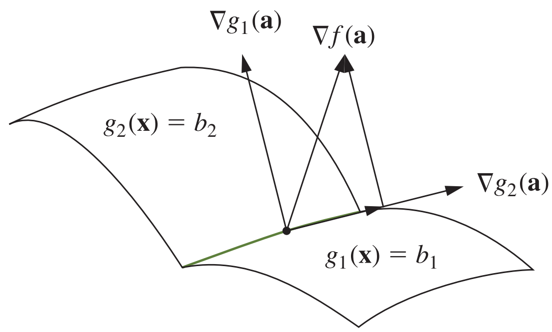
Figur T3.2.6 De to flatene $g_1(\mathbf{x}) = b_1$ og $g_2(\mathbf{x}) = b_2$ skjærer hverandre i en kurve

Husk at gradienten til f peker i den retningen hvor f vokser raskest. Dersom ∇f ikke står normalt på kurven, er det rimelig å tro at funksjonen langs kurven stiger i den retningen hvor ∇f peker. Skal vi derfor ha maksimum i et punkt, må ∇f i dette punktet stå normalt på kurven, dvs. den må ligge i normalplanet til kurven. Dette normalplanet et utspent av normalvektorene til flatene (prøv å forstå dette geometrisk!), og ∇f må derfor være en lineærkombinasjon av normalvektorene ∇g_1 og ∇g_2 til de to flatene (se figur T3.2.7).

Vi venter derfor å finne maksimalverdien i et punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der det finnes konstanter λ_1 og λ_2 slik at

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Teorem T3.2.5 nedenfor forteller oss at denne geometriske intuisjonen er riktig.



Figur T3.2.7 $\nabla f(\mathbf{a})$ som lineærkombinasjon av $\nabla g_1(\mathbf{a})$ og $\nabla g_2(\mathbf{a})$

T3.2.5 Teorem (Lagranges multiplikatormetode med flere bibetingelser)
Anta at U er en åpen delmengde av $\mathbb{R}^m$, og at $f, g_1, g_2, \dots, g_k : U \to \mathbb{R}$ er funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Anta at $b_1, b_2, \dots, b_k$ er reelle tall og at $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f på mengden

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid g_1(\mathbf{x}) = b_1, g_2(\mathbf{x}) = b_2, \dots, g_k(\mathbf{x}) = b_k\}$$

Dersom $\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}), \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})$ lineært uavhengige, så finnes det konstanter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ slik at

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})$$

Før vi ser på et eksempel, skal vi ta en nærmere kikk på hva teoremet sier. Legg merke til at vi nå har et ligningssystem med $m + k$ ukjente $x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, men at vi også har $m + k$ ligninger: Skriver vi ut ligningen

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x})$$

komponentvis, får vi m ligninger, og bibetingelsene

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= b_1 \\ g_2(\mathbf{x}) &= b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ g_k(\mathbf{x}) &= b_k \end{aligned}$$

gir oss de k siste.

T3.2.6 Eksempel Vi skal minimere funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bibetingelsene

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

(Dette er ekvivalent med å finne det punktet på skjæringslinjen mellom planene $x + 2y - z = 2$ og $-x + y + 2z = 1$ som ligger nærmest origo, så det er klart at problemet har en løsning). Vi regner ut gradientene til f og funksjonene $g_1(x, y, z) = x + 2y - z$, $g_2(x, y, z) = -x + y + 2z$:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ifølge teoremet ovenfor leter vi etter punkter der

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut ligningen komponentvis, får vi

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2y &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2z &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}$$

og i tillegg har vi bibetingelsene

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 1, \end{aligned}$$

altså fem ligninger med fem ukjente. Ligningssystemet er lineært og kan løses ved våre standardmetoder, men vi velger en snarvei. Fra de tre første ligningene, får vi uttrykkene $x = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}$, $y = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$, $z = -\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2$, som vi setter inn i de to siste ligningene. Resultatet er

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} &= 2 \\ -\frac{\lambda_1}{2} + 3\lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $\lambda_1 = \frac{26}{35}$ og $\lambda_2 = \frac{16}{35}$. Setter vi inn i uttrykkene for x, y og z, får vi $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$. Siden det geometriske minimaliseringsproblemet vårt åpenbart har en løsning, og $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$ er den eneste kandidaten, er problemet løst. ▮

BEMERKNING: Vi skal ikke komme nærmere inn på det her, men nevner i forbifarten at det også finnes annenderiverttester for ekstremalverdiproblemer med bibetingelser.

