Oppgave 5.4.13

a)

(i)

Dette integralet er egentlig uegentlig. Men siden vi vet at $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, går det bra å bruke trapesmetoden, når vi bare velger god nok presisjon under beregningen av $f(x)$ for x nær 0.

Vi skal dele intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i 8 deler. Derved er bredden av hvert delintervall $\frac{\pi}{16}$.
Her kan vi bruke en **for**-løkke, og addere leddene etterhvert.
Se nøye på konstruksjonen nedenfor, slik at du er sikker på at det blir rett.
Vi starter med å sette J lik funksjonsverdien i $x = 0$. Deretter summerer vi $2 \cdot f(x_n)$ i alle delepunktene, opp til, men naturligvis ikke med

$x_8 = b = \frac{\pi}{2}$.

Deretter adderer vi funksjonsverdien i $b = \frac{\pi}{2}$, for så til slutt å gange med $\Delta x = \frac{\pi}{16}$ og dividere med 2.

> $x := 0 : \; d := evalf\left(\frac{\pi}{16}, 20\right) : \; J := 1$

$$J := 1 \tag{1}$$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 7 **do** $x := x + d : \; J := evalf\left(J + \frac{2\cdot\sin(x)}{x}, 20\right)$ **end do**

$$x := 0.1963495408$$
$$J := 2.9871737022948481367$$
$$x := 0.3926990816$$
$$J := 4.9361644191291629626$$
$$x := 0.5890486224$$
$$J := 6.8224950606740875659$$
$$x := 0.7853981632$$

$$J := 8.6231276930854450711$$
$$x := 0.9817477040$$
$$J := 10.316983678238683042$$
$$x := 1.178097245$$
$$J := 11.885410285457314043$$
$$x := 1.374446786$$
$$J := 13.312581261306001622 \quad (2$$

> $J := \mathit{evalf}\left(\dfrac{\left(J + \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{16}\right)}{2}, 20\right)$

$$J := 1.3694596090886274467 \quad (3$$

som altså er verdien vi finner for integralet.

Som kontroll kan vi be Maple beregne integralet, men da må vi først bruke *unassign* på x:

> *unassign*('x')

> $\mathit{int}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}, x = 0\,..\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\mathrm{Si}\left(\frac{1}{2}\pi\right) \quad (4$$

$\mathrm{Si}(x)$, som altså er definert ved $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ er en av mange spesielle funksjoner som Maple har i bakhånd. Men det behøver vi egentlig ikke vite for å finne verdien av integralet. Det er nok at Maple vet hva det betyr. Vi trenger bare gjøre slik:

> *evalf*(%, 20)

$$1.3707621681544884800 \quad (5$$

Man må vel kunne si at svaret vi fikk ved trapesmetoden ble ganske bra, til tross for at vi bare hadde 8 delintervall.

(ii)

For å anslå nøyaktigheten ved hjelp av teorem 5.4.6, trenger vi å kjenne $f''(x)$:

> $diff\left(\frac{\sin(x)}{x}, x, x\right)$

$$-\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2\cos(x)}{x^2} + \frac{2\sin(x)}{x^3} \quad (6$$

