Oppgave 11.7.13.

> $with(plots)$

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*] **(1**

a)

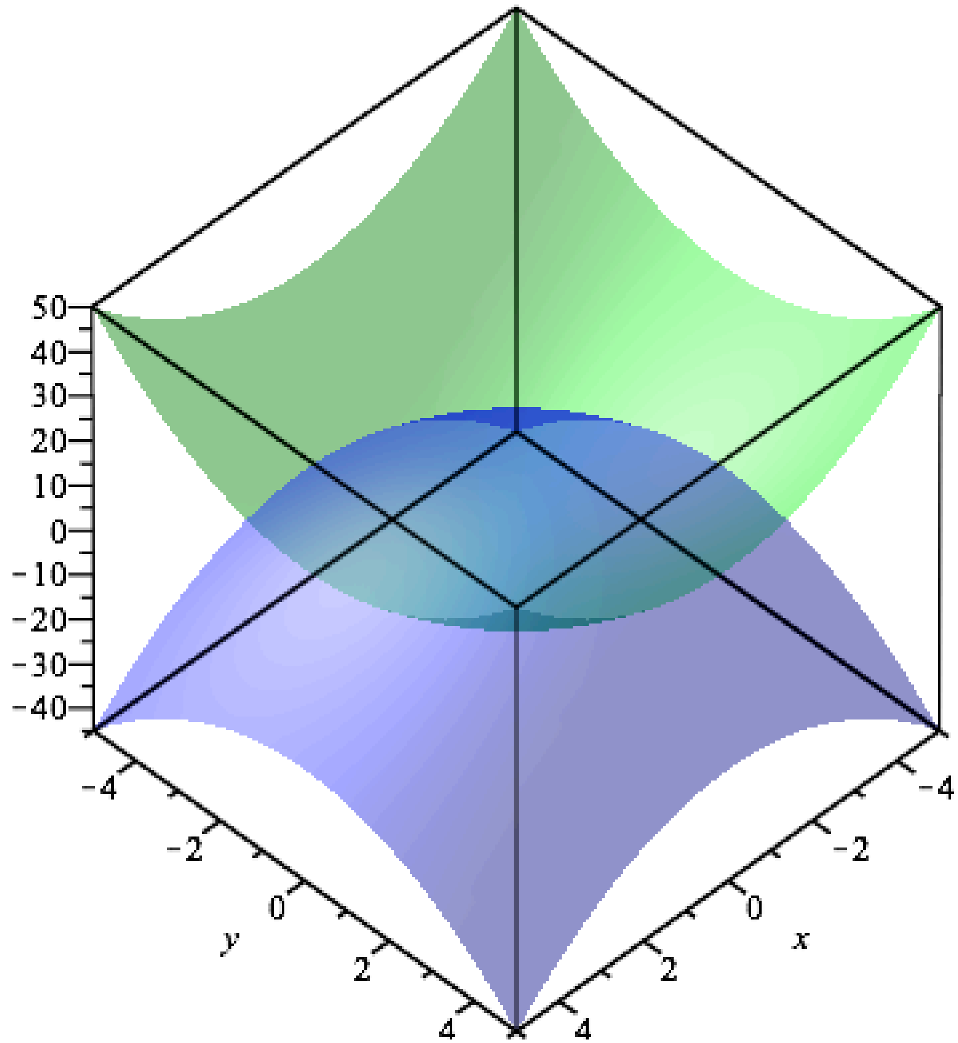
> $P1 := plot3d\left(x^2 + y^2, x = -5\,..5, y = -5\,..5, \text{style} = \text{surface}, \text{transparency} = 0.5, \text{color} = \text{green}\right)$

$$P1 := PLOT3D(\ldots)$$ **(2**

> $P2 := plot3d\left(5 - x^2 - y^2, x = -5\,..5, y = -5\,..5, \text{style} = \text{surface}, \text{transparency} = 0.5, \text{color} = \text{blue}\right)$

$$P2 := PLOT3D(\ldots)$$ **(3**

> $display(P1, P2)$



Det ser ut til at dette blir to rotasjonsparaboloider som står mot hverandre, og derved avgrenser et område mellom dem.
Ser vi litt nøyere på likningene for de to flatene, ser vi at slik er det.
De må skjære hverandre langs en sirkel.
Vi ser det hele tydeligere om vi skriver likningene i sylinderkoordinater:

