Oppgave 10.9.15:

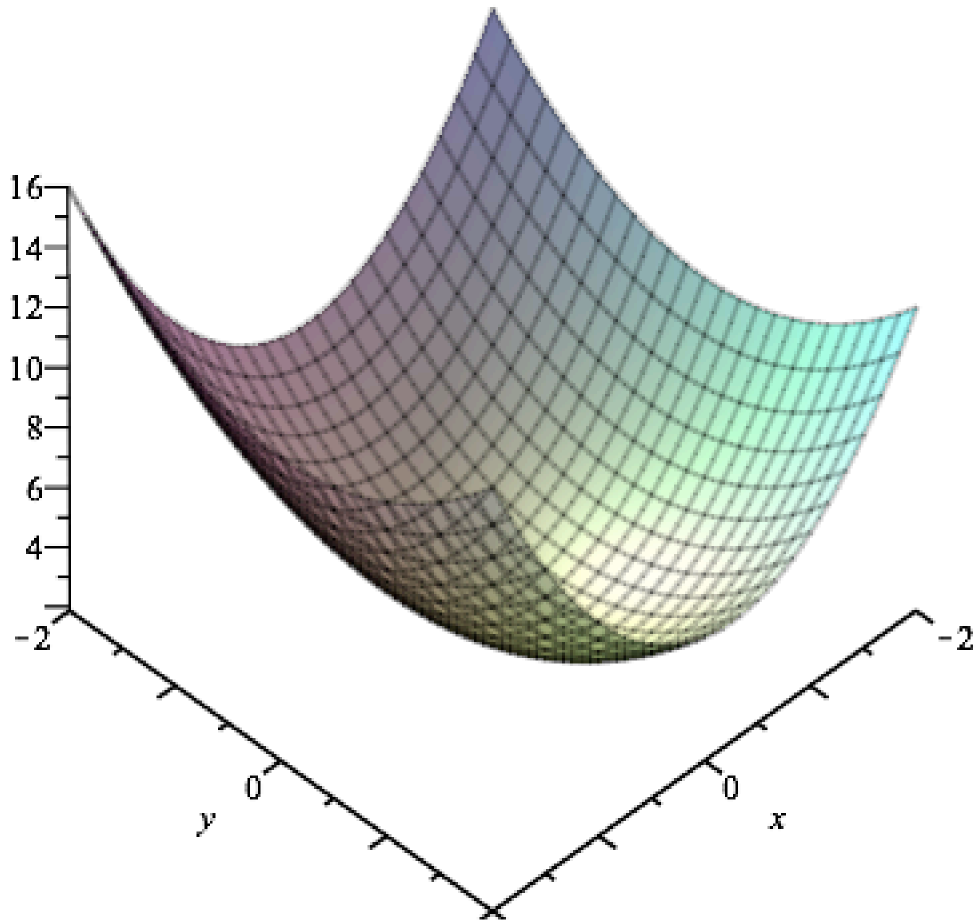
For å plotte disse figurene, henter vi inn Maples plottekommandoer:

```
> with(plots)
```