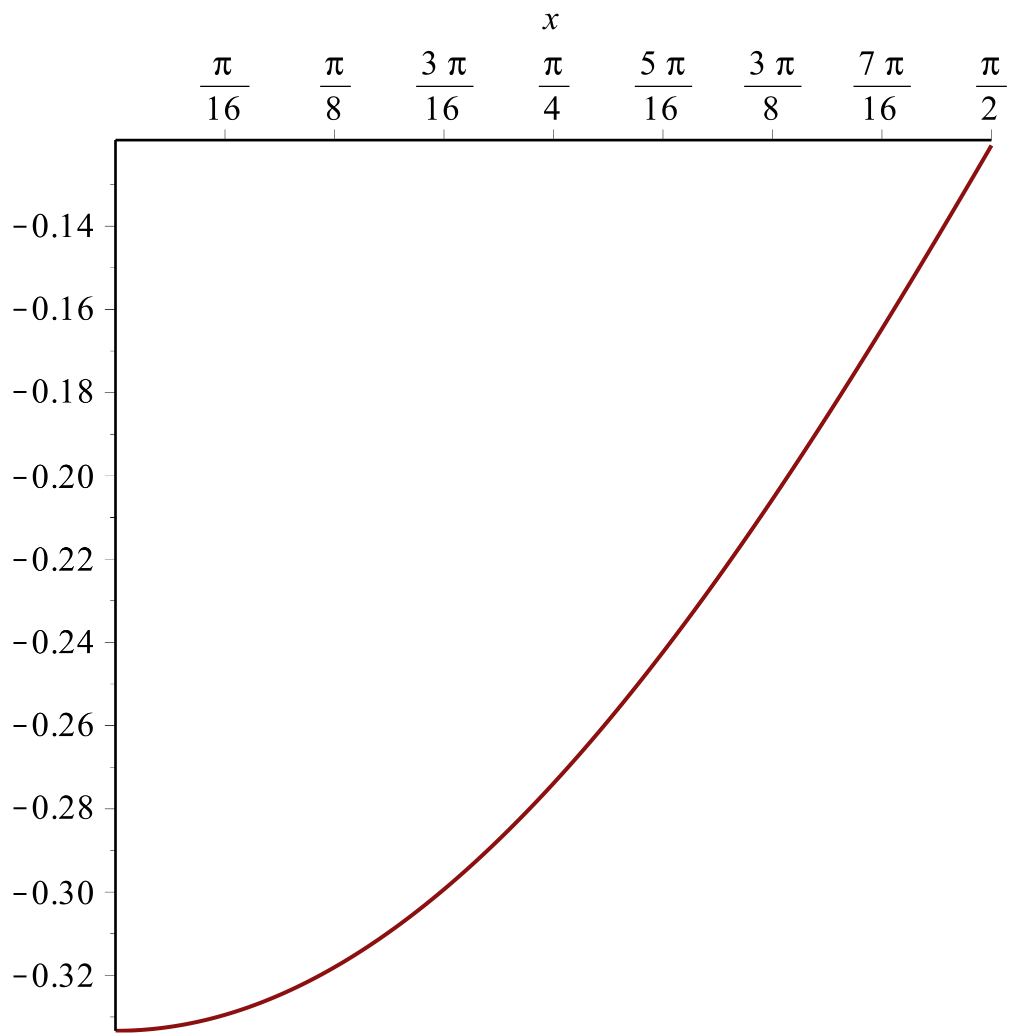
> $simplify(\%)$

$$\frac{-\sin(x)\,x^2 - 2\cos(x)\,x + 2\sin(x)}{x^3} \quad (7$$

Det er ikke så lett å anslå maksimalverdien for absoluttverdien av dette uttrykket for x i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Kanskje grafen til $f''(x)$ kan være til hjelp:

> $plot\left(-\frac{\sin(x)\,x^2 + 2\cos(x)\,x - 2\sin(x)}{x^3}, x = 0..\frac{\text{Pi}}{2}\right)$



Aha! $|f''(x)| \leq 0.34$, så $\left| T_8 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right| \leq 0.34 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \cdot 8^2}$ som er lik

> $evalf\left(\frac{0.34\cdot\left(\frac{Pi}{2}\right)^3}{12\cdot(8^2)}\right)$

$$0.001715842135 \qquad (8$$

Derved ligger verdien av integralet i intervallet fra

> $1.3694596090886274467 - 0.001715842135$

$$1.367743767 \qquad (9$$

til

> $1.3694596090886274467 + 0.001715842135$

$$1.371175451 \qquad (10$$

Nå er det naturligvis ikke nødvendig å ta med så mange desimaler i disse intervallgrensene, men vi skriver svaret som $[1.367,\ 1.372]$ for å være på den sikre siden.

Oppgave 5.4.14

a)

(i)

Her skal vi beregne det samme integralet, men nå med Simpsons metode.
Ideen bak kommandoene vi gir Maple, er på sett og vis de samme, men nå tar vi med to ledd i summen i hvert trinn i **for**-løkken, ett med $4\cdot f(x)$ og ett med $2\cdot f(x)$.
Deretter må vi legge til de to siste leddene i summen som er ett med $4\cdot f(x)$ og ett med bare $f(x)$.
(Dette kan naturligvis også organiseres på andre måter, men vi tar det slik nå.)

