Rungekuttametodene løser initialverdiproblemer på formen $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ der $F(x, y)$ står for et uttrykk i x og y.
De er iterative metoder, så **for** - løkker egner seg ypperlig i denne sammenhengen.
Vi må bare vite hva som skal utføres i løkken.

For å plotte punktene vi får, skal vi bruke kommandoen *pointplot*
men da må vi hente inn Maples plottekommandoer

```
> with(plots)
```

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*] (1

Ekstraoppgave 4.6.1

a)

Iterasjonen er her $y_n = y_{n-1} + h\left(x_{n-1}^2 + x_{n-1} \cdot y_{n-1}\right)$ med $y_0 = 0$, $x_0 = 0$

(i)

Vi setter startverdiene for x og y, verdien for h og definerer plottet P_1 av det første punktet.
Legg merke til at vi bruker hakeparenteser når vi skriver inn indekser.
Kommandoen *pointplot* brukes for å plotte ett og ett punkt.

```
> x[0] := 0 : y[0] := 0 : h := 0.2
```

$$h := 0.2$$ (2

For å finne de resterende punktene og definere plottene for dem, bruker vi en **for** - løkke.
Kontroller selv at denne løkken gjør akkurat det vi vil:

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $y[n] := y[n-1] + h\cdot\left(x[n-1]^2 + x[n-1]\cdot y[n-1]\right)$: $x[n] := x[n-1] + h$ **end do**

$$y_1 := 0.$$
$$x_1 := 0.2$$
$$y_2 := 0.008$$
$$x_2 := 0.4$$
$$y_3 := 0.04064$$
$$x_3 := 0.6$$
$$y_4 := 0.1175168$$
$$x_4 := 0.8$$
$$y_5 := 0.264319488$$
$$x_5 := 1.0$$
(3

For å plotte disse punktene, lager vi en liste av dem som vi kan kalle hva vi vil. Her er listen kalt *points*

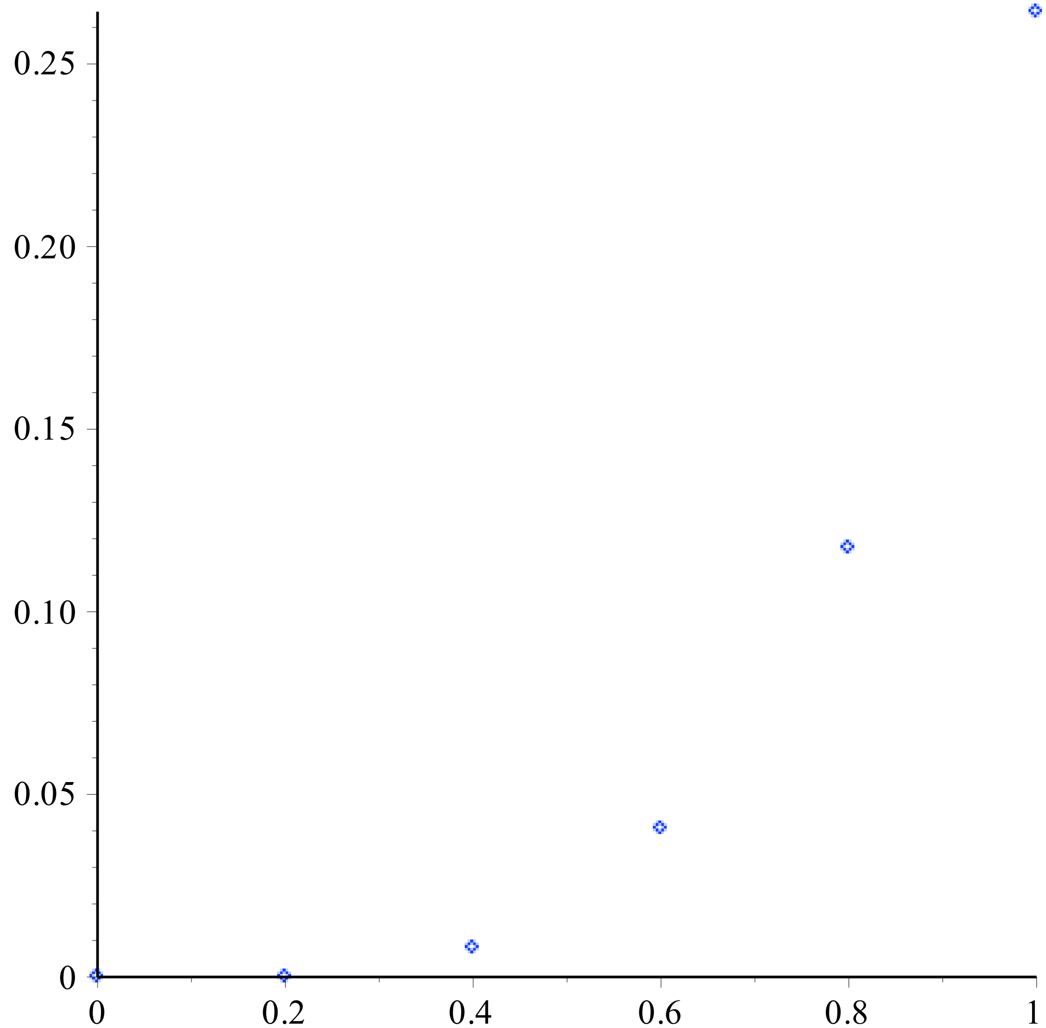
Kommandoen for å lage en slik liste er *seq*
Legg merke til at vi bruker hakeparentes rundt de to koordinatene til punktet også.

