Ekstraoppgave 3.6.1

a)

> $limit\left(\operatorname{sqrt}\left(t^4+2\,t\right)-\left(t^2+1\right), t=0\right)$

$$-1 \tag{1}$$

b)

> $limit\left((1-\ln(\mathrm{x}))^x, x=infinity\right)$

$$\infty \tag{2}$$

Grenseverdien eksisterer altså ikke, men det er av verdi å merke seg at uttrykket vokser over alle grenser når $x \to \infty$.
Eller gjør det ikke det??? Det er klart at $(1-\ln x) < 0$ for $x > e$, så vi har store problemer med fortegnet til $(1-\ln x)^x$ når $x \to \infty$.
Det har Maple ikke tatt hensyn til! Det kan være verdt å merke seg!
Legg merke til at infinity kan skrives bent frem i Maple.
Alternativt kan man åpne skuffen Common Symbols i venstre marg og trykke på ∞ der:

> $limit\left((1-\ln(x))^x, x=\infty\right)$

$$\infty \tag{3}$$

c)

> $limit\left(\left(\frac{1}{\cos^{-1}(x)}-\frac{x}{\ln(x)}\right), x=1, left\right)$

$$\infty \tag{4}$$

Heller ikke denne grenseverdien eksisterer ifølge Maple.

Legg merke til bruken av *left* for å fortelle Maple at det er snakk om en ensidig grense fra venstre.
Tilsvarende kan man bruke *right* til å fortelle Maple at det er snakk om en ensidig grenseverdi fra høyre.

Ekstraoppgave 3.6.2

a)

> $f := x \rightarrow \frac{x^3 \cdot \cos^{-1}(x^2)}{x^2 \cdot \cos(x^3)}$

$$f := x \rightarrow \frac{x^3 \arccos(x^2)}{x^2 \cos(x^3)} \quad (5$$

> **for** n **from** 1 **to** 5 **do** $evalf\left(f\left((-10)^{-n}\right), 60\right)$ **end do**

$-0.156079694051913473246937845879959279120327883729567739016912$

$0.0157069632679551530072730271717330385790154768503444832271226$

$-0.00157079532679489661985005268837045808529149452728013745108746$

$0.000157079631679489661923132231037124317288022014868197597959541$

$-0.0000157079632669489661923132169164037017359526548133050115466663 \quad (6$

Legg merke til at vi krever ganske høy presisjon i utregningene. Null over null uttrykk er alltid skumle i beregninger.
Vi sjekker også funksjonsverdier på begge sider av $x = 0$ siden vi bruker $x = a + (-1)^n \cdot 10^{-n} = (-1)^{-n} \cdot 10^{-n} = (-10)^{-n}$.
Funksjonsverdiene ser ut til å avta mot null. For å sjekke litt nøyere, kan vi se hva som skjer når x er enda nærmere null.

> **for** n **from** 6 **to** 20 **do** $evalf\left(f\left((-10)^{-n}\right), 60\right)$ **end do**

$0.00000157079632679389661923132169163975144271731619641783455343647$

$-1.57079632679488661923132169163975144209858531841904964126412\ 10^{-7}$

$1.57079632679489651923132169163975144209858469968817164198421\ 10^{-8}$

$-1.57079632679489661823132169163975144209858469968755291110621\ 10^{-9}$

$1.57079632679489661922132169163975144209858469968755291048747\ 10^{-10}$

$-1.57079632679489661923122169163975144209858469968755291048747\ 10^{-11}$

$1.57079632679489661923132069163975144209858469968755291048747\ 10^{-12}$

$$-1.570796326794896619231321681639751442098584699687552910487 47\ 10^{-13}$$

$$1.5707963267948966192313216915397514420985846996875529104874 7\ 10^{-14}$$

$$-1.57079632679489661923132169163875144209858469968755291048747\ 10^{-15}$$

$$1.57079632679489661923132169163974144209858469968755291048747\ 10^{-16}$$

$$-1.57079632679489661923132169163975134209858469968755291048747\ 10^{-17}$$

$$1.57079632679489661923132169163975144109858469968755291048747\ 10^{-18}$$

$$-1.57079632679489661923132169163975144208858469968755291048747\ 10^{-19}$$

$$1.57079632679489661923132169163975144209848469968755291048747\ 10^{-20} \quad (7$$