> $x := 0 :\ \ d := evalf\left(\frac{\pi}{16}, 20\right) :\ \ J := 1$

$$J := 1 \quad (11$$

> **for** n **from** 1 **to** 3 **do** $x := x + d :\ J := evalf\left(J + 4 \cdot \frac{\sin(x)}{x}, 20\right) :\ x := x + d :\ J := evalf\left(J + \frac{2 \cdot \sin(x)}{x}, 20\right)$ **end do**

$$x := 0.1963495408$$
$$J := 4.9743474045896962733$$
$$x := 0.3926990816$$
$$J := 6.9233381214240110992$$
$$x := 0.5890486224$$
$$J := 10.695999404513860306$$
$$x := 0.7853981632$$
$$J := 12.496632036925217811$$
$$x := 0.9817477040$$
$$J := 15.884344007231693752$$
$$x := 1.178097245$$
$$J := 17.452770614450324753 \quad (12$$

> $J := evalf\left(J + \frac{4 \cdot \sin(x + d)}{x + d}, 20\right)$

$$J := 20.307112566375006012 \quad (13$$

> $J := evalf\left(J + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}, 20\right)$

$$J := 20.943732338742587355 \quad (14$$

> $J := evalf\left(\frac{J \cdot d}{3}, 20\right)$

$$J := 1.3707640761280144045 \quad (15$$

Dette svaret ble adskillig bedre enn det vi fikk ved trapesmetoden.

> $unassign('x')$

(ii)

