Oppgave 8.5.10

a)

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\cos(t)^2 + 4\cos(2\,t)^2}\, dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t + 4\cos^2 2\,t}\ \mathrm{d}$

Vi lar Maple beregne dette integralet:

> $int\left(\mathrm{sqrt}\left(\cos(t)^2 + 4\cdot\cos(2\,t)^2\right), t = 0\,..\mathrm{Pi}\right)$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\cos(t)^2 + 4\cos(2\,t)^2}\ \mathrm{d}t \quad \textbf{(1}$$

Dette klarte ikke Maple å beregne eksakt. Vi ber derfor om en tilnærmet løsning:

> $evalf\left(int\left(\mathrm{sqrt}\left(\cos(t)^2 + 4\cdot\cos(2\,t)^2\right), t = 0\,..\mathrm{Pi}\right)\right)$

$$4.714715648 \quad \textbf{(2}$$

b)

Det foregår på tilsvarende måte når kurven er en romkurve.

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\sec(t)^2\right)^2 + 1^2}\, dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^{1} \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\sec(t)^2\right)^2 + 1^2}\, dt$.

Vi lar Maple beregne dette integralet:

> $int\left(\operatorname{sqrt}\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}+\sec(t)^4+1\right), t=0..1\right)$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(t^2+1)^2}+\sec(t)^4+1}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3}$$

Ikke så uventet klarte Maple heller ikke å beregne dette integralet eksakt. Vi bruker derfor *evalf*:

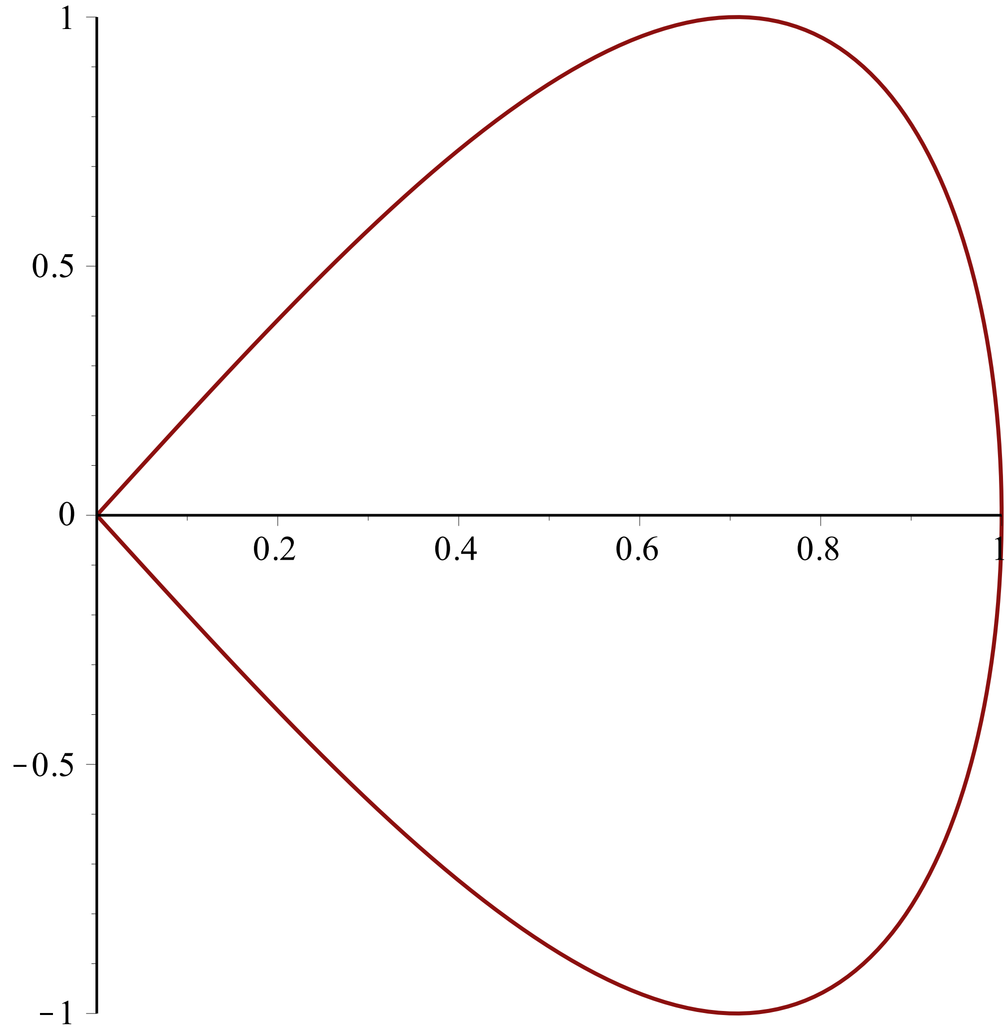
> $evalf(\%)$

$$2.060112984 \qquad \textbf{(4}$$

Oppgave 8.5.11

a)