P1: $z = r^2$

P2: $z = 5 - r^2$

De skjærer hverandre når $r^2 = 5 - r^2$, altså $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ der høyden er $z = r^2 = \frac{5}{2}$

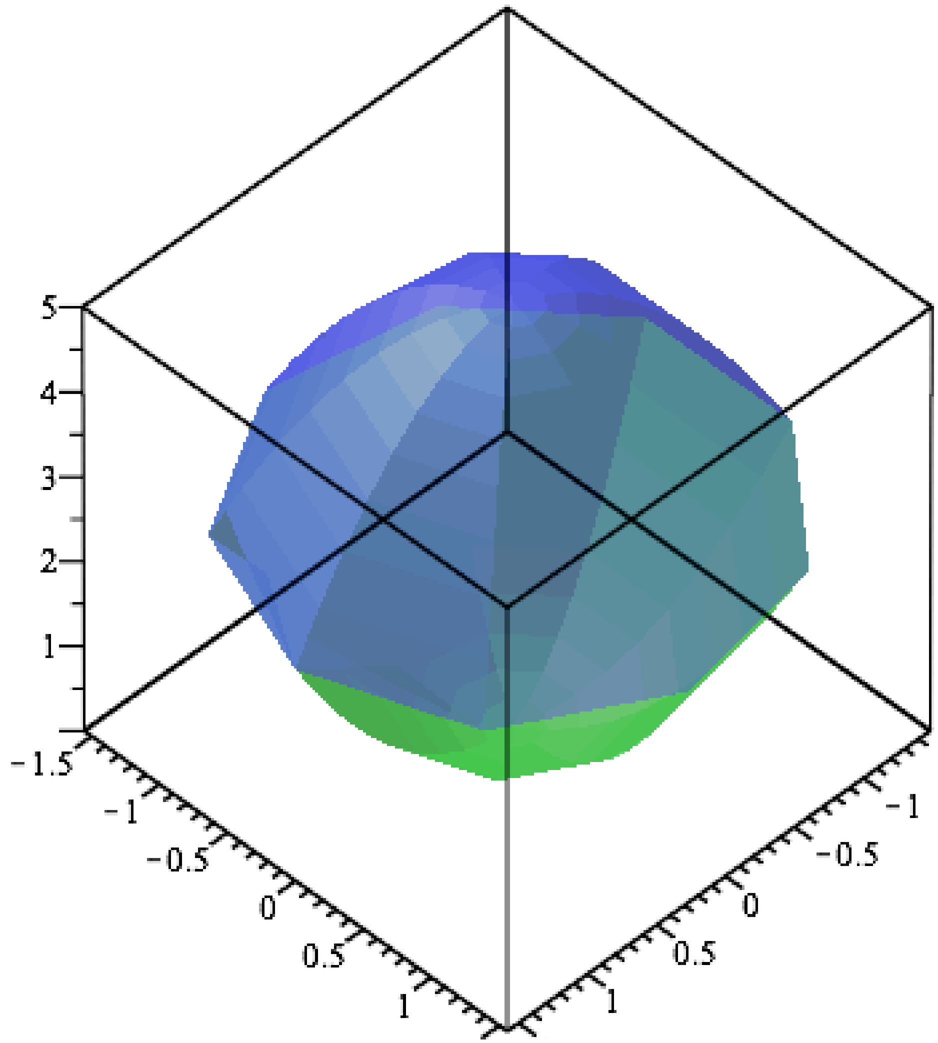
> $P1 := implicitplot3d\left(\mathrm{z} = \mathrm{r}^2, \mathrm{r} = 0..\mathrm{sqrt}\left(\frac{5}{2}\right), \mathrm{theta} = 0..2\cdot\mathrm{Pi}, z = 0..\frac{5}{2}, style = surface, transparency = 0.5, color = green, coords = cylindrical\right)$