BEMERKNING OM LAGRANGEFUNKSJONER: Også når vi skal optimere en funksjon $f(x_1, \ldots, x_m)$ under *flere* bibetingelser $g_1(x_1, \ldots, x_m) = b_1, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_m) = b_k$ er det mulig å formulere problemstillingen ved hjelp av en Lagrangefunksjon L. I dette tilfellet får L formen

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= f(x_1, \ldots, x_m) \\ &\quad - \lambda_1(g_1(x_1, \ldots, x_m) - b_1) - \cdots - \lambda_k(g_k(x_1, \ldots, x_m) - b_k) \end{aligned}$$

Regner vi ut de partiellderiverte til L, får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_m} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_m} - \ldots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= -g_1(x_1, \ldots, x_m) + b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= -g_k(x_1, \ldots, x_m) + b_k \end{aligned}$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi akkurat de ligningene vi må løse når vi bruker Lagranges multiplikatormetode. Akkurat som for problemer med én bibetingelse kan vi altså løse optimeringsproblemer med flere bibetingelser ved å finne de stasjonære punktene til Lagrangefunksjonen.

Vær oppmerksom på at noen bøker bytter fortegn på λ-leddene i Lagrangefunksjonen slik at den blir seende slik ut:

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= f(x_1, \ldots, x_m) \\ &\quad + \lambda_1(g_1(x_1, \ldots, x_m) - b_1) + \cdots + \lambda_k(g_k(x_1, \ldots, x_m) - b_k) \end{aligned}$$

Dette spiller ingen rolle — maksimums- og minimumspunktene er de samme som før, det er bare λ-ene som får omvendt fortegn av det de ellers ville ha fått.

Økonomisk tolkning av Lagrangemultiplikatorer

Lagranges multiplikatormetode brukes mye i økonomiske fag. Det er ikke så vanskelig å forstå hvorfor — i økonomi er man opptatt av maksimums- og minimumsproblemer (man ønsker f.eks. å maksimere inntektene og minimere utgiftene), men samtidig har man naturlige bibetingelser — man kan f.eks. ha en begrenset sum å kjøpe råvarer for, eller man har et begrenset antall arbeidstimer å fordele på ulike oppgaver.

I de eksemplene vi har sett på hittil, har Lagrangemultiplikatorene spilt en underordnet rolle; de har vært hjelpestørrelser vi har trengt for å løse problemet vårt, men de har ikke hatt noen selvstendig betydning. I en del økonomiproblemer spiller imidlertid Lagrangemultiplikatorene en viktig rolle.

La oss tenke oss av vi ønsker å maksimere en inntektsfunksjon $f(\mathbf{x})$ under bibetingelsene $g_1(\mathbf{x}) = b_1, g(\mathbf{x}) = b_2, \ldots, g_k(\mathbf{x}) = b_k$. Dersom vi endrer verdiene $b_1, b_2, \ldots, b_k$, må vi selvfølgelig regne med at både maksimalpunktet $\bar{\mathbf{x}}$ og maksimalverdien $\bar{y} = f(\bar{\mathbf{x}})$ endrer seg. Vi kan derfor tenke på disse som funksjoner av

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, altså $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$, $\bar{y}(\mathbf{b}) = f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))$. Dersom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er Lagrange-multiplikatorene som gir maksimumspunktet $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$, antar vi at disse er funksjoner av $\mathbf{b}$, altså $\lambda_1(\mathbf{b}), \lambda_2(\mathbf{b}), \ldots, \lambda_k(\mathbf{b})$. Det er lurt å tenke på $b_1, b_2, \ldots, b_k$ som *innsatsfaktorer* i produksjonen — b_1 er kanskje det totalet beløpet vi er villige til å kjøpe råvarer for, b_2 er det totale antall arbeidstimer vi er villige til å bruke i produksjonen, b_3 beløpet vi bruker på å videreutvikle produktene osv.

Et naturlig spørsmål er hvordan en endring i innsatsfaktorene vil påvirke inntektene — hvor mye vil vi f.eks. tjene på å øke arbeidsinnsatsen med 10 %? Disse endringene måles av de partiellderiverte

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))}{\partial b_i}$$

Som vi snart skal se, er

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

Dette betyr at dersom vi gir innsatsfaktoren b_i en liten økning Δb_i, så øker inntektene med $\lambda_i(\mathbf{b})\Delta b_i$. Dersom kostnadene ved å øke b_i én enhet er mindre enn $\lambda_i(\mathbf{b})$, så lønner det seg altså å øke innsatsfaktoren b_i, men dersom kostnadene er større enn $\lambda_i(\mathbf{b})$, lønner det seg å redusere b_i. Av denne grunn kalles $\lambda_i(\mathbf{b})$ *likevektsprisen* til innsatsfaktor b_i (den kalles også *skyggeprisen* for å understreke at den ikke nødvendigvis har noe med den virkelige prisen å gjøre).

