

Oppgave 11.5.13.

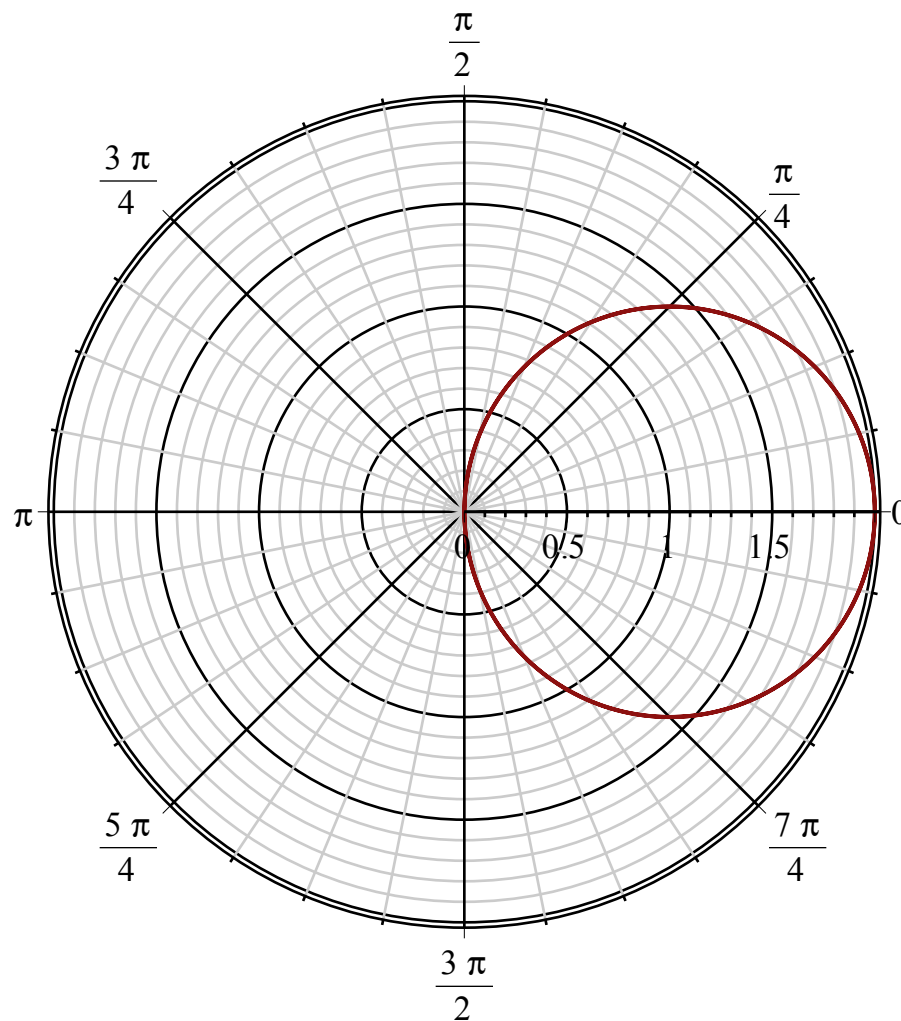
a)

Vi tegner først integrasjonsområdet.

For kurver som er gitt ved $r = g(\theta)$ kan vi bruke kommandoen *polarplot* (som krever at vi henter inn Maples plottekommandoer):