Nå tror jeg virkelig at grenseverdien eksisterer og er lik null.
Jeg kan jo også prøve hva som skjer ved bruk av kommandoen *limit* :

> $limit(f(x), x = 0)$

$$0 \quad (8$$

b)

> $f := x \rightarrow \frac{\mathrm{sqrt}(\mathrm{abs}(x^3 - 1))}{(x-1)\cdot \mathrm{sqrt}(\sin(\mathrm{abs}(1-x)))}$

$$f := x \rightarrow \frac{\sqrt{|x^3 - 1|}}{(x-1)\sqrt{\sin(|1-x|)}} \quad (9$$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $evalf\left(f\left(1 + (-10)^{-n}\right), 60\right)$ **end do**

$$-16.4758063282894426957316676469818878091007212644247259734251$$

$$174.073274865955773180898526740527897450889277709215073765630$$

$$-1731.18499863539279159364912571830140088533815303605427908021$$

$$17321.3741227435533458280632914218901710942462503247281346144$$

$$-1.73204214733649004815153162715204764264679038815083383678226\ 10^{5}$$

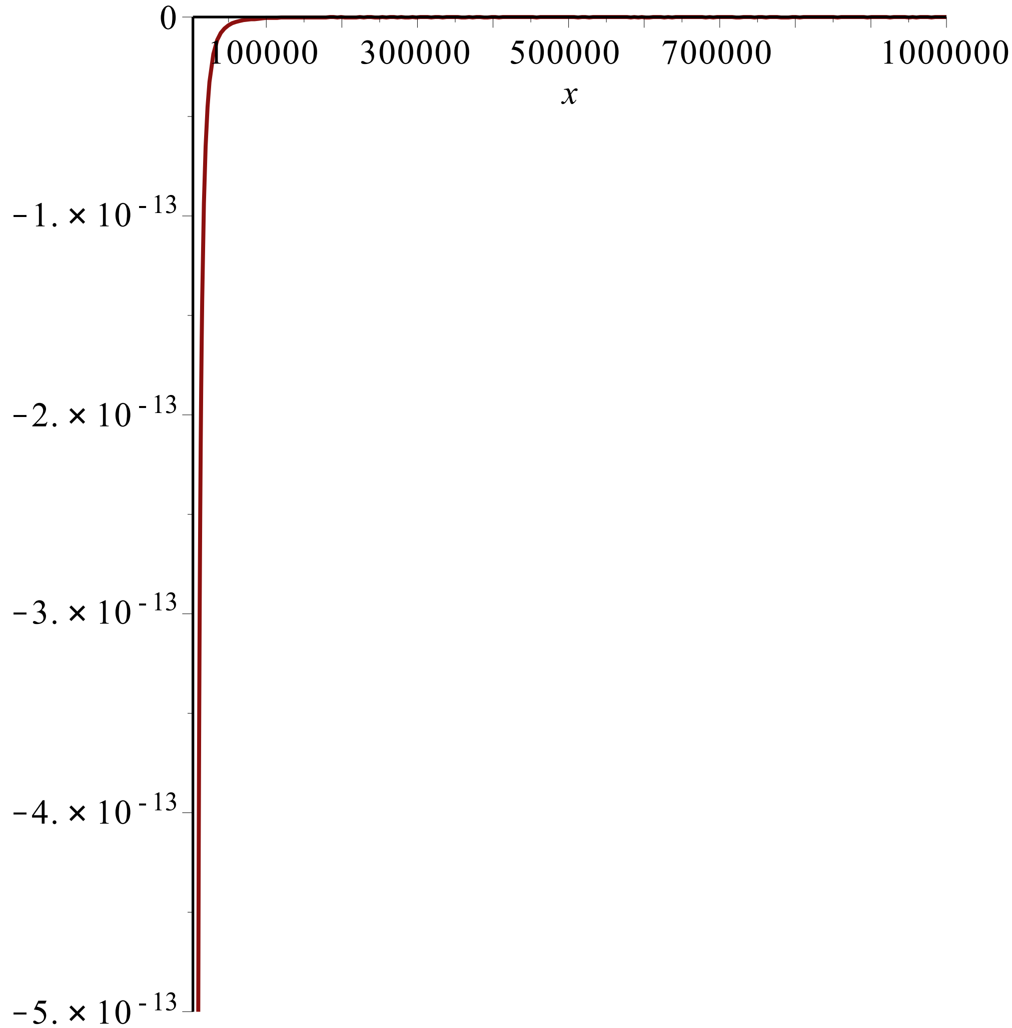
$$1.73205167359449758435312364009314373828641349594271989166059\ 10^{6}$$
$$-1.73205072096633908014705504184168565563418646963795929968015\ 10^{7}$$
$$1.73205081622913135302246793983846240169748057840227584853872\ 10^{8}$$
$$-1.73205080670285188995951404565217446608982631518727568509824\ 10^{9}$$
$$1.73205080765547983390805526969174186502683586950092876192576\ 10^{10}$$
$$-1.73205080756021703948962360567332971011705316103710576774523\ 10^{11}$$
$$1.73205080756974331893123099665898703625930427274902970726101\ 10^{12}$$
$$-1.73205080756879069098706789980625950408679049270951706640298\ 10^{13}$$
$$1.73205080756888595378148418591399063926912378542570024570286\ 10^{14}$$
$$-1.73205080756887642750204255706744210957058061049980369562152\ 10^{15}$$
$$1.73205080756887738012998671994973920837863179020065196889581\ 10^{16}$$
$$-1.73205080756887728486719230366148592095620864089198492635047\ 10^{17}$$
$$1.73205080756887729439347174529031101392303477550942647325422\ 10^{18}$$
$$-1.73205080756887729344084380112742850226859800024454810632554\ 10^{19}$$
$$1.73205080756887729353610659554371675341046413615300460085669\ 10^{20}$$ **(10**