La oss nå vise at

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

Vi skal ikke gjennomføre et fullstendig matematisk resonnement, men vise at denne formelen følger dersom vi antar at de involverte funksjonene er deriverbare (det går an å vise at dette er tilfellet under svært rimelige betingelser). La oss begynne med å se på bibetingelsene. Siden de alltid er oppfylt, har vi

$$g_j(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = b_j$$

Deriverer vi dette uttrykket mhp. b_i, får vi (husk kjerneregelen på venstresiden!):

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{3.1}$$

Deriverer vi inntektsfunksjonen mhp. b_i, får vi tilsvarende

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial b_i} f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b})$$

Ifølge Lagrangebetingelsene er

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\mathbf{b})\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))$$

og setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\mathbf{b})\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\mathbf{b})\sum_{n=1}^{m}\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))\frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})
\end{aligned}
$$

der vi i siste overgang har brukt formel (3.1).

Oppgaver

1. Finn maksimums- og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen f under bibetingelsen(e).

a) $f(x, y) = 4x - 3y$ når $x^2 + y^2 = 1$

b) $f(x, y) = xy$ når $9x^2 + y^2 = 18$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ når $2x - 3y + 2z = 17$

d) $f(x, y, z) = x + y + z$ når $x^2 + y^2 = 1$ og $2x + z = 1$

e) $f(x, y, z) = 2x + 3y$ når $3x^2 + 2y^2 = 3$

f) $f(x, y, z) = x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$ når $x + y + z = 1$ og $2x - y - z = 5$

2. Finn punktene på flaten $z^2 - xy = 1$ som ligger nærmest origo.

3. Finn punktene på skjæringkurven mellom flatene $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ som ligger nærmest origo.

4. Løs oppgave 11 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

5. Løs oppgave 12 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

6. Løs oppgave 13 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

7. Løs oppgave 16 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.

8. La $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + y^2$.

a) Finn de stasjonære punktene til f og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

b) Finn maksimum og minimum til f på området $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. (*Hint:* Det kan lønne seg å bytte til polarkoordinater.)

9. (Eksamen i MAT 1110, 13/6, 2008) Forklar at funksjonen $f(x, y) = 2x + 4y$ har maksimums- og minimumspunkter under bibetingelsen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$. Finn disse maksimums- og minimumspunktene.

10. Kjeglesnittet K består av alle punkter (x, y) som oppfyller ligningen $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$

a) Hva slags kjeglesnitt er K? Lag en tegning av K der alle viktige størrelser er tegnet inn (f.eks. sentrum, brennpunkter, halvakser, asymptoter etter hva som er aktuelt).

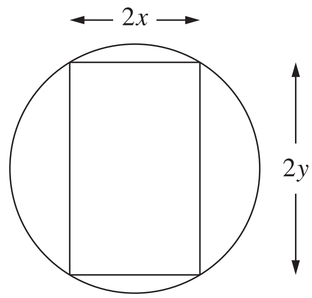
b) Forklar at funksjonen $f(x, y) = 2x + y$ har en største og minste verdi når den begrenses til mengden K. Finn disse maksimum- og minimumsverdiene.

11. En rektangulær boks med kanter parallelle med koordinataksene skal plasseres inni ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Hva er det største volumet denne boksen kan ha?

12. Av en sylinderformet stokk med radius r skal det skjæres ut en bjelke med bredde $2x$ og høyde $2y$. (Se figur). Bæreevnen til bjelken er proporsjonal med x og med kvadratet av y, dvs. den er gitt ved funksjonen

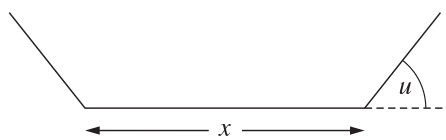
$$f(x, y) = kxy^2$$

der k er en konstant.



Finn de verdier av x og y som gir størst verdi for $f(x, y)$.