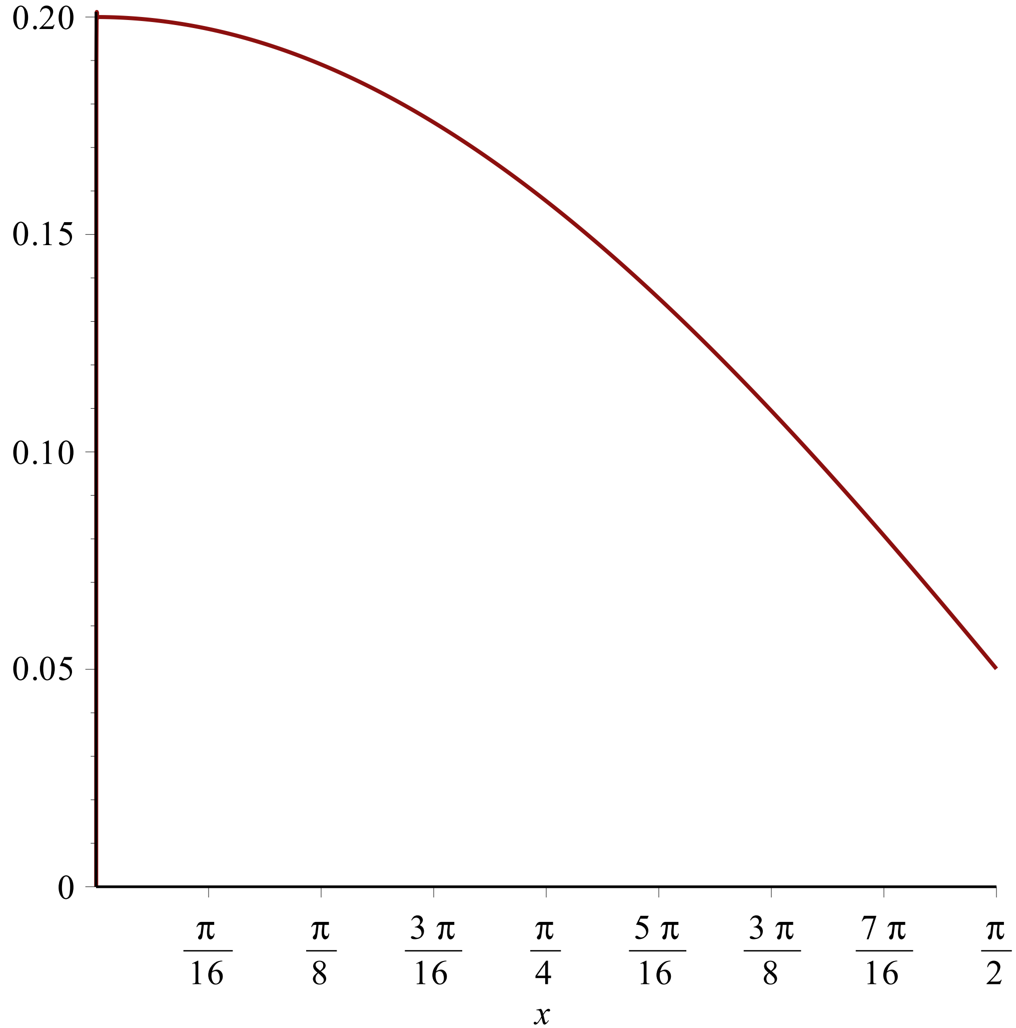
Den fjerdederiverte til integranden er

> $diff\left(\frac{\sin(x)}{x}, x\$4\right)$

$$\frac{\sin(x)}{x} + \frac{4\cos(x)}{x^2} - \frac{12\sin(x)}{x^3} - \frac{24\cos(x)}{x^4} + \frac{24\sin(x)}{x^5} \qquad (16$$

For å se hvor stor den kan bli, plotter vi den på intervallet

> $plot\left(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{4\cos(x)}{x^2} - \frac{12\sin(x)}{x^3} - \frac{24\cos(x)}{x^4} + \frac{24\sin(x)}{x^5},\ x = 0\,..\,\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$



Altså setter vi $K4 = 0.2$, slik at feilskranken i teorem 5.4.6 blir

> $evalf\left(\frac{0.2 \cdot \left(\frac{Pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (8^4)}\right)$

(17

$$0.000002594161013 \quad (17)$$

> $1.37076407612801440 45 - 0.000002594161013$

$$1.370761482 \quad (18)$$

> $1.3707640761280144045 + 0.000002594161013$

$$1.370766670 \quad (19)$$

Intervallet er derfor $[1.37076148,\ 1.37076667]$

Oppgave 5.4.15

a)

(i)

> $taylor\left(\sin\left(x^2\right), x = 0, 12\right)$

$$x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{10} + O\left(x^{14}\right) \quad (20)$$

> $int\left(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{10}, x = 0 ..\mathrm{sqrt}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\frac{1}{12}\sqrt{2}\,\pi^{3/2} - \frac{1}{672}\sqrt{2}\,\pi^{7/2} + \frac{1}{84480}\sqrt{2}\,\pi^{11/2} \quad (21)$$

> $evalf(\%, 20)$

$$0.54965717597437904286 \quad (22)$$

(ii)

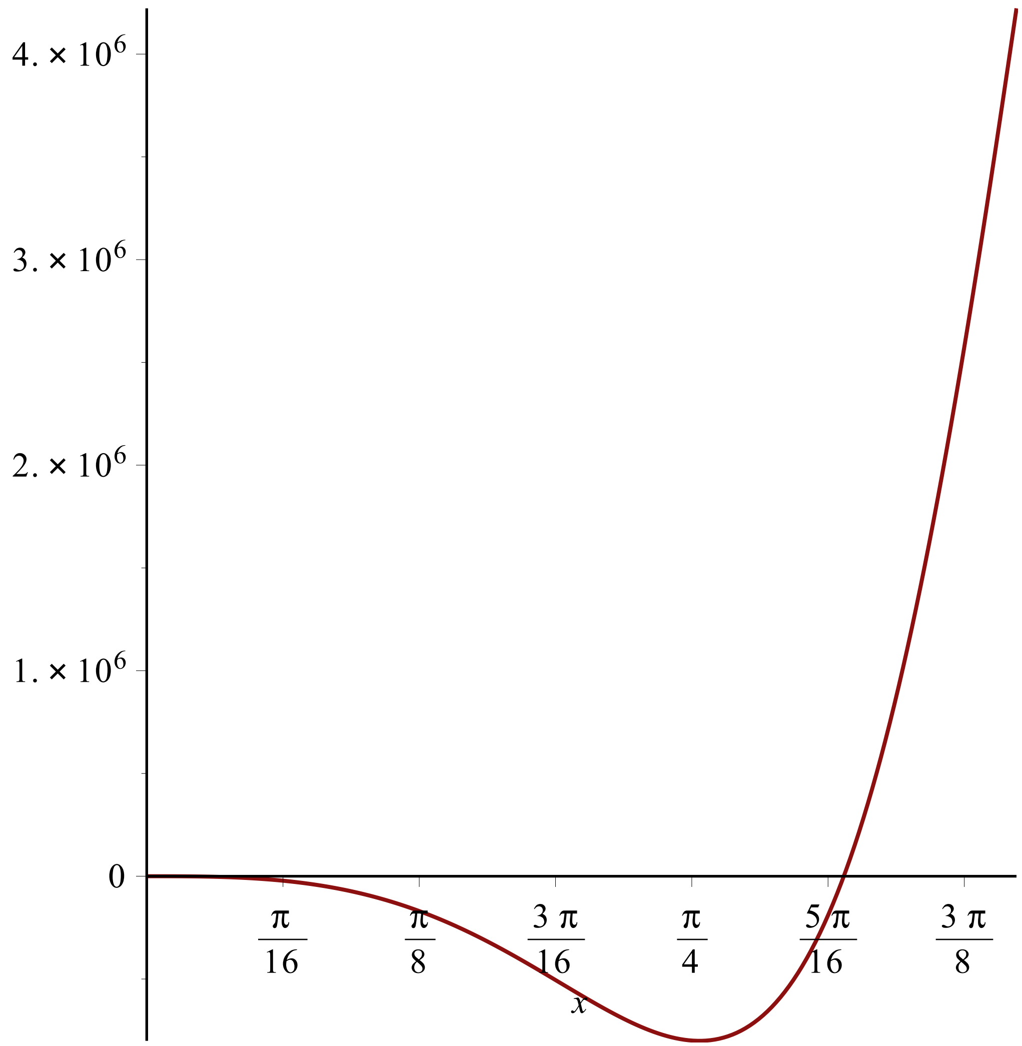
Restleddet har formen $R(x) = \frac{f^{(11)}(c)}{11!} \cdot x^{11}$ for en c mellom 0 og x.