$$P1 := PLOT3D(\ldots) \quad (4$$

> $P2 := implicitplot3d\left(\mathrm{z} = 5 - \mathrm{r}^2, \mathrm{r} = 0..\mathrm{sqrt}\left(\frac{5}{2}\right), \mathrm{theta} = 0..2\cdot\mathrm{Pi}, z = \frac{5}{2}..5, style = surface, transparency = 0.5, color = blue, coords = cylindrical\right)$

$$P2 := PLOT3D(\ldots) \quad (5$$

> $display(P1, P2)$



Når vi snur og dreier litt på figuren, ser vi tydeligere at z må gå fra den grønne flaten til den blå, altså fra $z = (x^2 + y^2)$ til $z = 5 - (x^2 + y^2)$.
For å få med oss alle søylene, må vi integrere over sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}$ i xy-planet.
Det er klart at det må lønne seg å integrere i sylinderkoordinater, for figuren er begrenset av rotasjonsflater om z-aksen.
I sylinderkoordinater er $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\int_{z=r^2}^{5-r^2} \mathrm{r}\ \mathrm{dz}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta.$

> $int\left(int\left(int\left(r, z = r^2 ..5 - r^2\right), r = 0 ..\mathrm{sqrt}\left(\frac{5}{2}\right)\right), \mathrm{theta} = 0 ..2\cdot\mathrm{Pi}\right)$