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*] **(1**

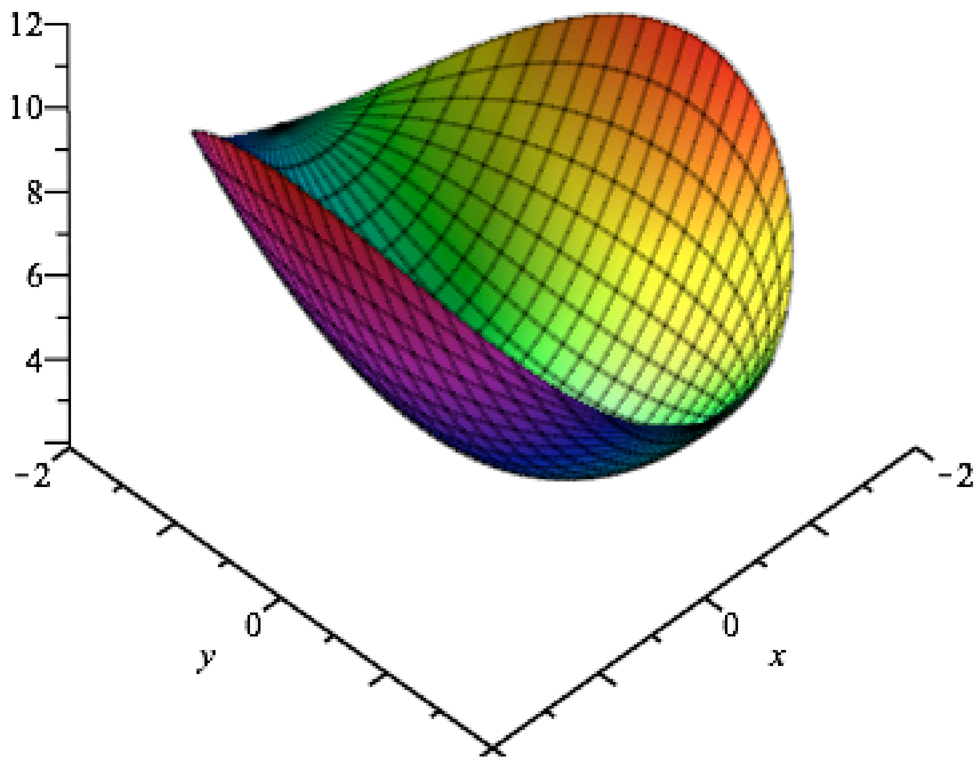
a)

$>$ $plot3d\left(2\cdot x^2 + x + y^2 + 2, x = -2..2, y = -2..2, axes = framed, transparency = 0.3\right)$



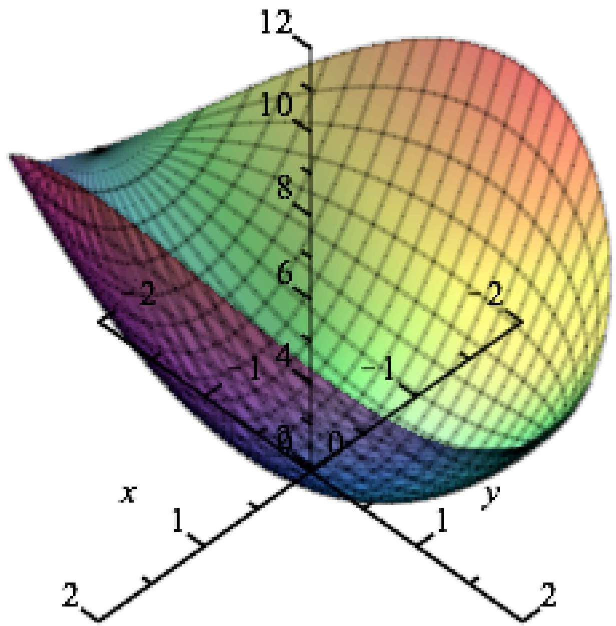
Synes du fargene var kjedelige? Prøv med *color* = *x*.
Ville du heller hatt grafen tegnet akkurat på sirkelskiven? Det kan vi fikse på denne måten:

> $plot3d\left(2\cdot x^2 + x + y^2 + 2, x = -\mathrm{sqrt}\left(4 - y^2\right) .. \mathrm{sqrt}\left(4 - y^2\right), y = -2 .. 2, axes = framed, color = x\right)$