> $points := \{seq([x[n], \mathrm{y}[\mathrm{n}]], n = 0..5)\}$

$$points := \{[0, 0], [0.2, 0.], [0.4, 0.008], [0.6, 0.04064], [0.8, 0.1175168], [1.0, 0.264319488]\}$$
(4

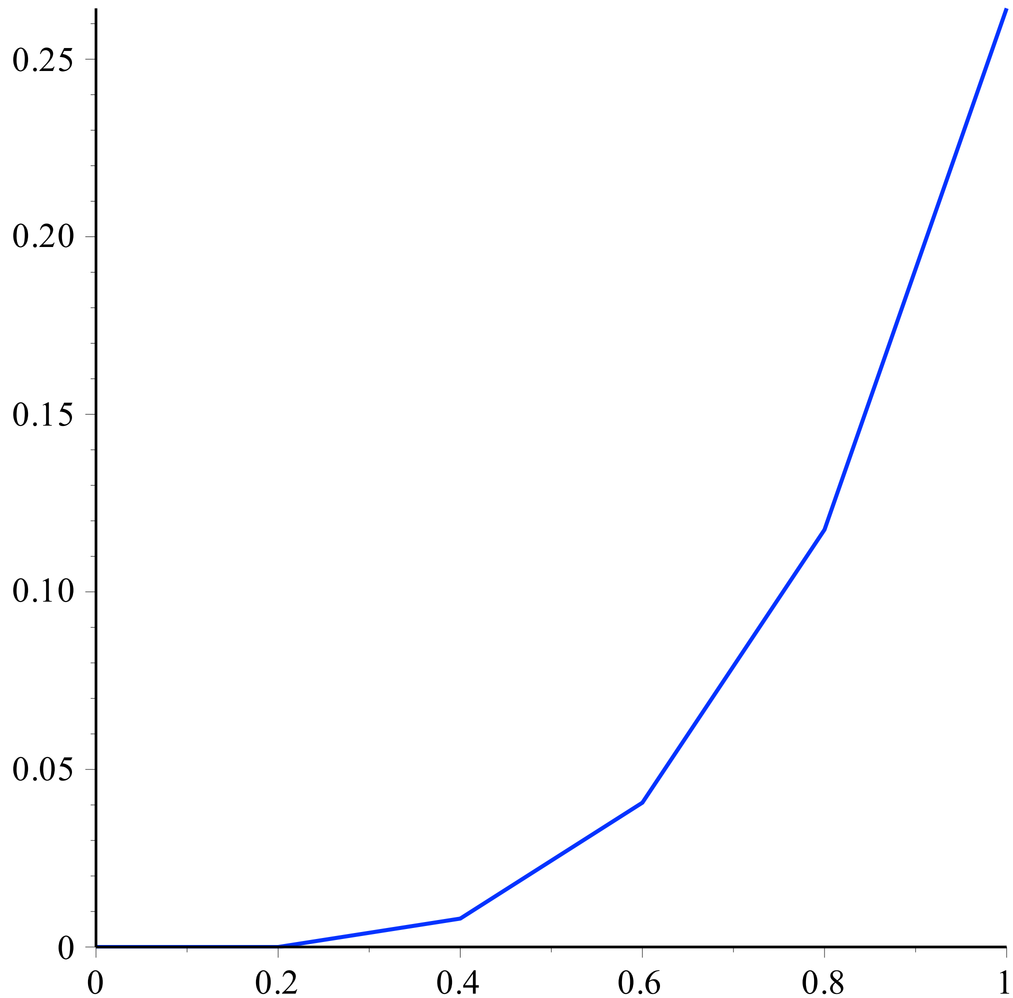
Og så plotter vi punktene ved hjelp av kommandoen *pointplot*