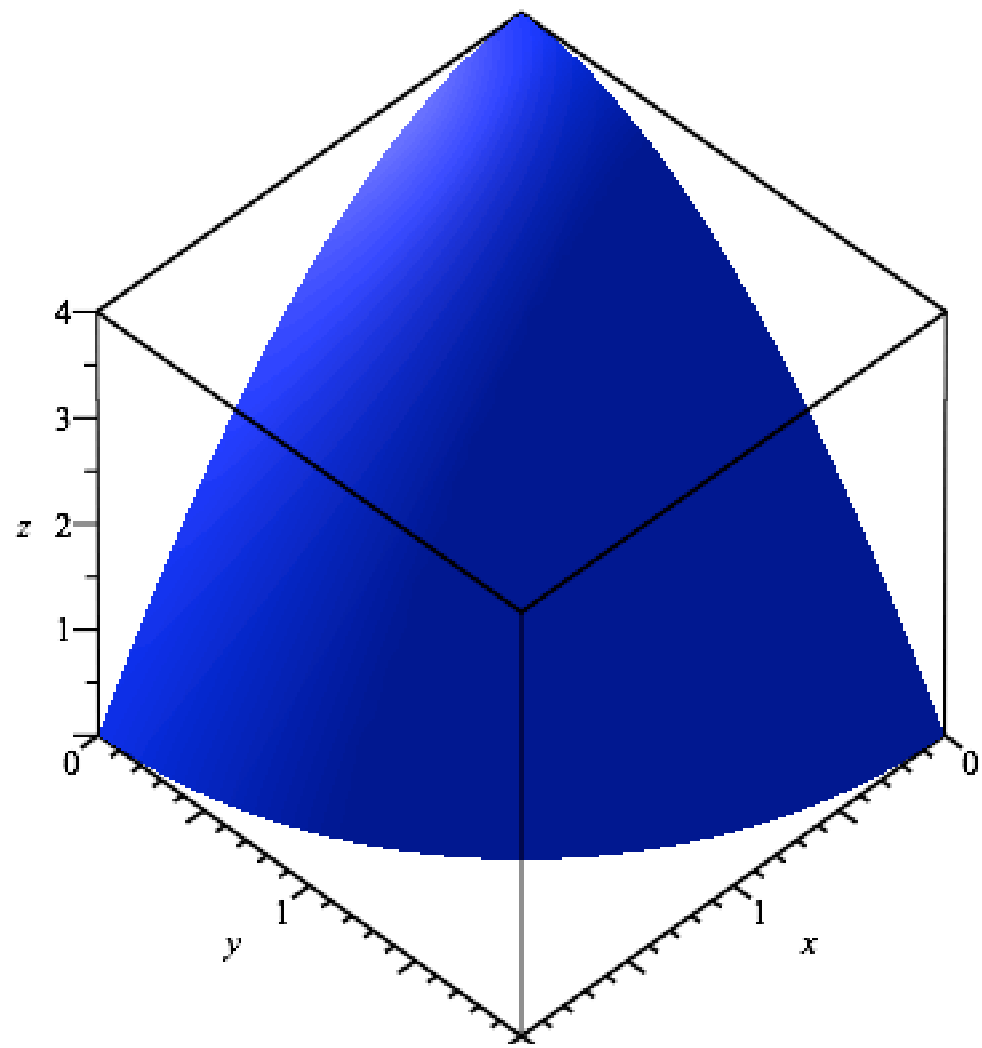
$$\frac{25}{4}\pi \tag{6}$$

e)

Flatene $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ er de tre koordinatplanene, så her holder det med å tegne flaten $z = 4 - x^2 - y^2$. I sylinderkoordinater skrives den $z = 4 - r^2$.

Vi velger å tegne den i sylinderkoordinater. Men siden vi bare skal ha den delen av flaten som ligger i første oktant, vil θ bare gå fra 0 til $\frac{\pi}{2}$

> $plot3d\left(\left[r, \mathrm{theta}, 4 - r^2\right], r = 0 ..2, \mathrm{theta} = 0 ..\frac{\mathrm{Pi}}{2}, coords = cylindrical, style = surface, color = \text{"blue"}, axes = boxed, labels = [x, y, z]\right)$



De manglende sidene er de tre koordinatplanene i første oktant, fra origo og ut til den blå flaten. (Drei gjerne litt på figuren for å se hvordan flaten går.)
Volumet til T er derfor

> $int\left(int\left(int\left(r, z = 0 .. 4 - r^2\right), r = 0 .. 2\right), \text{theta} = 0 .. \frac{\text{Pi}}{2}\right)$

$$2\pi \tag{7}$$

For å tegne et skikkelig bilde av T må vi naturligvis ha med de manglende sidene:

> $P1 := plot3d\left(\left[r, \text{theta}, 4-r^2\right], r=0..2, \text{theta}=0..\frac{\text{Pi}}{2}, coords=cylindrical, style=surface, color=blue\right)$

$$P1 := PLOT3D(\ldots) \tag{8}$$

> $P2 := plot3d\left([r, \text{theta}, 0], r=0..2, \text{theta}=0..\frac{\text{Pi}}{2}, coords=cylindrical, style=surface, color=\text{yellow}, transparency=0.5\right)$