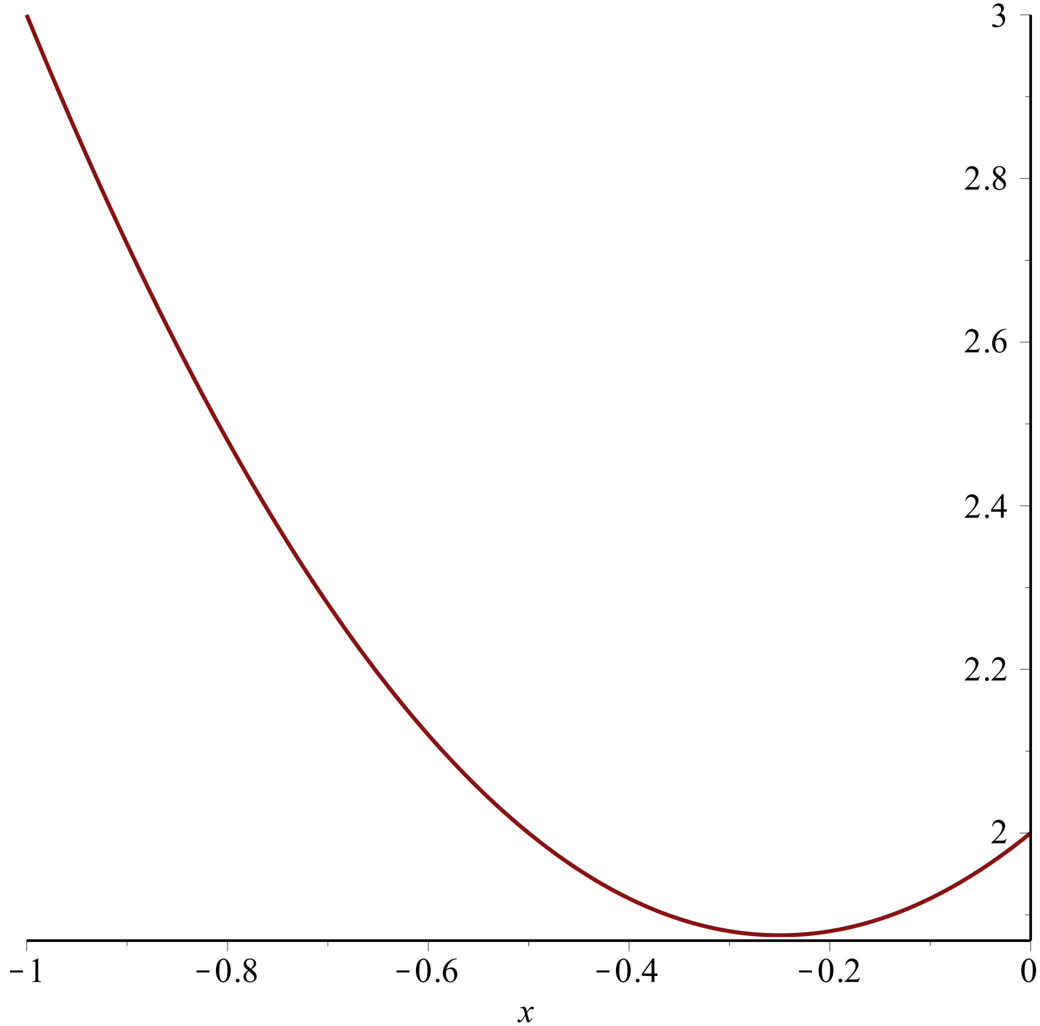
En annen sak er at "vanlige" koordinater antakelig er å foretrekke for å få et mer presist uttrykk for minimum til denne funksjonen:

> $plot3d\left(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2, x = -\mathrm{sqrt}\left(4 - y^2\right) .. \mathrm{sqrt}\left(4 - y^2\right), y = -2 .. 2, axes = normal, color = x, transparency = 0.3\right)$