> $pointplot(points, color = blue)$



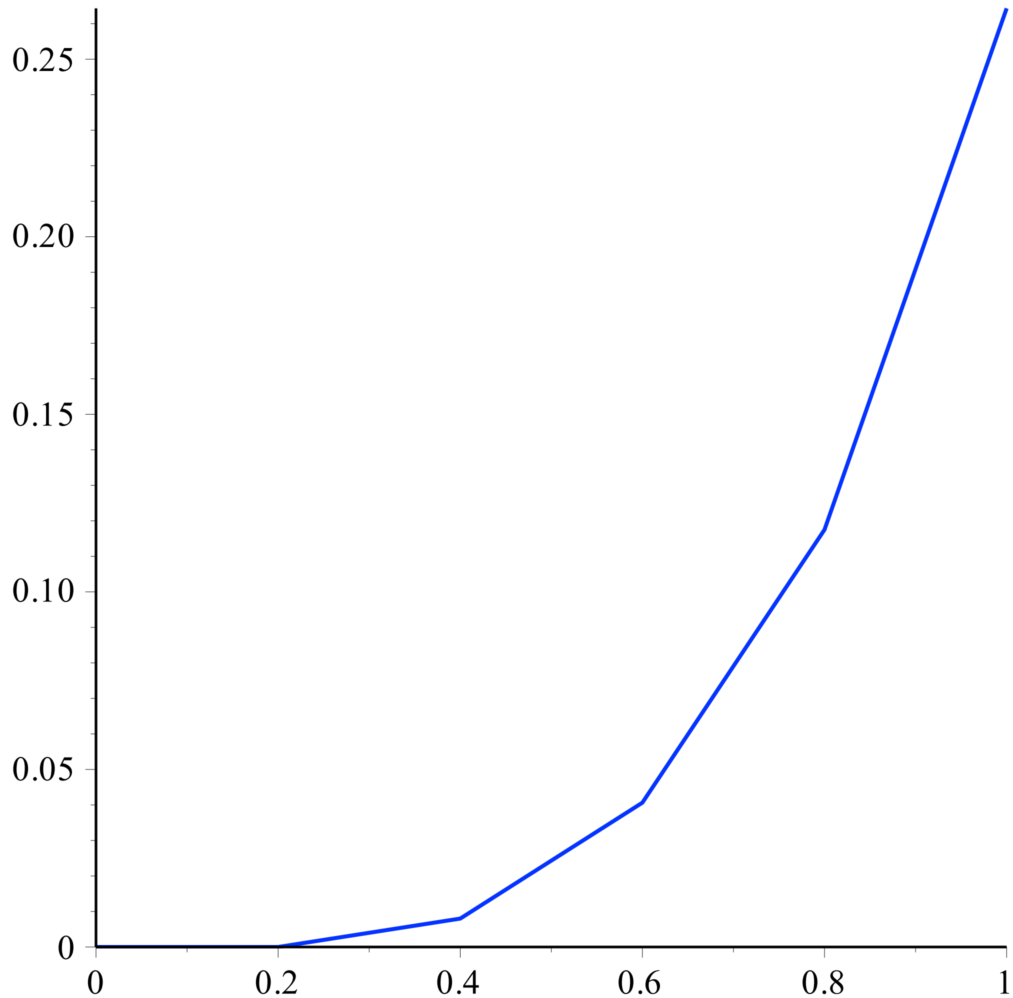
Eller hvis du vil ha linjestykker mellom punktene:

> $plot(points, color = blue)$



Et lite råd på slutten: Dersom man skal plott mange punkter, og ikke trenger å vite tallkoordinatene til punktene, kan man unngå utskriften etter **for** -løkken og listekonstruksjonen ved å avslutte disse kommandoene med kolon. Prøv for eksempel

> $x[0] := 0 :\ y[0] := 0 : h := 0.2 :$ **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $y[n] := y[n-1] + h\cdot\left(x[n-1]^2 + x[n-1]\cdot y[n-1]\right) :\ x[n] := x[n-1] + h$ **end do**: $\ points := \{seq([x[n], \mathrm{y[n]}], n = 0..5)\} :\ plot(points, color = blue)$


0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Ekstraoppgave 4.6.2

a)

Rungekuttametodene løser initialverdiproblemer på formen $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ der $F(x, y)$ står for et uttrykk i x og y.
De er iterative metoder, så **for** - løkker egner seg ypperlig i denne sammenhengen.
Vi må bare vite hva som utføres i løkken.

Iterasjonen er her $y_n = y_{n-1} + h\left(xx_{n-1}^2 + xx_{n-1}yy_{n-1}\right)$ der $xx_{n-1} = x_{n-1} + \frac{h}{2}$
og $yy_{n-1} = y_{n-1} + \frac{\left(x_{n-1}^2 + x_{n-1}y_{n-1}\right)\cdot h}{2}$ med $y_0 = 0$, $x_0 = 0$
Her har vi skrevet xx og yy istedenfor $hat\,x$ og $hat\,y$ Siden det ikke står noe multiplikasjonstegn mellom de to $x-$ ene eller y-ene, oppfatter Maple dem som nye navn.

