Oppgave 7.6.14.

a)

Det er ikke godt å vite hvor mange av de første leddene som blir null, så jeg starter med å tenke $y(x)$ som en delsum av en ukjent potensrekke. Spesielt skal Maple forstå at $y(x)$ er en funksjon, så jeg definerer $y(x)$ som en funksjon:

> $y := x \rightarrow \mathrm{a}[0] + \mathrm{a}[1]\cdot x + \mathrm{a}[2]\cdot x^2 + \mathrm{a}[3]\cdot x^3 + a[4]\cdot x^4 + \mathrm{a}[5]\cdot x^5 + \mathrm{a}[6]\cdot x^6 + \mathrm{a}[7]\cdot x^7 + \mathrm{a}[8]\cdot x^8 + \mathrm{a}[9]\cdot x^9 + \mathrm{a}[10]\cdot x^{10}$

$$y := x \rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9 + a_{10} x^{10} \quad (1$$

Uttryket på venstre side av differensiallikningen er derved

> $\mathit{diff}(y(x), x, x) + x\cdot \mathit{diff}(y(x), x) + x^2\cdot y(x)$

$$90 x^8 a_{10} + 72 x^7 a_9 + 56 x^6 a_8 + 42 x^5 a_7 + 30 x^4 a_6 + 20 x^3 a_5 + 12 x^2 a_4 + 6 x a_3 + 2 a_2 + x \left(10 x^9 a_{10} + 9 x^8 a_9 + 8 x^7 a_8 + 7 x^6 a_7 + 6 x^5 a_6 + 5 x^4 a_5 + 4 x^3 a_4 + 3 x^2 a_3 + 2 x a_2 + a_1\right) + x^2 \left(x^{10} a_{10} + x^9 a_9 + x^8 a_8 + x^7 a_7 + x^6 a_6 + x^5 a_5 + x^4 a_4 + x^3 a_3 + x^2 a_2 + x a_1 + a_0\right) \quad (2$$

Dette er et polynom av grad 10. Vi vil gjerne ha leddene sortert etter grad.
Det gjør vi enklest ved å "utvikle polynomet i en potensrekke om origo", enten ved å bruke kommandoen *taylor*, eller like gjerne kommandoen *series* :

> $\mathit{series}(\%, x = 0, 12)$

$$2 a_2 + (6 a_3 + a_1) x + (12 a_4 + 2 a_2 + a_0) x^2 + (20 a_5 + 3 a_3 + a_1) x^3 + (30 a_6 + 4 a_4 + a_2) x^4 + (42 a_7 + 5 a_5 + a_3) x^5 + (56 a_8 + 6 a_6 + a_4) x^6 + (72 a_9 + 7 a_7 + a_5) x^7 + (90 a_{10} + 8 a_8 + a_6) x^8 + (9 a_9 + a_7) x^9 + (10 a_{10} + a_8) x^{10} + a_9 x^{11} + \mathrm{O}(x^{12}) \quad (3$$

Dette skal sammenlignes ledd for ledd med rekkeutviklingen av $f(x)$ om origo

> $series\left(\frac{(1-x)}{1+x^2}, x=0, 12\right)$

$$1-x-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+x^8-x^9-x^{10}+x^{11}+O(x^{12}) \quad (4$$

Så er det selve sammenligningen. Vi starter med leddet av grad null, og jobber oss oppover til vi har nok:

x^0 : $\quad 2\,a_2 = 1 \quad$ gir at $\quad a_2 = \frac{1}{2}$

x^1 : $\quad 6\,a_3 + a_1 = -1 \quad$ gir at $\quad a_3 = -\frac{1}{6} - \frac{a(1)}{6}$,

x^2 : $\quad 12\,a_4 + a_0 + 2\,a_2 = 12\,a_4 + a_0 + 1 = -1 \quad$ gir at $\quad a_4 = -\frac{(2+a_0)}{12}$

x^3 : $\quad 20\,a_5 + a_1 + 3\,a_3 = 20\,a_5 + a_1 + 3\left(-\frac{1}{6} - \frac{a_1}{6}\right) = 1 \quad$ gir at $\quad a_5 = \frac{\left(1 - a_1 + \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2}\right)}{20} = \frac{(3-a_1)}{40}$

Derved har vi det vi trenger. a_0 og a_1 er vilkårlige konstanter, la oss kalle dem C og D. Da har vi at de fem første leddene av den generelle løsningen er

$$y(x) = C + \mathrm{D}\,x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{(1+\mathrm{D})}{6}\,x^3 - \frac{(2+C)}{12}x^4 + \frac{(3-\mathrm{D})}{40}\,x^5 = C\left(1 - \frac{x^4}{12}\right) + \mathrm{D}\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}\right) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{3\,x^5}{40}.$$