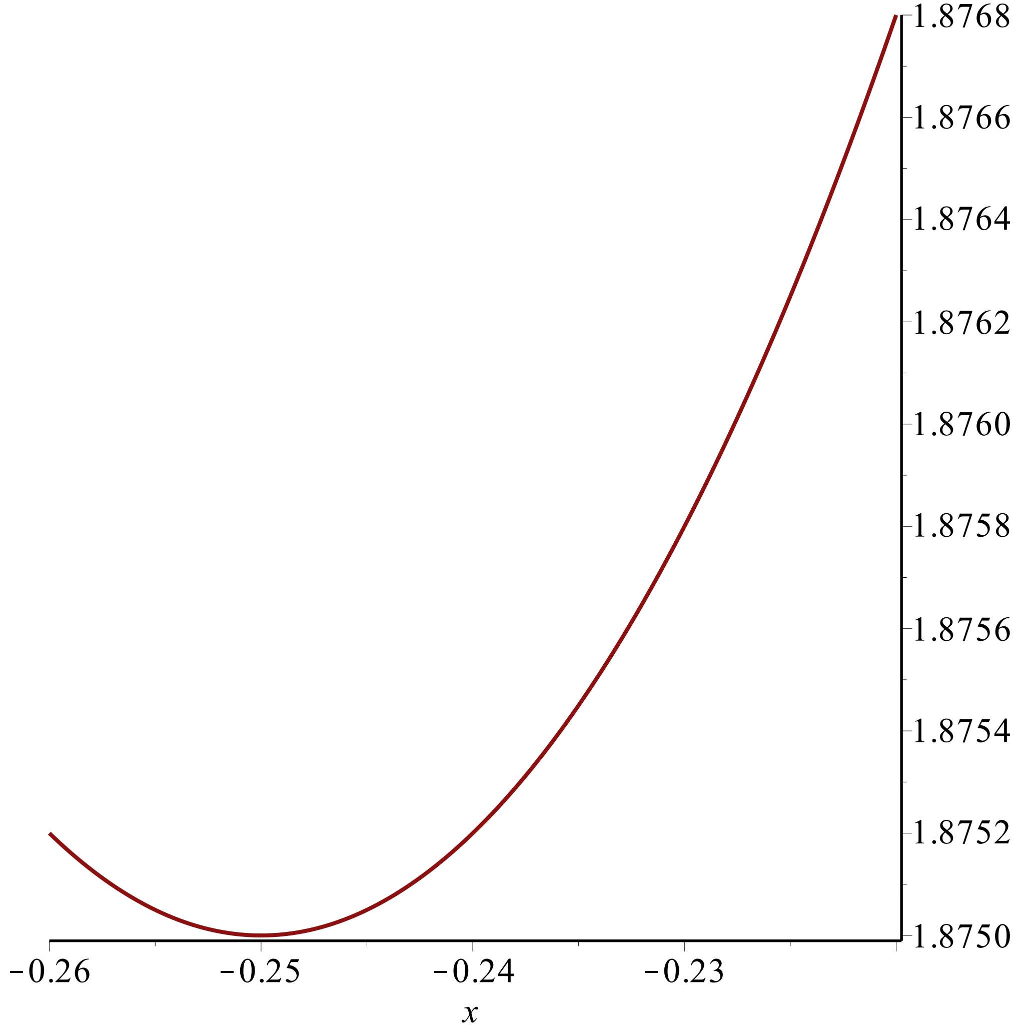


Nå er det bare å dreie og forstørre for å se hvor minimum ligger, noe du kan gjøre ved å først sette cursoren på figuren og klikke, slik at du får en ramme rundt figuren. Det gir deg en ny kommandolinje på toppen av siden der de fire symbolene du trenger ligger til høyre. For meg ser det da ut som om minimumspunktet ligger nær $(x, y) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. En rask kikk på funksjonsuttrykket viser at minimum nok inntreffer for $y = 0$. Det gjenstår derfor å finne x-verdien i minimumspunktet. Vi tegner derfor grafen til $g(x) = f(x, 0) = 2x^2 + x + 2$:

> $plot(2 \cdot x^2 + x + 2, x = -1 .. 0)$



> $plot(2 \cdot x^2 + x + 2, x = -0.26 .. -0.22)$



Dette forsterker troen på at minimum for f befinner seg svært nær punktet $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ der funksjonsverdien er ≈ 1.8750.

Oppgave 10.9.16:

a)

Jeg har valgt å tegne nivåkurvene $f(x, y, z) = \frac{15}{8}$ (som jeg vet er minimum) og kurvene $f(x, y) = c$ for c = 4, 8 og 12. Dessuten tegner jeg inn sirkelranden av området R i blått, slik at jeg ser bedre hvilke punkter som er med i konkurransen. I tillegg tar jeg med nivåkurvene for $c = \frac{14}{8}$ og $c = 2$ i henholdsvis rødt og grønt. (Skift de fargene dersom du er fargeblind!)