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
> polarplot(2*cos(theta), theta = 0 .. 2*Pi)
```

(1



OBS! Origo er i midten av nettet, men tallene langs ytterkanten er verdiene av θ . (Nullen ytterst til høyre betyr altså at $\theta = 0$, slik at det markerer punktet $(2, 0)$ i polarkoordinater.

Ved nærmere undersøkelse, ser vi at vi bare trenger å la θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$ for at denne sirkelen skal bli beskrevet én gang. ($\cos(\theta) \geq 0$ for disse verdiene av θ .)

Det er viktig å vite når vi skal integrere!!! (Test gjerne hvordan plottet blir for ulike θ -intervaller.)

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den når sirkelen $r = 2 \cos \theta$.

For å få med alle sektorene, lar vi θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.

Når vi skriver opp det itererte integralet, må vi huske at $dA = r \, dr \, d\theta$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet
$$\int_{\theta = -\frac{\pi}{2}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2 \cos \theta} f(r, \theta) \cdot r \cdot dr \, d\theta.$$

Når vi så skriver opp integralet til Maple, kan vi glemme hvor det kommer fra.

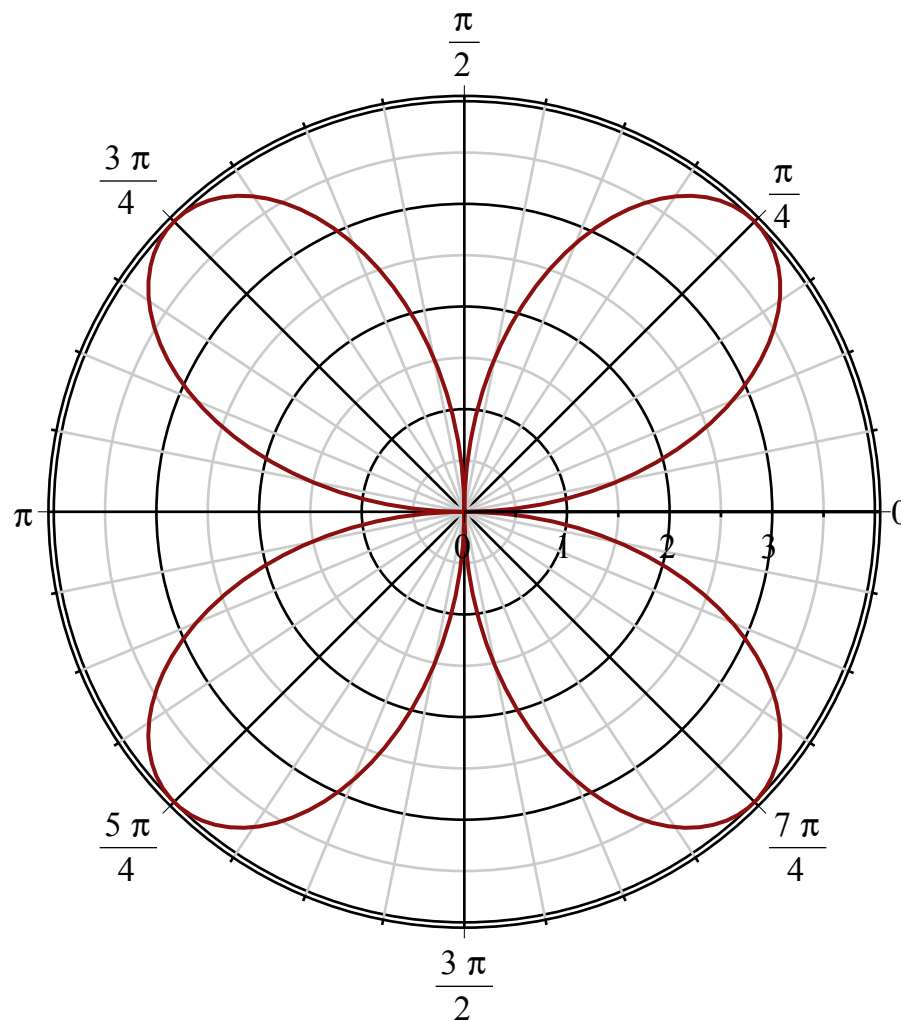
$$> \text{int}\left(\text{int}\left(r^2 \cdot \sin(\theta)^2 \cdot r, r = 0 \dots 2 \cdot \cos(\theta)\right), \theta = -\frac{\text{Pi}}{2} \dots \frac{\text{Pi}}{2}\right)$$
$$\frac{1}{4} \pi$$

(2

c)

Også her er området begrenset av en kurve gitt ved en likning på formen $r = g(\theta)$:

$$> \text{polarplot}(4 \cdot \sin(2 \cdot \theta), \theta = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi})$$



OBS! Kurven gjennomløpes bare én gang når θ går fra 0 til 2π , men $r = 4 \cdot \sin(2\theta) < 0$ for $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ og for $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$.

Det gjør det litt kinkig å integrere, fordi $dA = r \cdot dr \cdot d\theta < 0$ på disse intervallene.

Vi må derfor dele opp integrasjonsområdet slik at θ ikke skifter fortegn på noe intervall, slik at vi kan kontrollere fortegnet.

På den andre siden kan det være fristende å integrere over „kronbladet” i første kvadrant, og multiplisere resultatet med 4, for kronbladene må være kongruente.

Ja, siden dette kronbladet også er symmetrisk om linjen $y = x$, burde det holde å integrere over det halve kronbladet, for så å multiplisere resultatet med 8.

Men slik er det nok ikke. Riktignok er de 8 kronblad-halvpartene kongruente, men integranden $\frac{r^2 \sin(\theta)^2}{r^2 + 1}$ er avhengig av $\sin(\theta)^2$.

Og $\sin(\theta)^2$ er symmetrisk om de to koordinataksene (slik kronbladene er), men *ikke* om aksene $y = x$ og $y = -x$.