$$P2 := PLOT3D(\ldots) \tag{9}$$

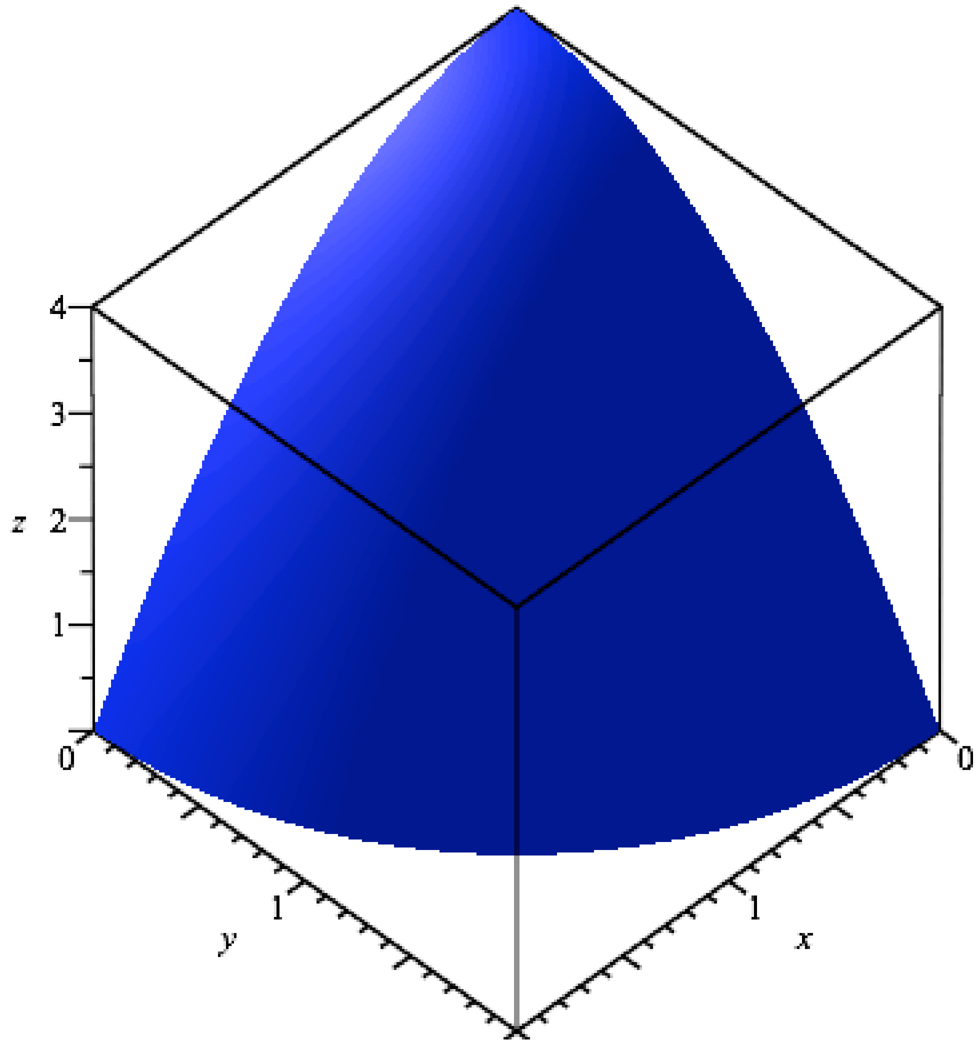
> $P3 := plot3d\left(\left[r, \frac{\text{Pi}}{2}, \text{z}\right], r=0..2, \text{z}=0..4-\text{r}^2, coords=cylindrical, style=surface, color=\text{yellow}, transparency=0.5\right)$

$$P3 := PLOT3D(\ldots) \tag{10}$$

> $P4 := plot3d([r, 0, \text{z}], r=0..2, \text{z}=0..4-\text{r}^2, coords=cylindrical, style=surface, color=\text{yellow}, transparency=0.5)$

$$P4 := PLOT3D(\ldots) \tag{11}$$

> $display(P1, P2, P3, P4, axes=boxed, labels=[x, y, z])$



Oppgave 11.7.14.

a)

I kulekoordinater er T gitt ved $1 \leq \rho \leq 2$ for $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det er området mellom to kuleflater med sentrum i origo. Den indre kuleflaten har radius 1, mens den ytre kuleflaten har radius 2.
Det er antakelig letter å se få med begge kuleflatene på figuren om vi bare tegner den delen av figuren som ligger til høyre for xz-planet.