> $P1 := implicitplot\left(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = \frac{15}{8}, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = magenta\right)$

$$P1 := PLOT(\ldots) \qquad (2$$

> $P2 := implicitplot(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = 4, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = \text{yellow})$

$$P2 := PLOT(\ldots) \qquad (3$$

> $P3 := implicitplot(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = 8, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = brown)$

$$P3 := PLOT(\ldots) \qquad (4$$

> $P4 := implicitplot(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = 12, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = black)$

$$P4 := PLOT(\ldots) \qquad (5$$

> $P5 := implicitplot(x^2 + y^2 = 4, x = -4..4, y = -4..4, color = blue)$

$$P5 := PLOT(\ldots) \qquad (6$$

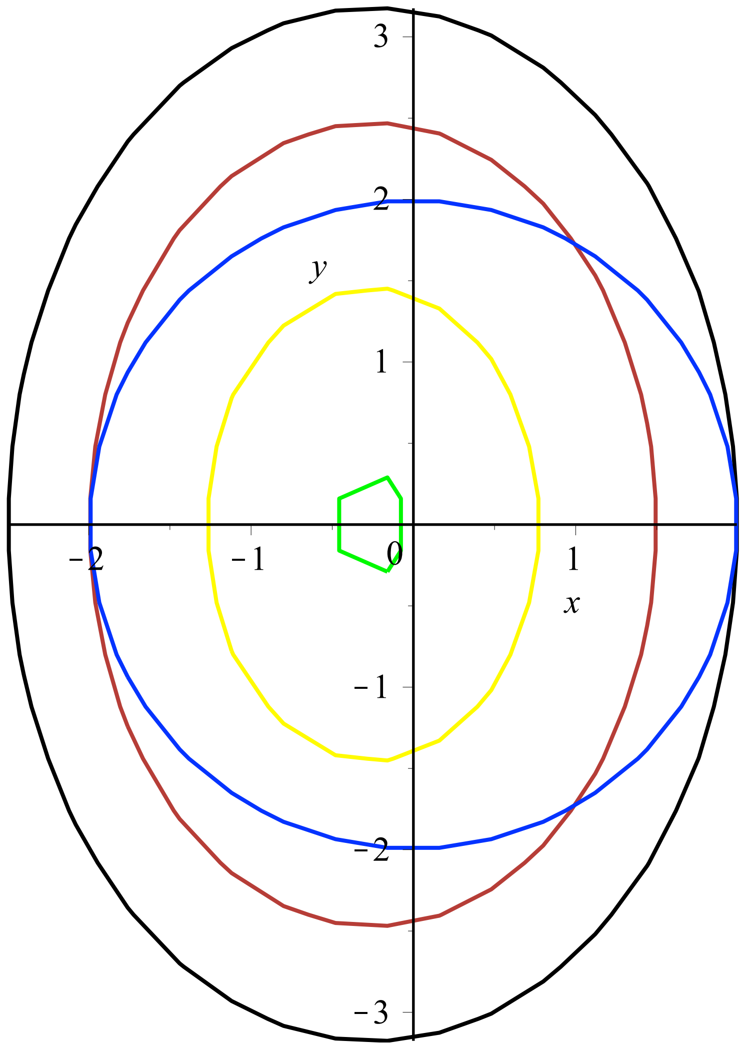
> $P6 := implicitplot\left(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = \frac{14}{8}, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = red\right)$

$$P6 := PLOT(\ldots) \qquad (7$$

> $P7 := implicitplot(2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = 2, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = green)$