> $plot([\sin(t), \sin(2\,t), t=0..\text{Pi}])$



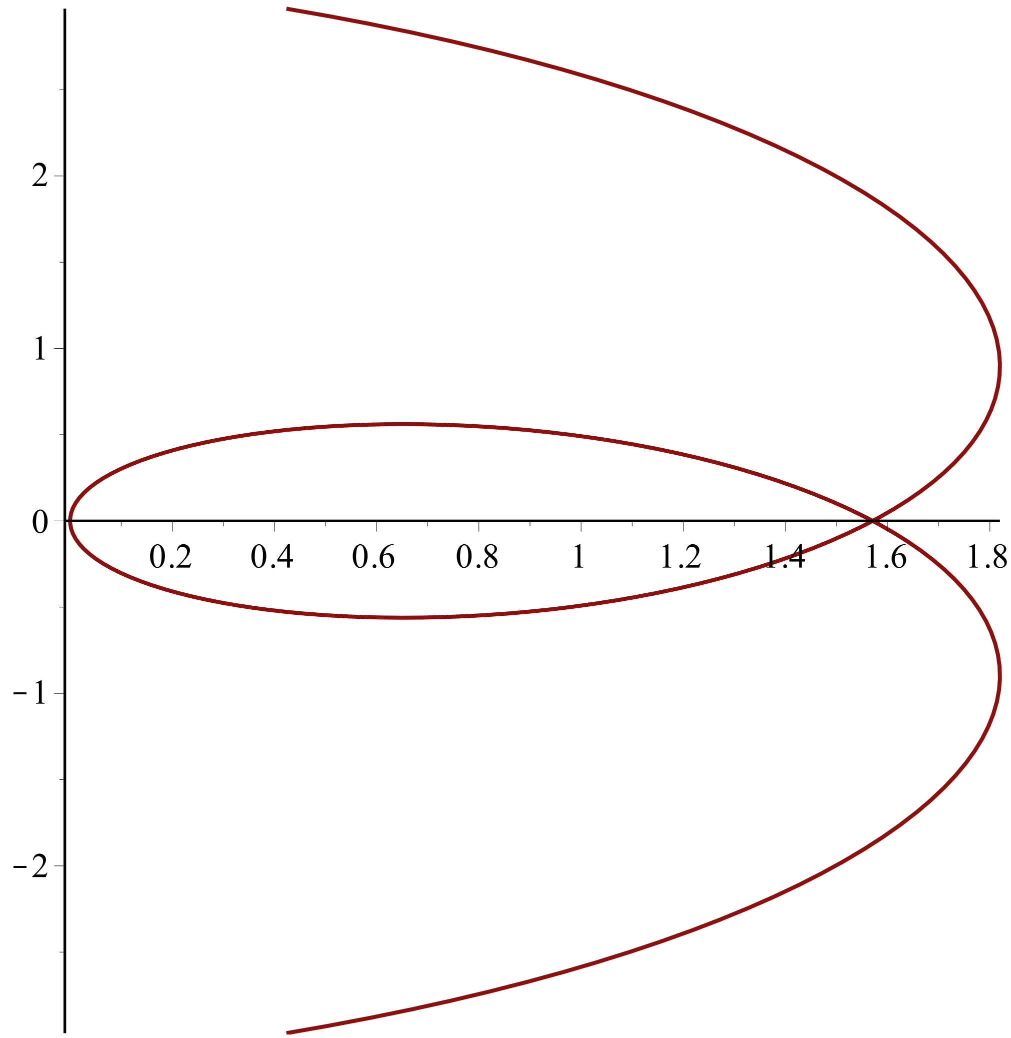
Kurven er symmetrisk om x-aksen (på grunn av symmetrien til sinus).
Vi kan derfor finne arealet av delen i øvre halvplan, for så å multiplisere med 2.
Vi skal integrere $y\,dx = y(t)\cdot\dfrac{dx}{dt}\cdot dt = \sin(2\,t)\cdot\cos(t)\;dt$, Arealet blir derfor