Her tror jeg at funksjonen oscillerer villere og villere, slik at grenseverdien ikke eksisterer.
Faktisk tror jeg at de ensidige grensene heller ikke eksisterer, for de er henholdsvis ∞ og $-\infty$.
Du kan jo sjekke hva Maple svarer om du bruker kommandoen *limit*

Ekstraoppgave 3.6.3

a)

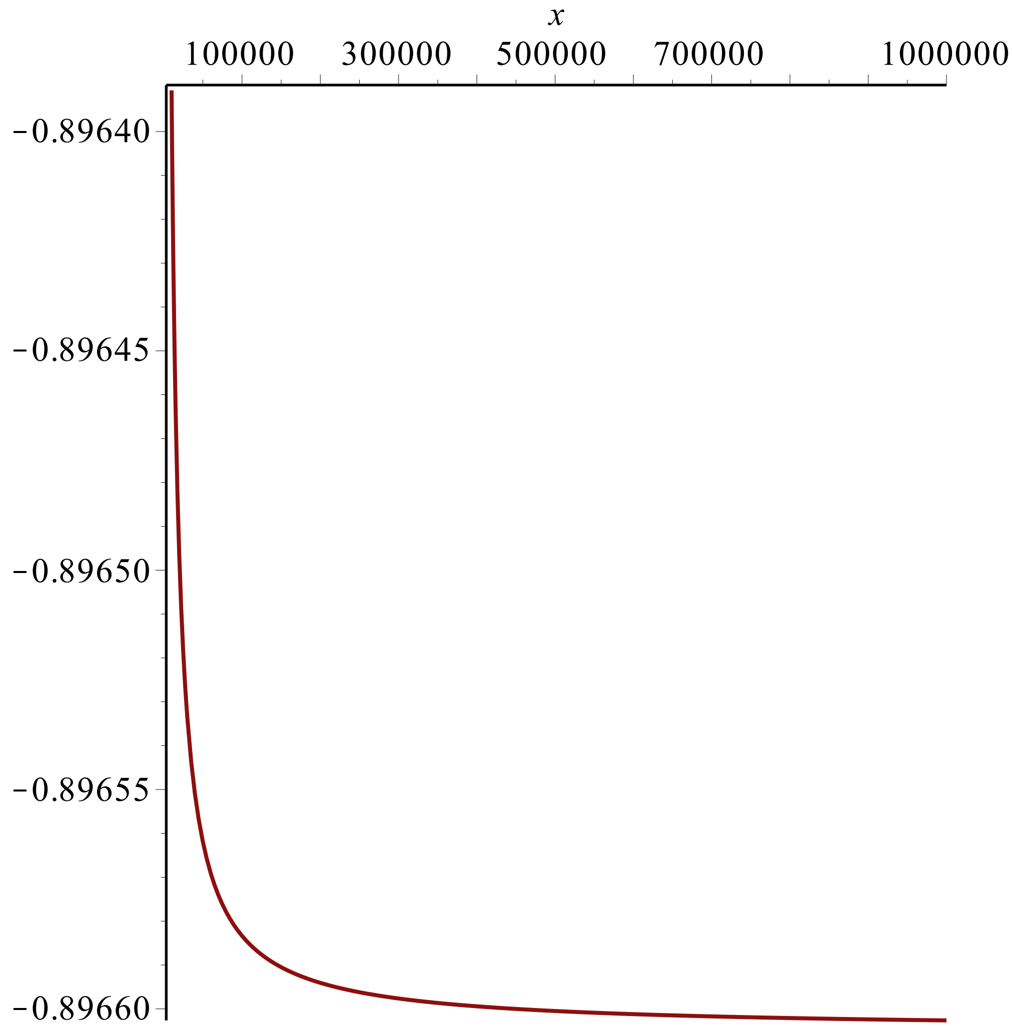
> $plot\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1}(x), x = 10^{4}..10^{6}\right)$