13. En renne skal lages ved at en b cm bred metallplate brettes opp symmetrisk på begge sider. Figuren viser et tverrsnit av rennen. Hvordan må vi velge bredden x og vinkelen u for at tverrsnittet skal få størst mulig areal?



14. *Herons formel* sier at arealet til en trekant med sider x, y, z er

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

der $s = \frac{x+y+z}{2}$ er halve omkretsen. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å vise at blant alle trekanter med samme omkrets, er det den likesidede som har størst areal.

15. La S være ellipsoideflaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a) Finn ligningen for tangentplanet til S i punktet (x_0, y_0, z_0).

b) Anta at $x_0, y_0, z_0 > 0$. Finn volumet til pyramiden avgrenset av koordinatplanene og tangentplanet til S i (x_0, y_0, z_0).

c) Finn det punktet (x, y, z) på S med $x, y, z \geq 0$ som gjør produktet xyz størst mulig.

d) Hva er det minste volumet pyramiden i b) kan ha?

16. I økonomi regner man ofte at profitten kan modelleres som en *Cobb-Douglasfunksjon*. Det betyr at profitten er gitt ved $P(x, y) = Kx^\alpha y^\beta$ der K, α, β er positive konstanter, og x og y står for det beløpet man investerer i forskjellige «innsatsfaktorer», f.eks. kan x være investeringen i råvarer og y investeringen i arbeidskraft. Anta at den totale investeringen er gitt, dvs. at $x + y = S$, der S er en konstant.

a) Vis at profitten er størst når $x = \frac{\alpha S}{\alpha+\beta}$, $y = \frac{\beta S}{\alpha+\beta}$. Hva er den maksimale profitten?

b) Generaliser resultatet ovenfor til flere innsatsfaktorer. Anta at

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Kx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

(der $K, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ er positive konstanter) og finn maksimumsverdien til P under bibetingelsen $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$.

17. Anta at en forbruker har valget mellom to varetyper. De to vareslagene koster hhv. p og q kroner per enhet. I økonomiske modeller regner man ofte med at nytten forbrukeren har av å kjøpe x enheter av den ene varetypen og y enheter av den andre, er gitt ved en *nyttefunksjon* av typen

$$U(x, y) = a \ln x + b \ln y$$

der a og b er positive konstanter. Dersom forbrukeren har S kroner til rådighet, ønsker hun å maksimere nyttefunksjon under bibetingelsen $px + qy = S$. Vist at hun får maksimalt utbytte ved å velge $x = \frac{aS}{p(a+b)}$ og $y = \frac{bS}{q(a+b)}$.

18. Et firma produserer to vareslag. Det har et samlet produksjonsbudsjett på S kroner i året og et utviklingsbudsjett på T kroner i året. Firmaet regner at hvis det bruker x kroner på produksjon av vareslag 1 og samtidig bruker y kroner på å videreutvikle produktet, vil overskuddet fra vareslag 1 være

$$U(x, y) = Ax^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

der A og α er konstanter, $0 \leq \alpha < 1$. Hvis firmaet på samme måte bruker z kroner på produksjon av vareslag 2 og samtidig bruker u kroner på videreutvikling, regner det med at overskuddet fra vareslag 2 vil være

$$V(z, u) = Bz^{\beta} u^{1-\alpha}$$

der B og β er konstanter, $0 \leq \beta < 1$.

a) Forklar hvorfor det er naturlig for firmaet å optimere størrelsen $U(x, y) + V(z, u)$ under bibetingelsene $x + z = S$, $y + u = T$.

b) Vis at Lagranges multiplikatormetode leder til ligningene

$$\alpha A \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1} = \lambda$$

$$(1-\alpha) A \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \mu$$

$$\beta B \left(\frac{z}{u}\right)^{\beta-1} = \lambda$$

$$(1-\beta) B \left(\frac{z}{u}\right)^{\beta} = \mu$$

$$x + z = S$$

$$y + u = T$$

c) Vis ved å kombinere de to første ligningene ovenfor at $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\mu}{\lambda}$. Vis også at $\frac{z}{u} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\mu}{\lambda}$.

d) Vis ved å kombinere den første og tredje ligningen ovenfor at

$$\alpha A \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1} = \beta B \left(\frac{z}{u}\right)^{\beta-1}$$

Sett inn uttrykkene for $\frac{x}{y}$ og $\frac{z}{u}$ fra c) og vis at dette leder til formelen

$$\frac{\mu}{\lambda} = \left[\frac{B\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

e) For enkelthets skyld kaller vi uttrykket på høyre side av uttrykket ovenfor for K. Vi har med andre ord $\frac{\mu}{\lambda} = K$. Ifølge c) har vi dermed $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}K$ og $\frac{z}{u} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\mu}{\lambda}$. Sett disse uttrykkene inn i de to siste ligningen i ligningssystemet i b), og finn x, y, z og u.