$$P7 := PLOT(\ldots) \qquad (8$$

> $display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)$

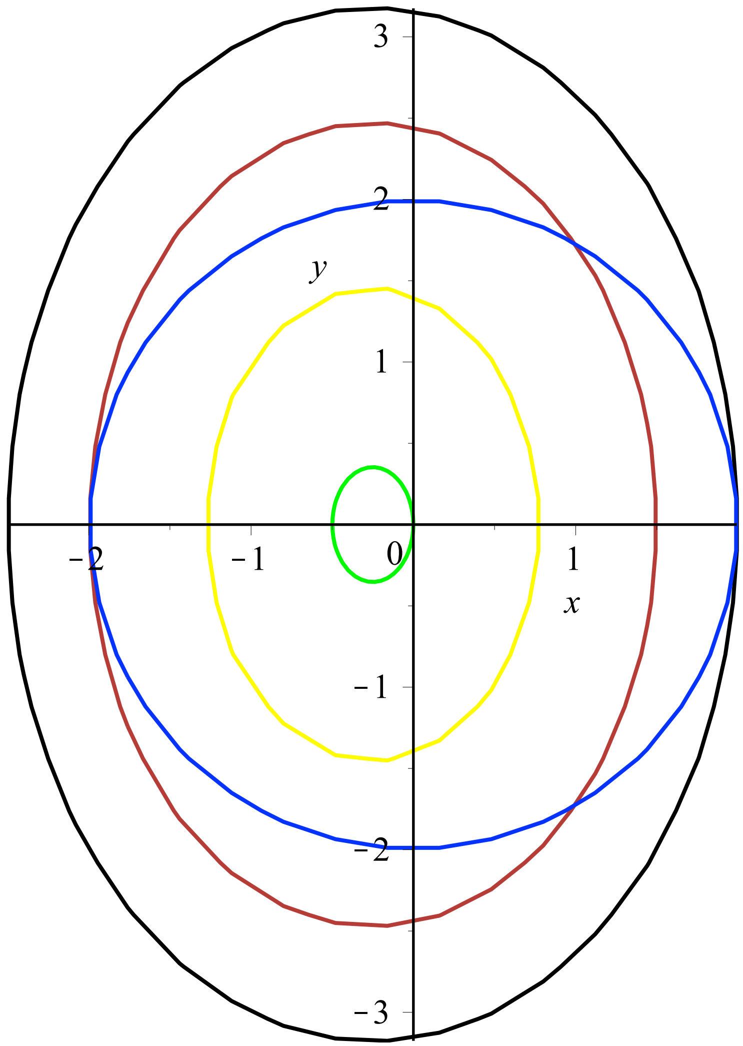


Den grønne kurven ble litt kantet, så jeg tar en *gridrefine* på den:

> $P7 := implicitplot\left(2\cdot x^2 + x + y^2 + 2 = 2, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = green, gridrefine = 3\right)$