(i)

Først setter vi startverdiene. Ikke heng dere opp i at Maple bare kvitterer for den siste kommandoen -- Maple har merket seg alle tre.

> $\mathrm{x}[0] := 0 :\ \mathrm{y}[0] := 0 :\ h := 0.2$

$$h := 0.2 \tag{5}$$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $xx[n-1] := x[n-1] + \frac{h}{2} :\ yy[n-1] := \frac{\left(x[n-1]^2 + x[n-1]\cdot y[n-1]\right)\cdot h}{2} :\ y[n] := y[n-1] + h\cdot\left(xx[n-1]^2 + xx[n-1]\cdot yy[n-1]\right) :\ x[n] := x[n-1] + h$ **end do**

$$xx_0 := 0.1000000000$$

$$yy_0 := 0.$$

$$y_1 := 0.002000000000$$

$$x_1 := 0.2$$

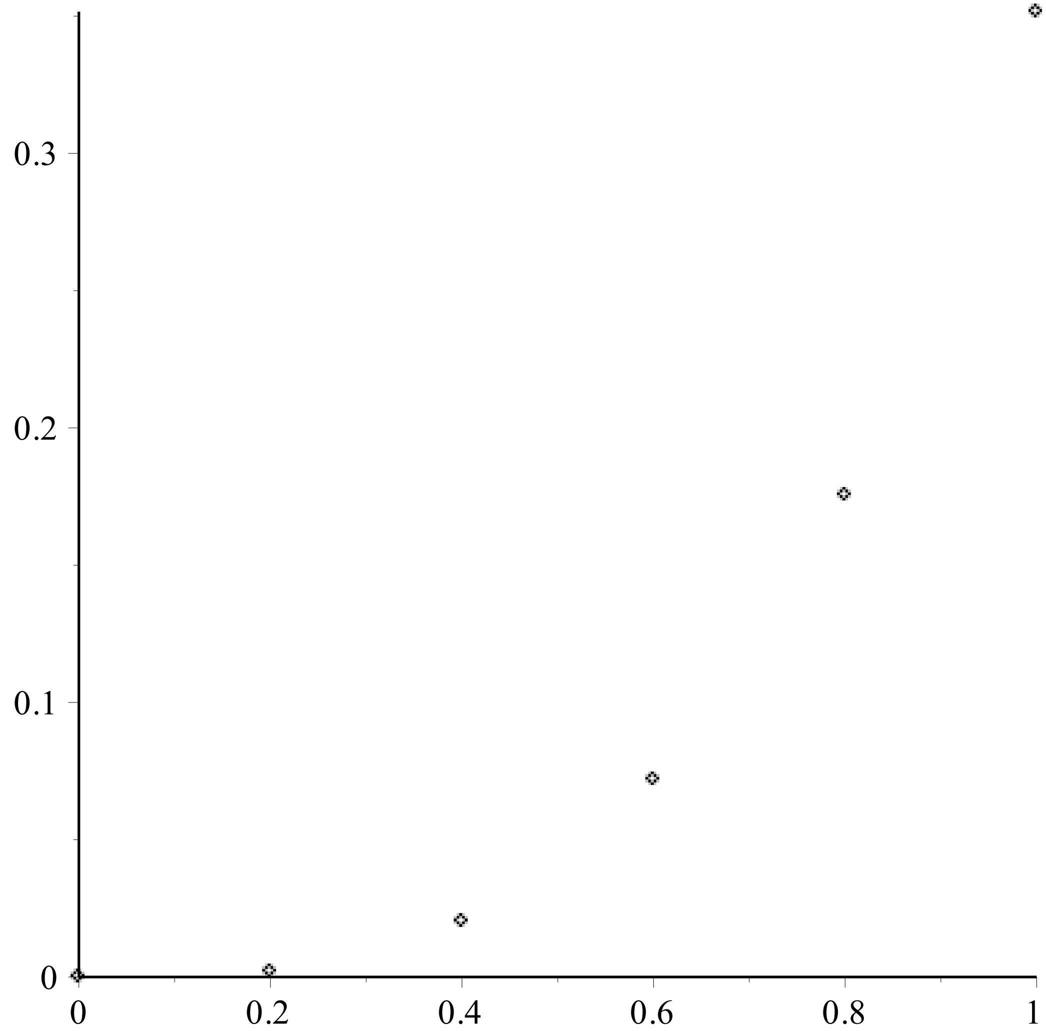
$$xx_1 := 0.3000000000$$

$$yy_1 := 0.004040000000$$
$$y_2 := 0.02024240000$$
$$x_2 := 0.4$$
$$xx_2 := 0.5000000000$$
$$yy_2 := 0.01680969600$$
$$y_3 := 0.07192336960$$
$$x_3 := 0.6$$
$$xx_3 := 0.7000000000$$
$$yy_3 := 0.04031540218$$
$$y_4 := 0.1755675259$$
$$x_4 := 0.8$$
$$xx_4 := 0.9000000000$$
$$yy_4 := 0.07804540205$$
$$y_5 := 0.3516156983$$
$$x_5 := 1.0 \quad \textbf{(6}$$