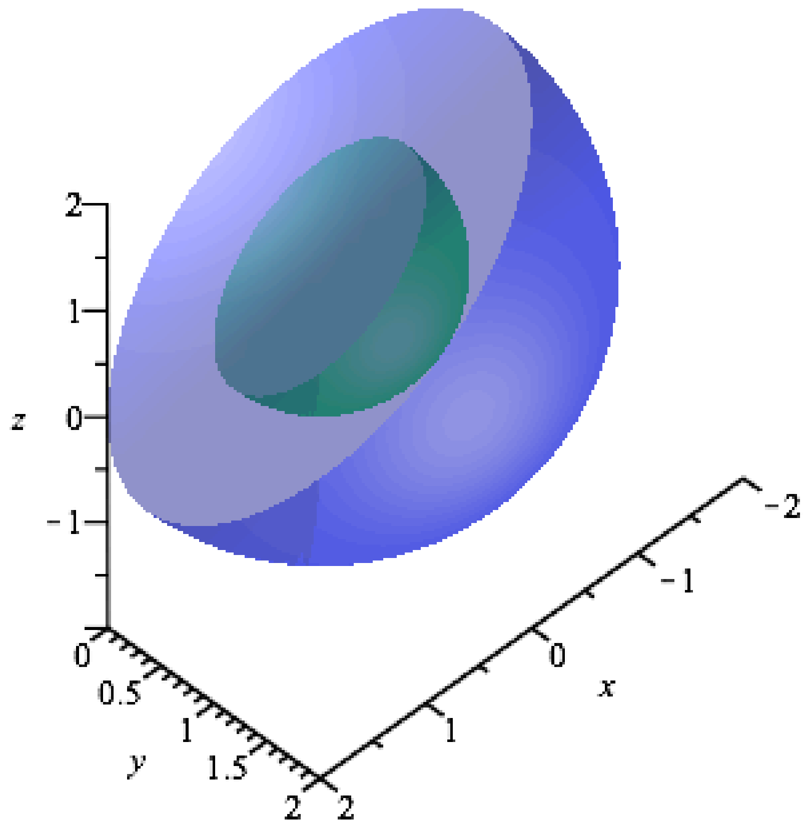
```
> P1 := plot3d(1, theta = 0 ..π, phi = 0 ..π, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.5, color = green)
```

$$P1 := PLOT3D(...) \tag{12}$$

```
> P2 := plot3d(2, theta = 0 ..π, phi = 0 ..π, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.5, color = blue)
```

$$P2 := PLOT3D(...) \tag{13}$$

```
> display(P1, P2, axes = framed, labels = [x, y, z])
```



For å finne volumet av T, trenger vi egentlig ikke å integrere. Volumet av en kule med radius R er jo $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volumet av T er derfor $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28\,\pi}{3}$.

Men vi kan jo be Maple omå integrere for kontrollens skyld:

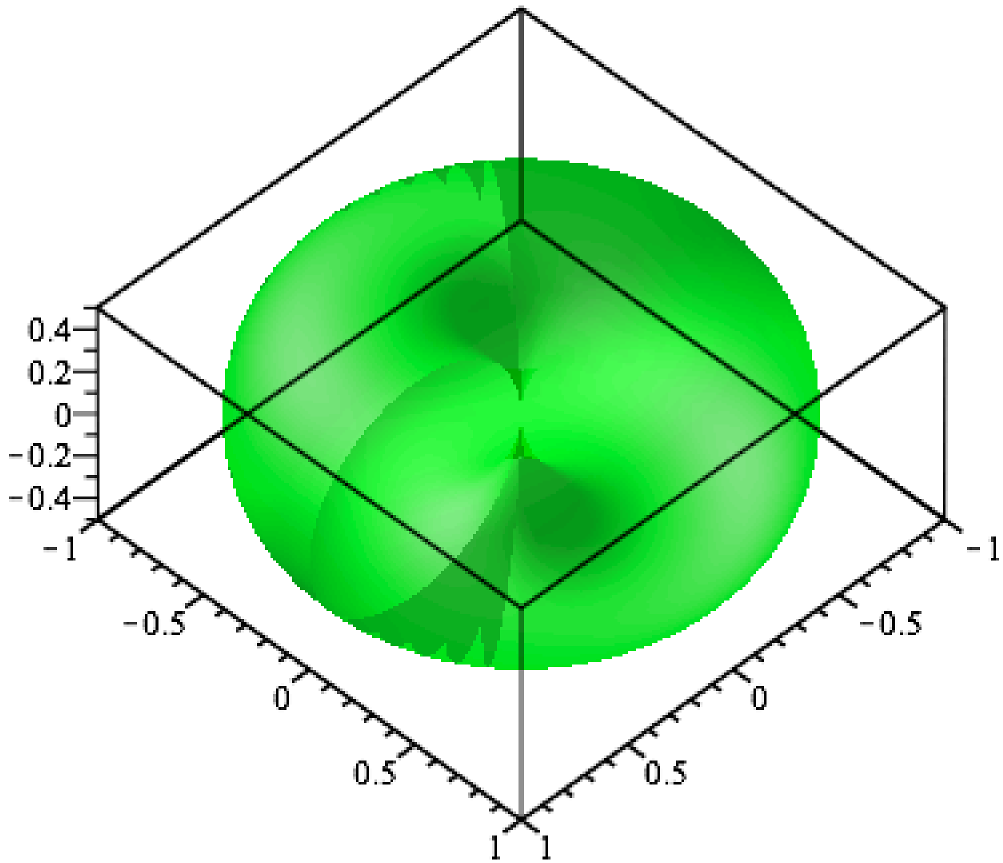
> $int\left(int\left(int\left(r^2 \cdot \sin(\text{phi}), r = 1..2\right), \text{phi} = 0..\text{Pi}\right), \text{theta} = 0..2 \cdot \text{Pi}\right)$

$$\frac{28}{3}\pi \qquad (14$$

b)

I kulekoordinater er T avgrenset av flaten gitt ved $0 \leq \rho \leq \sin(\text{phi})$ for $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Vi plotter denne flaten:

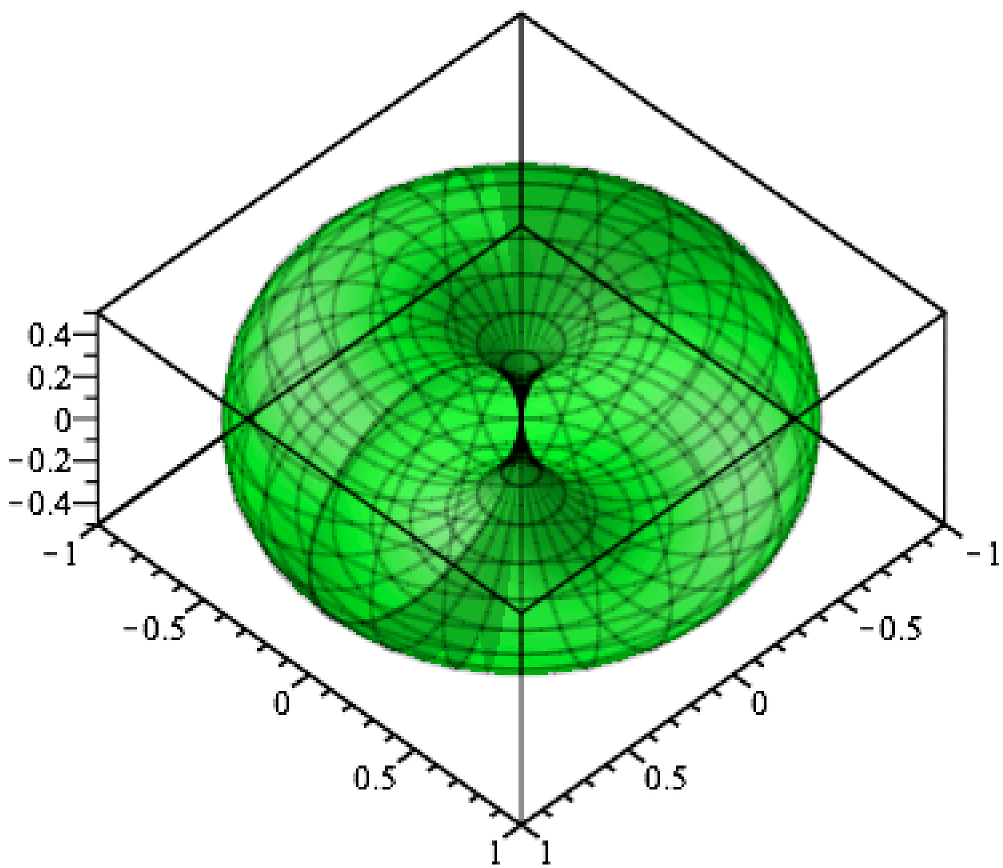
> $plot3d\left(\sin(\text{phi}), \text{theta} = 0..2 \cdot \pi, \text{phi} = 0..\pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.3, color = green\right)$



