Oppgave 10.3.12.

a)

Først definerer vi funksjonen, slik at vi ikke trenger å skrive den opp flere ganger

> $f := (x, y) \rightarrow \dfrac{x^3 \cdot \ln(x \cdot y)}{x^2 + y^2}$

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{x^3 \ln(x\, y)}{x^2 + y^2} \tag{1}$$

Det er en smaksak om man vil definere de partiellderiverte som funksjoner eller ikke. (Det kommer naturligvis også an på hva man skal bruke de partiellderiverte til etterpå.)
Det greieste er som oftest at de får være funksjoner, så vi gjør det slik:

> $diff(f(x, y), x)$

$$\frac{3\, x^2 \ln(x\, y)}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2\, x^4 \ln(x\, y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{2}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{x^2 \left(x^2 \ln(x\, y) + 3 \ln(x\, y)\, y^2 + x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{3}$$

> $fx := (x, y) \rightarrow \dfrac{x^2 \left(x^2 \ln(x\, y) + 3 \ln(x\, y)\, y^2 + x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

$$fx := (x, y) \rightarrow \frac{x^2 \left(x^2 \ln(x\, y) + 3 \ln(x\, y)\, y^2 + x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{4}$$

Dette er altså den partiellderiverte av funksjonen med hensyn på x. Vi skal ha verdien av denne partiellderiverte for $x = 2$ og $y = 4$:

> $fx(2, 4)$

$$\frac{39}{25}\ln(2)+\frac{1}{5} \tag{5}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{39}{25}\ln(2)+\frac{1}{5} \tag{6}$$

På tilsvarende måte får vi den partiellderiverte av f med hensyn på y:

> $diff(f(x,y),y)$

$$\frac{x^3}{y\,(x^2+y^2)}-\frac{2\,x^3\ln(x\,y)\,y}{(x^2+y^2)^2} \tag{7}$$

> $simplify(\%)$

$$-\frac{x^3\,(2\ln(x\,y)\,y^2-x^2-y^2)}{y\,(x^2+y^2)^2} \tag{8}$$

> $fy := (x,y) \to -\frac{x^3\,(2\ln(x\,y)\,y^2-x^2-y^2)}{y\,(x^2+y^2)^2}$

$$fy := (x,y) \to -\frac{x^3\,(2\ln(x\,y)\,y^2-x^2-y^2)}{y\,(x^2+y^2)^2} \tag{9}$$

> $fy(2,4)$

$$-\frac{12}{25}\ln(2)+\frac{1}{10} \tag{10}$$

Nå trenger vi egentlig ikke å skrive ut hvordan disse partiellderiverte egentlig ser ut, og slett ikke å forenkle uttrykkene for dem.
Oppgaven ber bare om verdien av de partiellderiverte i punktet (2,4).
I det følgende lar vi være å skrive ut uttrykket:

> $diff(fx(x,y),x)$

(11

$$\frac{2x\left(x^2\ln(xy)+3\ln(xy)y^2+x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2\left(2x\ln(xy)+3x+\frac{3y^2}{x}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4x^3\left(x^2\ln(xy)+3\ln(xy)y^2+x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \quad (11$$

> *subs*(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{44}{125}\ln(8)+\frac{21}{50} \quad (12$$

> *diff*(fx(x, y), y)

$$\frac{x^2\left(\frac{x^2}{y}+5y+6\ln(xy)y\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4x^2\left(x^2\ln(xy)+3\ln(xy)y^2+x^2+y^2\right)y}{\left(x^2+y^2\right)^3} \quad (13$$

> *subs*(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{1}{20}-\frac{22}{125}\ln(8) \quad (14$$

> *diff*(fy(x, y), y)

$$-\frac{4x^3\ln(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^3\left(2\ln(xy)y^2-x^2-y^2\right)}{y^2\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{4x^3\left(2\ln(xy)y^2-x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \quad (15$$

> *subs*(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{11}{125}\ln(8)-\frac{21}{200} \quad (16$$

> *diff*(fy(x, y), x)

$$-\frac{3x^2\left(2\ln(xy)y^2-x^2-y^2\right)}{y\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{x^3\left(\frac{2y^2}{x}-2x\right)}{y\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{4x^4\left(2\ln(xy)y^2-x^2-y^2\right)}{y\left(x^2+y^2\right)^3} \quad (17$$

> *subs*(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{1}{20}-\frac{22}{125}\ln(8) \quad (18$$

>