> points := $\{seq([x[n], y[n]], n = 0..5)\}$

$points := \{[0, 0], [0.2, 0.002000000000], [0.4, 0.02024240000], [0.6, 0.07192336960], [0.8, 0.1755675259], [1.0, 0.3516156983]\}$ **(7**

> *pointplot*(*points*)



Ekstraoppgave 4.6.3

a)

Iterasjonen er nå adskillig mer komplisert. Spesielt brukes funksjonsuttrykket $F(x, y) = x^2 + x \cdot y$ gjentatte ganger.
Det enkleste er derfor å definere denne funksjonen i Maple.
Men det er en funksjon som er avhengig av to variable. Definisjonen blir derfor

> $F := (x, y) \rightarrow x^2 + x \cdot y$

$$F := (x, y) \rightarrow x^2 + x\, y \quad (8$$

Når vi skriver inn all beregningen som skal foregå i **for**-løkken, må vi passe på rekkefølgen.
Uttrykket for y_n må komme etter at vi har gitt verdi til m_{n-1}.
Uttrykket for m_{n-1} må komme etter at vi har gitt verdier til $m1_{n-1}$, $m2_{n-1}$, $m3_{n-1}$ og $m4_{n-1}$.
Og disse siste 4 uttrykkene må komme akkurat i den rekkefølgen (fordi de avhenger av hverandre på den spesielle måten de gjør).

(i) Først setter vi startverdiene. Ikke heng dere opp i at Maple bare kvitterer for den siste kommandoen -- Maple har merket seg alle tre.

> x[0] := 0 : y[0] := 0 : h := 0.2;

$$h := 0.2 \quad (9$$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $\mathrm{m1}[n-1] := F(x[n-1], y[n-1]) : \quad \mathrm{m2}[n-1] := F\left(x[n-1] + \frac{h}{2}, y[n-1] + \frac{\mathrm{m1}[n-1] \cdot h}{2}\right) : \quad \mathrm{m3}[n-1] := F\left(x[n-1] + \frac{h}{2}, y[n-1] + \frac{\mathrm{m2}[n-1] \cdot h}{2}\right) : \quad \mathrm{m4}[n-1] := F(x[n-1] + h, y[n-1] + \mathrm{m3}[n-1] \cdot h) : \quad m[n-1] := \frac{(\mathrm{m1}[n-1] + 2 \cdot \mathrm{m2}[n-1] + 2 \cdot \mathrm{m3}[n-1] + \mathrm{m4}[n-1])}{6} : \quad y[n] := y[n-1] + m[n-1] \cdot h : \quad x[n] := x[n-1] + h$ **end do**

$$m1_0 := 0$$

$$m2_0 := 0.01000000000$$

$$m3_0 := 0.01010000000$$

$$m4_0 := 0.04040400000$$

$$m_0 := 0.01343400000$$

$$y_1 := 0.002686800000$$

$$x_1 := 0.2$$
$$m1_1 := 0.04053736000$$
$$m2_1 := 0.09202216080$$
$$m3_1 := 0.09356670482$$
$$m4_1 := 0.1685600564$$
$$m_1 := 0.09671252461$$
$$y_2 := 0.02202930492$$
$$x_2 := 0.4$$
$$m1_2 := 0.1688117220$$
$$m2_2 := 0.2694552386$$
$$m3_2 := 0.2744874144$$
$$m4_2 := 0.4061560727$$
$$m_2 := 0.2771421835$$
$$y_3 := 0.07745774162$$
$$x_3 := 0.6$$
$$m1_3 := 0.4064746450$$
$$m2_3 := 0.5726736443$$
$$m3_3 := 0.5843075743$$
$$m4_3 := 0.7954554052$$
$$m_3 := 0.5859820813$$
$$y_4 := 0.1946541579$$
$$x_4 := 0.8$$
$$m1_4 := 0.7957233263$$