19. I denne oppgaven skal vi se på en anvendelse av Lagranges multiplikatormetode i statistisk fysikk. La oss begynne med en kort skisse av den fysiske problemstillingen (selv om det egentlig ikke er nødvendig å skjønne fysikken for å løse oppgaven): Vi har et system med N partikler (N er et svært stort tall) som kan fordele seg på n energinivåer $E_1, E_2, \dots, E_n$. Den totale energien til systemet er U, og sannsynligheten for å finne en tilfeldig partikkel på energinivå E_i er p_i. Målet er å finne den mest sannsynlige fordelingen av partiklene på energinivåene. Denne fordelingen er gitt ved vektoren $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der x_i er antall partikler på nivå E_i.

Etter noen innledende betraktninger (som er ren sannsynlighetsregning) kommer man frem til at man ønsker å finne maksimum til funksjonen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = N - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{x_i}{p_i}\right)$$

under bibetingelsene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = N \qquad \text{(det totale antall partikler er } N\text{)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i E_i = U \qquad \text{(den totale enegien er } U\text{)}$$

a) La g og h være funksjonene $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$. Vis at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\ln\left(\frac{x_i}{p_i}\right) + 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 1 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial h}{\partial x_i} = E_i$$

b) Vis at Lagranges multiplikatormetode gir ligningene

$$-\ln\left(\frac{x_i}{p_i}\right) + 1 = \lambda + \mu E_i \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

i tillegg til bibetingelsene $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$ og $\sum_{i=1}^{n} x_i E_i = U$.

c) Vis at $x_i = p_i e^{-\lambda - \mu E_i + 1}$.

d) Vi innfører nå *partisjonsfunksjonen* $Z = \sum_{i=1}^{N} p_i e^{-\mu E_i}$. Bruk den første bibetingelsen til å vise at $x_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\mu E_i}$. Dermed har vi kvittet oss med den første multiplikatoren λ.

e) Vis at den gjenværende multiplikatoren μ er bestemt av ligningen $U = \frac{N}{Z} \sum_{i=1}^{n} p_i E_i e^{-\mu E_i}$.

Dette viser at μ er knyttet til den totale energien til systemet. Faktisk viser det seg at $\mu = \frac{1}{kT}$ der T er temperaturen til systemet (målt i grader Kelvin) og k er en konstant (*Boltzmanns konstant*). Vi ender dermed opp med den fundamentale sammenhengen $x_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$ som kalles *Maxwell-Boltzmann-fordelingen*.

20. (Eksamen i MAT 1110 15/8, 2008, noe utvidet) I denne oppgaven er

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en symmetrisk $n \times n$-matrise, og $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er funksjonen $f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ (der $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ betegner skalarproduktet mellom vektorene $A\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}$).

a) Vis at dersom $\mathbf{x}$ er en egenvektor fot A med egenverdi λ, så er $f(\mathbf{x}) = \lambda|\mathbf{x}|^2$.

b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ er

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$$

der den siste summen er over alle par av ulike indekser $1 \le i,\, j \le n$.

c) La $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$ være det n-dimensjonale kuleskallet om origo med radius 1. Forklar at når vi innskrenker f til S, så har funksjonen maksimums- og minimumspunkter. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å vise at disse maksimums- og minimumspunktene er egenvektorer til A. Vis til slutt at maksimumsverdien til f på S er den største egenverdien til A, mens minimumsverdien er den minste egenverdien til A.

Fasit

Fasit til seksjon T3.1

1. a) $(2, -1)$ b) $(0, 0)$ c) $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ d) $(-1, 0)$, e) $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$

2. a) Min. i $(1, -2)$ b) Sadelpunkt i $(-1, 1)$ c) Min. i $(0, 0)$ d) Maks. i $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
e) Sadelpunkt i $(-2, 0)$

3. $(1, -2)$, lokalt minimum. **4.** $(0, 0)$ er et lokalt minimum, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ er et sadelpunkt.

5. $(1, -\frac{1}{2})$, sadelpunkt. **6.** $(-1, 0)$, lokalt minimum.