Jeg tror grenseverdien eksisterer og er lik null.

b)

> $plot\left(\tan^{-1}(x) - \left(\tan^{-1}(x)\right)^2, x = 10^4 .. 10^6\right)$



Jeg tror faktisk at grenseverdien eksisterer, og er i nærheten av -0.9.

I denne oppgaven vet jeg faktisk hva grenseverdien er, for $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, slik at grenseverdien eksisterer og er lik

> $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi^2 \quad (11$$

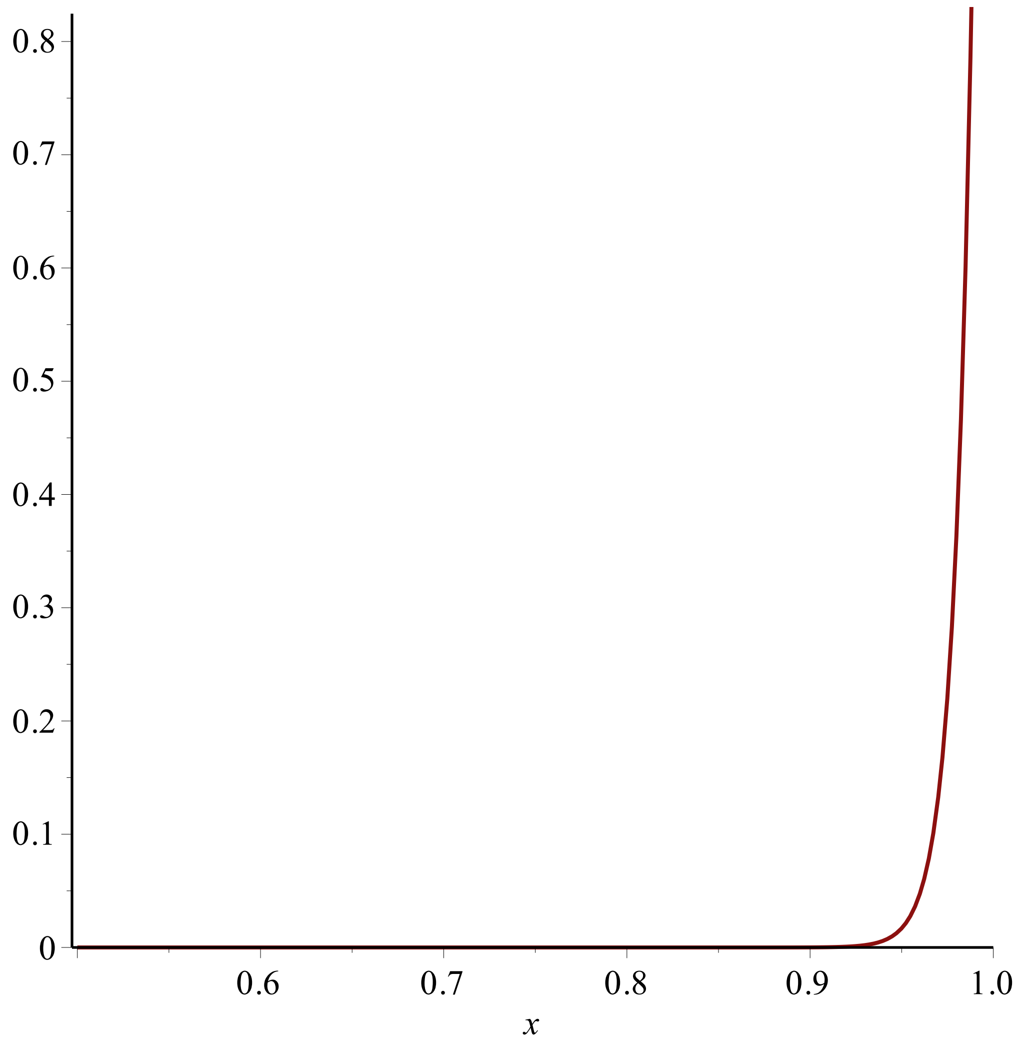
der

> $evalf\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$

$$-0.896604774 \quad (12$$

c)

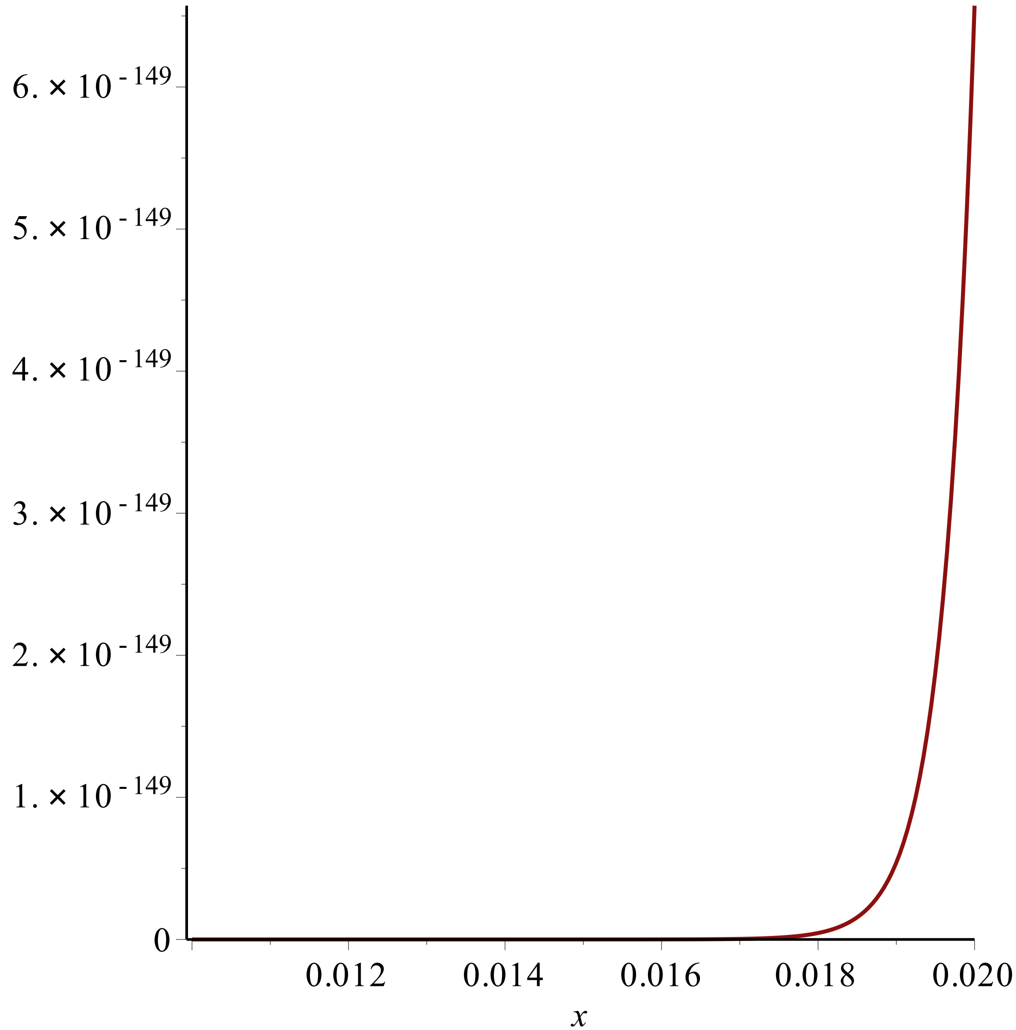
> $plot\left(x^{100} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right), x = 0.5 ..1\right)$