$$m2_4 := 1.056803842$$

$$m3_4 := 1.080301088$$

$$m4_4 := 1.410714376$$

$$m_4 := 1.080107927$$

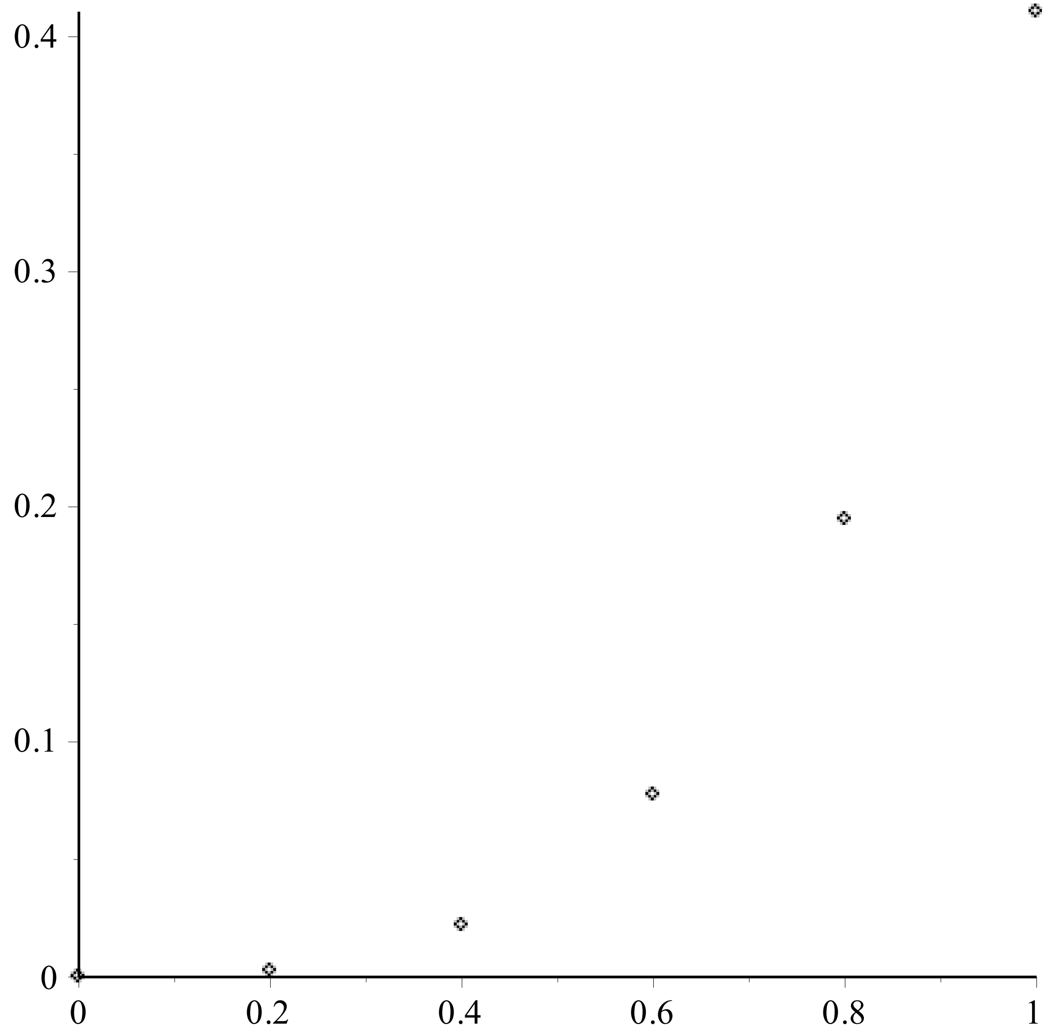
$$y_5 := 0.4106757433$$

$$x_5 := 1.0 \quad (10$$

> $points := \{seq([x[n], \mathrm{y}[\mathrm{n}]], n = 0..5)\}$

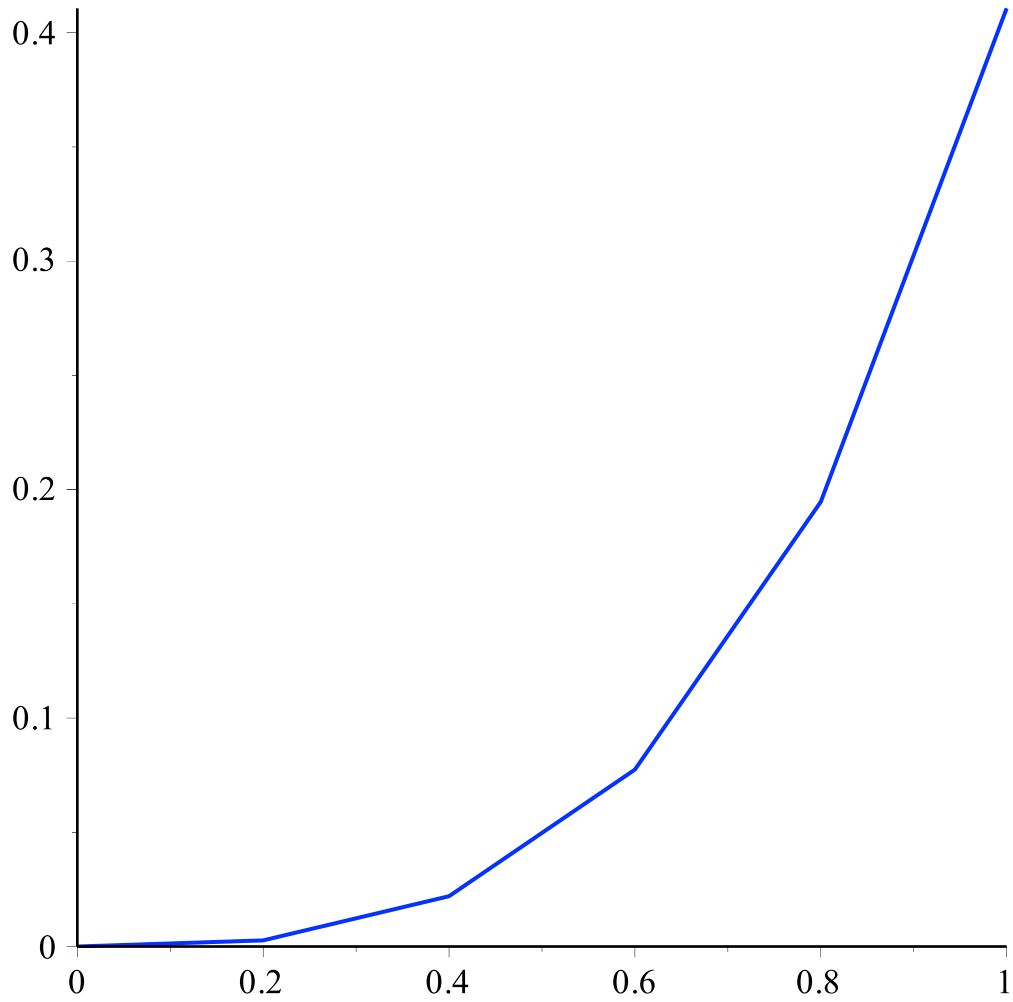
$points := \{[0, 0], [0.2, 0.002686800000], [0.4, 0.02202930492], [0.6, 0.07745774162], [0.8, 0.1946541579], [1.0, 0.4106757433]\}$ (11

> $pointplot(points)$



eller hvis du heller vil ha linjestykkene mellom punktene:

> $plot(points, color = blue)$



Ekstraoppgave 4.6.4.

a)

Ved diskretisering på intervallet $[a, b]$ med skrittlengde h skriver vi om differensiallikningen til en differenslikning.
Det gjør vi ved å sette

$x_n = a + nh,\ \ y(x_n) \approx y_n,\ \ y'(x_n) \approx \dfrac{(y_{n+1} - y_n)}{h}$ og