> $2 \cdot int\left(\sin(2\,t) \cdot \cos(t),\, t = 0\,..\,\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$\frac{4}{3} \tag{5}$$

c)

> $plot([\mathrm{t} \cdot \sin(\mathrm{t}),\, t \cdot \cos(t),\, t = -3\,..3])$



Som i a) er kurven symmetrisk om x−aksen, så vi kan beregne arealet over x−aksen, og så multiplisere med 2.
Før vi kan regne ut arealet som avgrenses av kurven, trenger vi å finne verdien for parameteren t i origo og i skjæringspunktet nær x=1.6 på x-aksen.
I begge disse punktene er $y = 0$ (på grunn av symmetrien i de trigonometriske funksjonene).

Altså er $t \cdot \cos(t) = 0$ og $t \cdot \sin(t) \geq 0$ i disse to punktene. Det vil si, $t = 0$ og $t = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal integrere $y\,dx = y(t)\cdot\dfrac{dx}{dt}\cdot dt = t\cdot\cos(t)\cdot(\sin(t) + t\cdot\cos(t))\,dt.$

Arealet blir derfor

> $2\cdot int\left(t\cdot\cos(t)\cdot(\sin(t) + t\cdot\cos(t)), t = 0\,..\,\dfrac{\text{Pi}}{2}\right)$

$$\frac{1}{24}\pi^3 \qquad (6$$

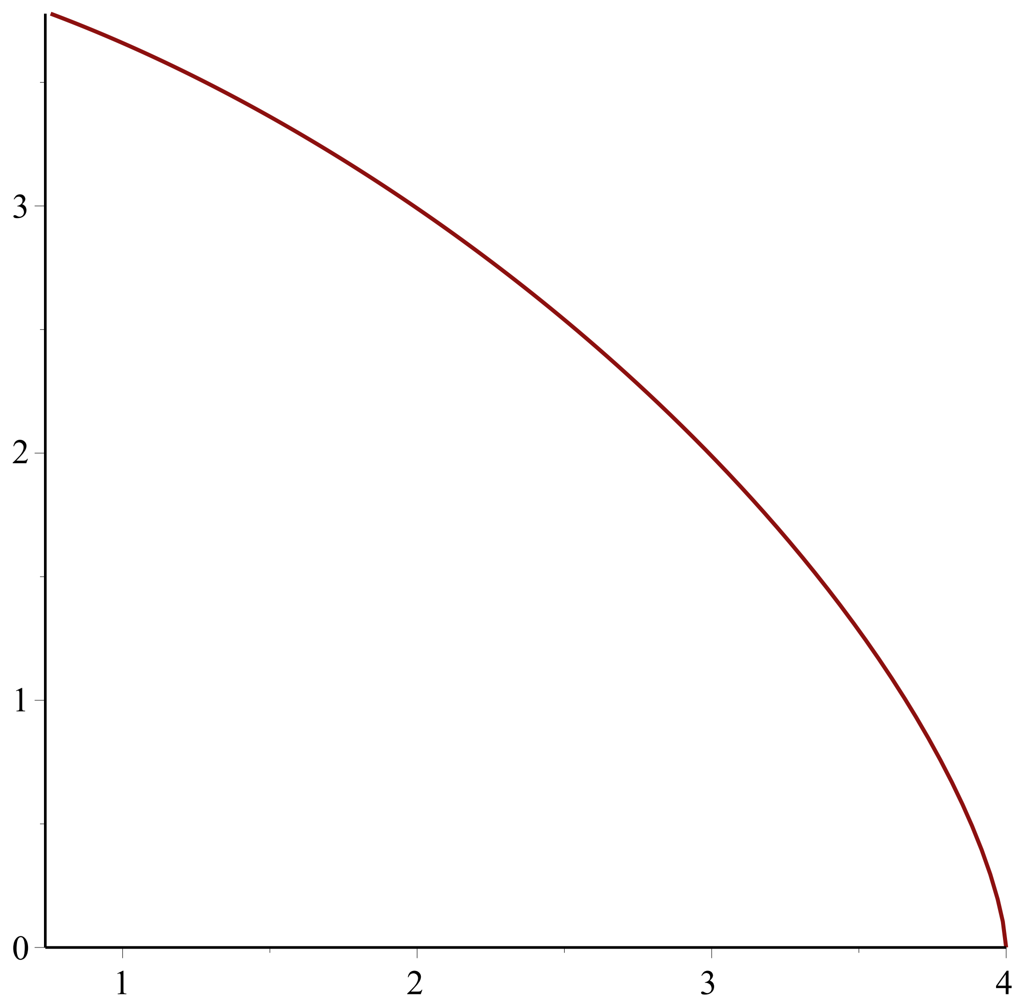
Oppgave 8.5.12.