7. Lokalt minimum i $(0, 0, 0)$, sadelpunkter i $(2, 2, 2)$, $(2, -2, -2)$, $(-2, 2, -2)$, $(-2, -2, 2)$

8. a) Stasjonære punkter: $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$ b) De to første punktene er sadelpunkter, det siste et lokalt makiimum.

9. a) $(0, 0)$, $(-2, 0)$ b) $(0, 0)$ er et lokalt (og faktisk et globalt) minimum, $(-2, 0)$ er et sadelpunkt.

10. a) $(0, 0)$ er et sadelpunkt, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ er lokale (og globale) maksimumspunkter, $(0, \pm\sqrt{2})$ er lokale (og globale) minimumspunkter. b) Minimumsverdi: $-2e^{-1}$ i $(0, \pm\sqrt{2})$. Maksimumsverdi: $e^{-\frac{1}{2}}$ i $(\pm 1, 0)$.

11. Sidene i grunnflaten skal være $\sqrt[3]{2V}$ og høyden $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

12. a) $\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2 y}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{x y^2}$ b) $x = 5$, $y = z = 10$

13. a) $\frac{\partial A}{\partial x} = 28 - 4x - 3y$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 28 - 4y - 3x$, lokalt maksimum for $x = y = 4$
b) Maksimalt areal $A = 122$ for $x = y = 4$.

14. $l = \frac{60}{\sqrt[3]{78}}$, $h = \frac{50}{\sqrt[3]{78}}$

15. a) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{60}{x^2} - 60y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{60}{y^2} - 60x$ b) Maksimalverdi $P = 1140$ for $x = y = 1$

16. $x = y = z = 36$ **17.** $x = 650$, $y = 750$

18. a) $x = y = 12\,000$, $P = 36\,000\,000$, $Q = 48\,000\,000$ b) $x = 9000$, $y = 8000$, $P = 51\,500\,000$, $Q = 50\,500\,000$ c) $x = 9000$, $y = 12\,000$, $P = 31\,500\,000$, $Q = 58\,500\,000$

Fasit til seksjon T3.2

1. a) Maks.verdi 5 i punktet $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, min.verdi -5 i punktet $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. b) Maks.verdi 3 i punktene $(1, 3)$ og $(-1, -3)$, min.verdi -3 i $(1, -3)$ og $(-1, 3)$. c) Min.verdi 17 i punktet $(2, -3, 2)$. Ingen maksimalverdi. d) Maks.verdi $1 + \sqrt{2}$ i punktet $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$, min.verdi $1 - \sqrt{2}$ i punktet $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$ e) Maks.verdi $\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $\left(\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{9}{\sqrt{70}}\right)$, min.verdi $-\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $\left(-\frac{4}{\sqrt{70}}, -\frac{9}{\sqrt{70}}\right)$. f) Min.verdi $-\frac{1}{12}$ i punktet $\left(2, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$.

2. $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$ **3.** $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$

8. a) Lokalt min. i $(0, 0)$, sadelpunkter i $(\pm 1, 0)$ b) Min.verdi 0 i $(0, 0)$, maks.verdi $\ln 2 + 1$ i $(0, \pm 1)$

9. Maks. punkt $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, min. punkt $-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

10. a) Ellipse med sentrum i $(1, -2)$, halvakser $a = 2$, $b = 3$, brennvidde $c = \sqrt{5}$, brennpunkter $(1, 2 \pm \sqrt{5})$. b) Maks. punkt $\left(\frac{13}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, min. punkt $\left(-\frac{3}{5}), -\frac{19}{5}\right)$

11. $V = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ **12.** $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ **13.** $x = \frac{b}{3}$, $u = \frac{\pi}{3}$

15. a) $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ b) $V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6 x_0 y_0 z_0}$ c) $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$

16. a) $P_{\max} = K \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta S^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$

b) $P_{\max} = K \frac{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n} S^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$ for $x_1 = \frac{\alpha_1 S}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$, $x_2 = \frac{\alpha_2 S}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}, \ldots$

18. $x = \frac{S\alpha(1-\beta)-\alpha\beta KT}{\alpha-\beta}$, $y = \frac{S(1-\beta)(1-\alpha)-\beta(1-\alpha)KT}{(\alpha-\beta)K}$, $z = \frac{S\beta(1-\alpha)-\alpha\beta KT}{\beta-\alpha}$ og $u = \frac{S(1-\beta)(1-\alpha)-\alpha(1-\beta)KT}{(\beta-\alpha)K}$