$$y''(x_n) \approx \frac{(y'(x_{n+1}) - y'(x_n))}{h} \approx \frac{\left(\dfrac{(y_{n+2} - y_{n+1})}{h} - \dfrac{(y_{n+1} - y_n)}{h}\right)}{h} = \frac{(y_{n+2} - 2\,y_{n+1} + y_n)}{h^2}$$

inn i differensiallikningen.

$y' + x^2 \cdot y = 4$ omformes da til $y_{n+1} - y_n + h \cdot x_n^2 \cdot y_n = 4\,h$ slik at $y_{n+1} = y_n - h \cdot x_n^2 \cdot y_n + 4\,h$
Initialbetingelsen $y(0) = 0$ omformes til $y_0 = 0$. Dessuten skal $h = 0.1$ ifølge oppgaven. Vi trenger derfor 20 trinn for å komme til $x = 2$.

```
> h := 0.1 : x[0] := 0 : y[0] := 0
```

$$y_0 := 0 \qquad (12$$

```
> for n from 0 by 1 to 19 do y[n + 1] := y[n] − h·x[n]^2·y[n] + 4·h : x[n + 1] := x[n] + h end do
```

$$y_1 := 0.4$$
$$x_1 := 0.1$$
$$y_2 := 0.7996$$
$$x_2 := 0.2$$
$$y_3 := 1.1964016$$
$$x_3 := 0.3$$
$$y_4 := 1.585633986$$
$$x_4 := 0.4$$
$$y_5 := 1.960263842$$