$$P7 := PLOT(\ldots) \quad (9$$

> $display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)$

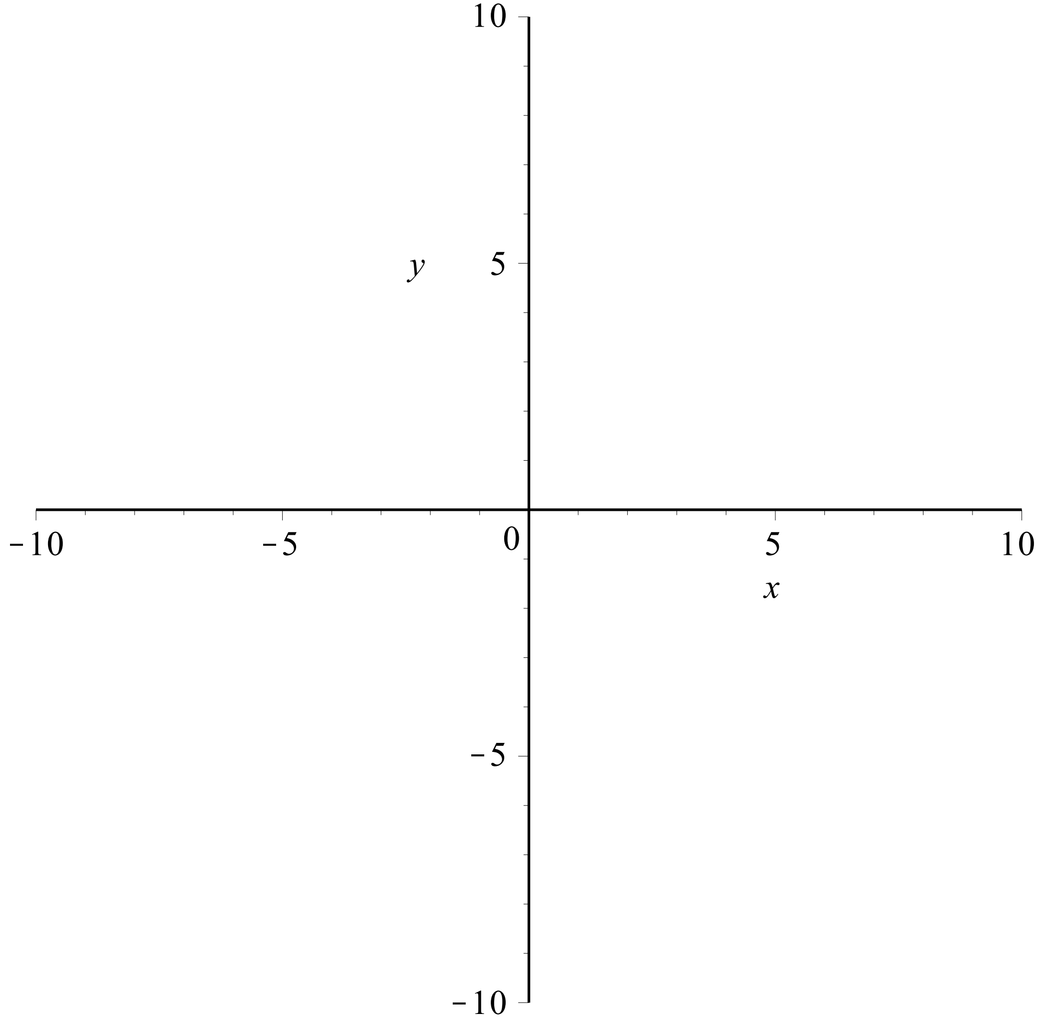


Se på resultatet. Vi ser:

- Den grønne, gule, brune og svarte nivåkurven kommer pent og pyntelig utenfor hverandre, med voksende c-verdi.
- Den blå sirkelen er randen til R. Vi ser at den svarte nivåkurven tangerer denne randen. Ellers ligger den helt utenfor R. Defor har $f(x, y)$ et maksimum i dette tangeringspunktet, nemlig funksjonsverdien på den svarte nivåkurven som er 12.
- Den brune nivåkurven tangerer også den blå randen til R. Men den brune kurven har noen punkter som ligger utenfor R og noen som ligger innenfor R, så det tangeringspunktet er verken et maksimums- eller et minimumspunkt.

- Hvor ble det av den magenta nivåkurven? Den skulle jo avsløre et minimum for funksjonen? At den ikke vises, må skyldes at den bare er et punkt, og da klarer vi ikke se minimum fra denne figuren.
- Og hvor ble det av den røde kurven? Den skulle jo være en nivåkurve gjennom punkter med lavere funksjonsverdi enn minimumet på R. Det vil si, den må ligge helt utenfor R hvis den i det hele tatt finnes. Så enten finnes den ikke, eller så ligger den utenfor det variasjonsområdet vi har valgt for parametrene. Vi kan jo prøve om den finnes ved å øke variasjonsområdet:

> $implicitplot\left(2\cdot x^2 + x + y^2 + 2 = \frac{14}{8}, x=-1000..1000, y=-1000..1000, scaling=constrained, color=red\right)$



Det ser lite lovende ut. For å være sikker, kan vi studere likningen $2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = \frac{14}{8}$. Den beste sjansen for å finne punkter, er å sette $y = 0$. Spørsmålet er da om det finnes x slik at $2 \cdot x^2 + x + 2 = \frac{14}{8}$. Vi prøver:

> $solve\left(2\cdot x^2 + x + 2 = \frac{14}{8}, x\right)$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,I,\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,I \qquad \textbf{(10}$$

Som vi ser: det finnes ingen reelle x-verdier som er slik. Altså har den røde nivåkurven ingen punkter.
Den magenta prikken ligger nok innenfor den grønne nivårkurven, for funksjonen vår er kontinuerlig, så det MÅ finnes et minimumspunkt innenfor denne kurven.