Oppgave 6.2.15

a)
Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (2\,x)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4\,x^2}\, dx$$

Buelengden er derfor

> $int\left(\mathrm{sqrt}\left(1 + 4 \cdot x^2\right), x = 0\,..2\right)$

$$\sqrt{17} - \frac{1}{4}\ln\left(-4 + \sqrt{17}\right) \qquad (1$$

eller hvis du heller vil ha det på desimalform

> $evalf(\%)$

$$4.646783762 \qquad (2$$

Oppgave 6.2.16

b)
Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$$

(i) Rotasjon om x-aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\mathrm{Pi}} 2\,\pi\, 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\, ds = 4\pi \int_{x=0}^{x=\mathrm{Pi}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$

> $int\left(4\cdot \mathrm{Pi}\cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0\,..\mathrm{Pi}\right)$

$$4\,\pi\sqrt{2} + 4\,\pi\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \qquad (3$$

> $simplify(\%)$

$$4\,\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) \qquad (4$$

> $evalf(\%)$

$$28.84719890 \qquad (5$$

(ii) Rotasjon om $y -$ aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\mathrm{Pi}} 2\,\pi\, x\, ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\mathrm{Pi}} x \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$

> $int\left(2\cdot \mathrm{Pi}\cdot x\cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0\,..\mathrm{Pi}\right)$

$$\int_0^{\pi} 2\,\pi\, x\sqrt{1 + \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (6$$

Ojsann. Dette betyr at Maple ikke klarer å beregne integralet eksakt. Men vi fortsetter trøstig ivei:

> $evalf(\%)$

$$35.10981336 \qquad (7$$

(iii) Rotasjon om aksen $x = 2$:

Radien i rotasjonen ved x er $2 - x$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\mathrm{Pi}} 2\,\pi\,|2-x|\,ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\mathrm{Pi}} (2-x)\sqrt{1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\,dx$ der vi må huske at

$|x-2| = x-2$ for $x \geq 2$ og $|x-2| = 2-x$ for $x \leq 2$. Dette gjør at vi må dele integralet i to deler:

> $int\left(2\cdot\mathrm{Pi}\cdot(2-x)\cdot\mathrm{sqrt}\left(1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x=0..2\right) + int\left(2\cdot\mathrm{Pi}\cdot(x-2)\cdot\mathrm{sqrt}\left(1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x=2..\mathrm{Pi}\right)$

$$\int_0^2 2\,\pi\,(2-x)\sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)^2}\,dx + \int_2^{\pi} 2\,\pi\,(x-2)\sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)^2}\,dx \qquad (8$$

> $evalf(\%)$

$$21.29156748 \qquad (9$$

c)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\,dx$$

(i) Rotasjon om x-aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 3\cdot|\ln x| = 3\ln x$ for $\sqrt{7} \leq x \leq 4$. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\,\pi\,3\ln x\,ds = 6\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} \ln x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\,dx$$

> $int\left(6 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + \frac{9}{x^2}\right), x = \mathrm{sqrt}\{7\} .. 4.0\right)$

$$\int_{\mathrm{sqrt}\ \{7\}}^{4.0} 6\,\pi\,\ln(x)\,\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

> $simplify(\%)$

$$18.84955592 \left(\int_{\mathrm{sqrt}\ \{7\}}^{4.0} \ln(x)\,\sqrt{\frac{x^2 + 9}{x^2}}\,\mathrm{d}x\right) \tag{11}$$

> $evalf(\%)$

Nei, dette gikk ikke. Maple klarte ikke integralet. Da får vi be Maple om å beregne det numerisk ved å skrive $\sqrt{7}$ som et desimaltall:

$$18.84955592 \left(\int_{\mathrm{sqrt}\ \{7.\}}^{4.0} \ln(x)\,\sqrt{\frac{x^2 + 9.}{x^2}}\,\mathrm{d}x\right) \tag{12}$$

> $int\left(6 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + \frac{9}{x^2}\right), x = 2.645751311 .. 4.0\right)$

$$41.16745980 \tag{13}$$

(ii) Rotasjon om $y -$ aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\,\pi\,x\,ds = 2\pi \int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} x\,\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\,dx$

> $int\left(2\cdot\text{Pi}\cdot x\cdot\text{sqrt}\left(1+\frac{9}{x^2}\right), x=\text{sqrt}\{7\}..4\right)$

Warning, unable to determine if 0 is between sqrt*{7} and 4; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$\int_{\text{sqrt }\{7\}}^{4} 2\,\pi\,x\,\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

Hmmm. Skriv heller $\sqrt{7}$ som desimaltall, så går det bedre:

> $int\left(2\cdot\text{Pi}\cdot x\cdot\text{sqrt}\left(1+\frac{9}{x^2}\right), x=evalf(\text{sqrt}(7))..4\right)$

$$38.15846359 \tag{15}$$

(iii) Rotasjon om aksen $x=2$:

Radien i rotasjonen ved x er $|x-2|=x-2$ fordi $x\geq 2$ på integrasjonsintervallet. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\,\pi\,|2-x|\,ds = 2\pi$ $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} (x-2)\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\,dx$

> $int\left(2\cdot\text{Pi}\cdot(x-2)\cdot\text{sqrt}\left(1+\frac{9}{x^2}\right), x=\text{sqrt}(7)..4\right)$

$$-4\,\pi\sqrt{7}+18\,\pi\ln(3)-9\,\pi\ln\left(\sqrt{7}+4\right)+16\,\pi-12\,\pi\,\text{arctanh}\left(\frac{3}{4}\right)+12\,\pi\,\text{arctanh}\left(\frac{3}{5}\right) \tag{16}$$

> $simplify(\%)$

$$\pi\left(12\,\text{arctanh}\left(\frac{3}{5}\right)-4\sqrt{7}-9\ln\left(\sqrt{7}+4\right)-12\,\text{arctanh}\left(\frac{3}{4}\right)+18\ln(3)+16\right) \tag{17}$$

> $evalf(\%)$

(18

15.04358394

(18