Derfor kan vi integrere over delen av området som ligger i første kvadrant, og så multiplisere det hele med 4.

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den treffer kurven $r = 4 \sin(2\theta)$.

Vi skal ha med sektoren fra $\theta = 0$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet $4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=4 \sin(2\theta)} f(r, \theta) \cdot r \, dr \, d\theta$.

> 4·int(int($\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2 + 1} \cdot r$, r = 0 .. 4·sin(2·theta)), theta = 0 .. $\frac{\text{Pi}}{2}$)

[Warning, computation interrupted](#)

Hva skjer nå? Maple regner og regner og regner. Nei, dette er ikke noe å vente på.

Så stans Maple! Det gjør du ved å klikke på stoppskiltet i øverste kommandolinje på arbeidsarket.

(Det er rødt, med en hvit, åpen hånd som holdes opp.)

Jeg avbrøt Maple etter 5 minutter.

Dette integralet ble antakelig for vanskelig for Maple. Maple regnet og regnet uten å komme i mål.

Vi får heller la Maple evaluere det numerisk.

> evalf(4·Int(Int($\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2 + 1} \cdot r$, r = 0 .. 4·sin(2·theta)), theta = 0 .. $\frac{\text{Pi}}{2}$))

Merk at vi skriver *Int* med stor forbokstav når vi integrerer numerisk.

(Ellers prøver Maple å først integrere eksakt, for så å skrive svaret på desimalform.)

Akkurat i denne oppgaven, ser vi at det innerste integralet er et r -integral som slett ikke er vanskelig å bregne.

Derfor kan vi godt la Maple integrere det eksakt, ved å skrive *int* på det innerste integralet. Bare prøv!

Det er θ -integralet vi da får som volder problemet.

d)

Området D må beskrives i polarkoordinater hvis vi skal integrere i polarkoordinater (og det ser jo lurt ut).

Siden $x^2 + y^2 = r^2$, er $x^2 + y^2 \leq 9$ det samme som $r^2 \leq 9$, altså $0 \leq r \leq 3$, altså sirkelskiven med sentrum i origo og radius 3.

Siden $y = r \cdot \sin \theta$, er linjen $y = 1$ det samme som $r \cdot \sin \theta = 1$, altså $r = \frac{1}{\sin \theta}$.

Vi kan ikke plote dette for alle θ , for $\sin \theta = 0$ er litt kinkig.

La oss plote området i kartesiske koordinater først, så vi har en idé om hvordan dette blir.

> *with(plots)*

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

(4)

> $P1 := \text{implicitplot}(x^2 + y^2 = 9, x = -4..4, y = -4..4, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{green})$

$P1 := \text{PLOT}(\dots)$

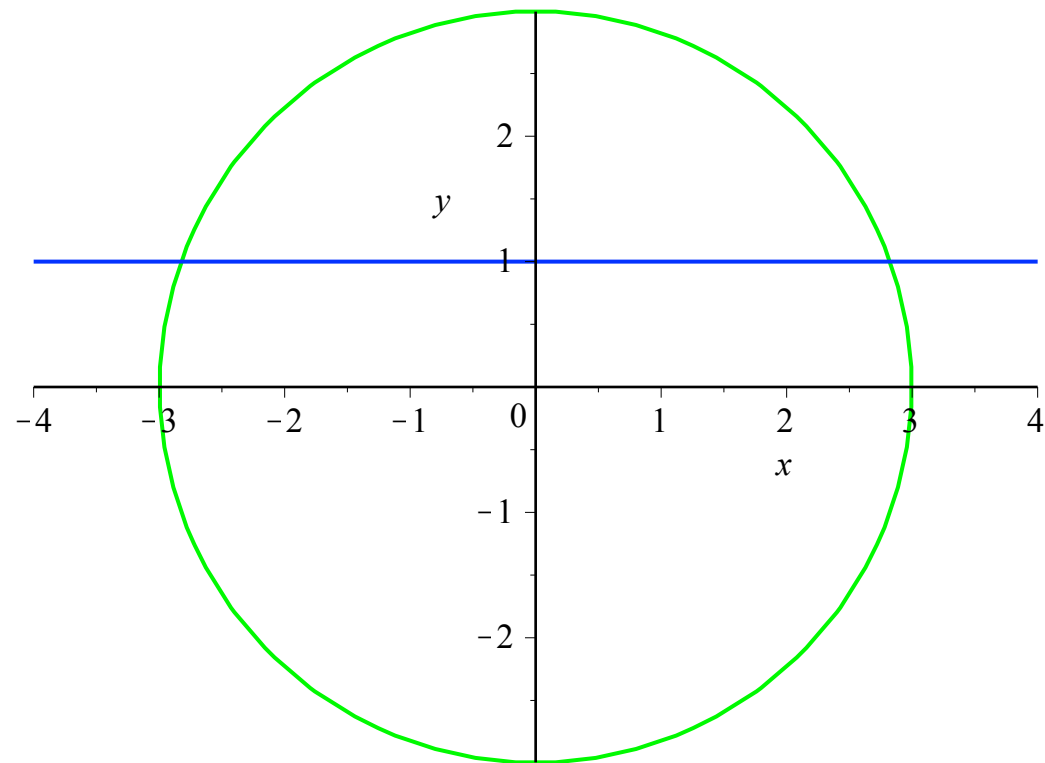
(5)

> $P2 := \text{plot}(1, x = -4..4, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{blue})$

$P2 := \text{PLOT}(\dots)$

(6)

> *display(P1, P2)*



>

Aha! D er den delen av området innenfor sirkelen som ligger ovenfor linjen $y = 1$.
Resten av jobben overlater jeg til deg.