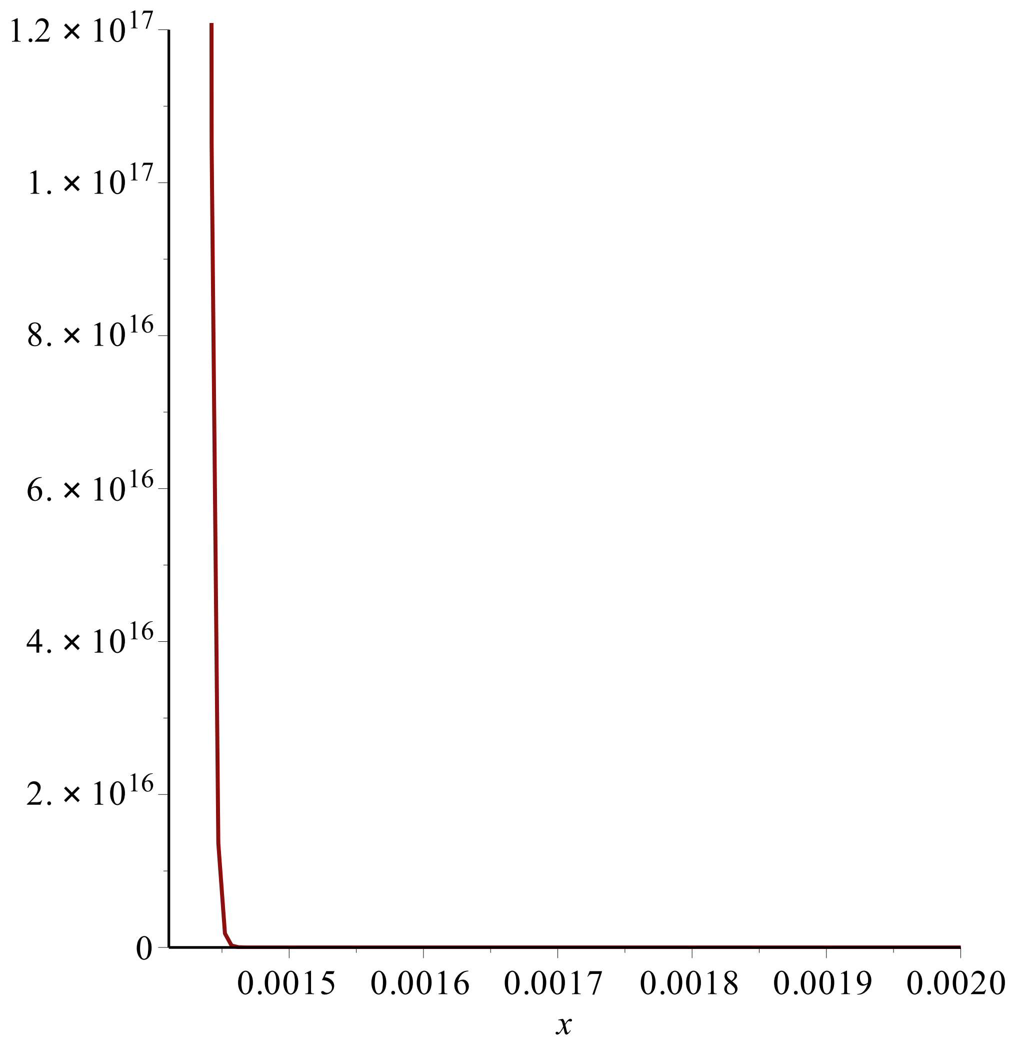
Denne grenseverdien må da bare bli null? Det ser rart ut, for når $x \to 0^+$, vil $\exp\left(\frac{1}{x}\right) \to \infty$ fryktelig fort.

Vi sjekker hvordan det ser ut nærmere null:

> $plot\left(x^{100} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right), x = 0.01 ..0.02\right)$



> $plot\left(x^{100} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right), x = 0.001 ..0.002\right)$



Å hei! Nå ser det ut til å gå mot uendelig. Det har jeg mer tro på.
Det er lett å bli lurt av slike undersøkelser!
Hva svarer Maple om jeg bruker kommandoen *limit* tro?

> $limit\left(x^{100} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right), x = 0, right\right)$

∞ (13