$$x_5 := 0.5$$

$$y_6 := 2.311257246$$

$$x_6 := 0.6$$

$$y_7 := 2.628051985$$

$$x_7 := 0.7$$

$$y_8 := 2.899277438$$

$$x_8 := 0.8$$

$$y_9 := 3.113723682$$

$$x_9 := 0.9$$

$$y_{10} := 3.261512064$$

$$x_{10} := 1.0$$

$$y_{11} := 3.335360858$$

$$x_{11} := 1.1$$

$$y_{12} := 3.331782194$$

$$x_{12} := 1.2$$

$$y_{13} := 3.252005558$$

$$x_{13} := 1.3$$

$$y_{14} := 3.102416619$$

$$x_{14} := 1.4$$

$$y_{15} := 2.894342962$$

$$x_{15} := 1.5$$

$$y_{16} := 2.643115796$$

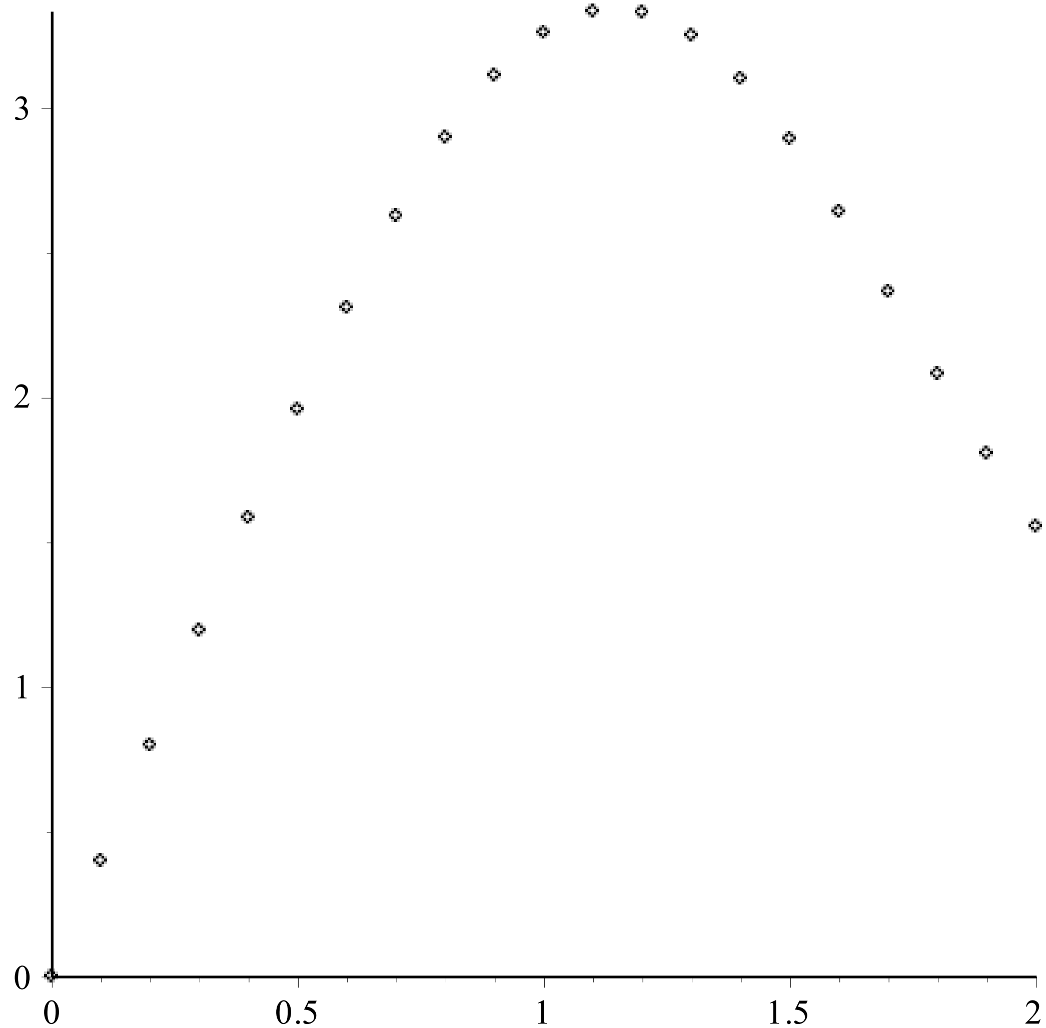
$$x_{16} := 1.6$$

$$y_{17} := 2.366478152$$
$$x_{17} := 1.7$$
$$y_{18} := 2.082565966$$
$$x_{18} := 1.8$$
$$y_{19} := 1.807814593$$
$$x_{19} := 1.9$$
$$y_{20} := 1.555193525$$
$$x_{20} := 2.0 \quad (13$$

> $points := \{seq([x[n], \mathrm{y}[\mathrm{n}]], n = 0..20)\}$

$points := \{[0, 0], [0.1, 0.4], [0.2, 0.7996], [0.3, 1.1964016], [0.4, 1.585633986], [0.5, 1.960263842], [0.6, 2.311257246], [0.7, 2.628051985], [0.8, 2.899277438], [0.9, 3.113723682], [1.0, 3.261512064], [1.1, 3.335360858], [1.2, 3.331782194], [1.3, 3.252005558], [1.4, 3.102416619], [1.5, 2.894342962], [1.6, 2.643115796], [1.7, 2.366478152], [1.8, 2.082565966], [1.9, 1.807814593], [2.0, 1.555193525]\}$ (14

> $pointplot(points)$



3
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2