Vi trenger derfor å beregne $f^{(1\,1)}(x)$ og se hvor stor den kan bli i tallverdi for $0 \leq x \leq \frac{\mathrm{Pi}}{2}$.

> $\mathit{diff}(\sin(x^2), x\$11)$

$$-2048\cos(x^2)\,x^{11} - 56320\sin(x^2)\,x^9 + 506880\cos(x^2)\,x^7 + 1774080\sin(x^2)\,x^5 - 2217600\cos(x^2)\,x^3 - 665280\sin(x^2)\,x \qquad \textbf{(23}$$

> $\mathit{plot}\left(\mathit{diff}(\sin(x^2), x\$11), x = 0..\mathrm{sqrt}\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)\right)$



Det er klart at denne deriverte er størst i tallverdi for $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, altså

> $subs\left(x = \mathrm{sqrt}\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right), -2048\cos\left(x^2\right)x^{11} - 56320\sin\left(x^2\right)x^9 + 506880\cos\left(x^2\right)x^7 + 1774080\sin\left(x^2\right)x^5 - 2217600\cos\left(x^2\right)x^3\right.$

$$- 665280 \sin\left(x^2\right) x\Big)$$

$$-32 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sqrt{2}\,\pi^{11/2} - 1760 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sqrt{2}\,\pi^{9/2} + 31680 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sqrt{2}\,\pi^{7/2} + 221760 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sqrt{2}\,\pi^{5/2} - 554400 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sqrt{2}\,\pi^{3/2} - 332640 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\sqrt{2}\sqrt{\pi} \quad (24)$$

> $evalf(\%, 20)$

$$4.2226746938695298662\ 10^6 \quad (25)$$

Restleddet er derfor begrenset av $C\,x^{11}$ der C er gitt ved

> $\dfrac{4.2226746938695298662 \cdot 10^6}{11!}$

$$0.1057869041 \quad (26)$$

slik at feilen i integralet er begrenset av

> $int\left(0.1057869041 \cdot x^{11}, x = 0 ..\mathrm{sqrt}\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)\right)$

$$0.1324249823 \quad (27)$$

Integralets verdi er derfor inneholdt i intervallet med grenser

> $0.54965717597437904286 - 0.1324249823$

$$0.4172321937 \quad (28)$$

> $0.54965717597437904286 + 0.1324249823$

$$0.6820821583 \quad (29)$$

Altså i intervallet $[0.4172,\ 0.6821]$.

>

>