a)

Setter vi $y = xt$ får likningen formen $x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}} = 8$ som betyr at $x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}$, noe som gir parametriseringen

$$x = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad y = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t$$

> $plot\left(\left[\left(\dfrac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\dfrac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t,\ \ t = 0\,..5\right]\right)$



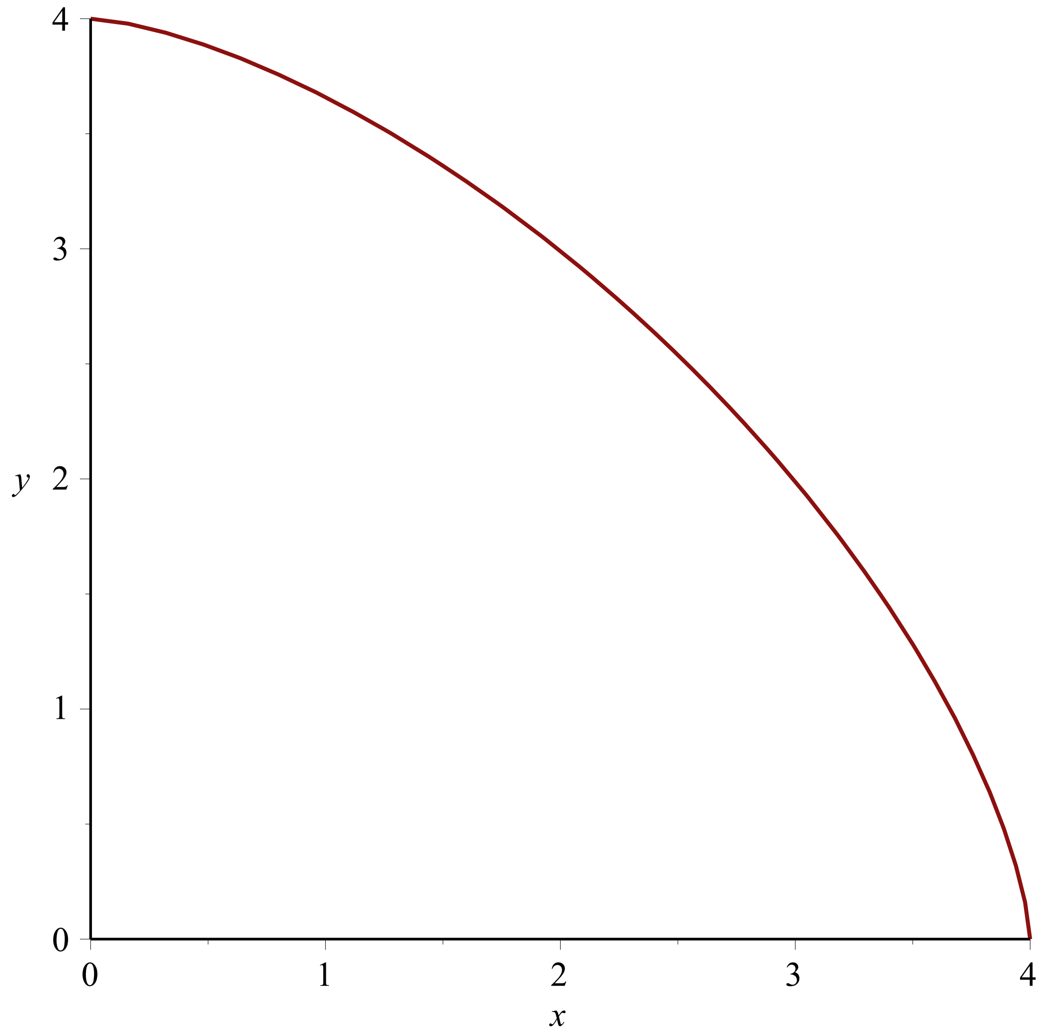
Til sammenligning kan vi bruke *implicitplot* til å tegne grafen til den gitte likningen

> $with(plots)$

$[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,$ **(7**
$contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,$
$implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,$

loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

> $implicitplot\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 8, x = 0..4, y = 0..4\right)$



>