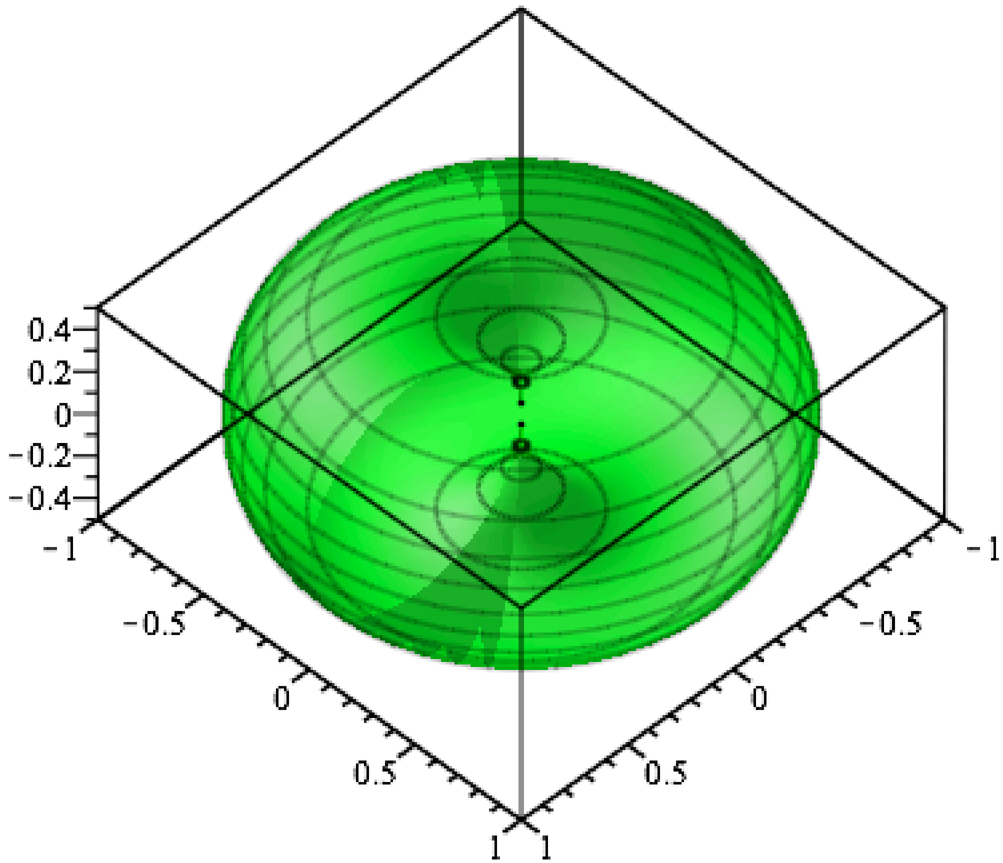
>

Det er ikke så lett å bli klar over hvordan denne figuren ser ut. La oss legge på noen strukturlinjer:

> *plot3d*(sin(phi), theta = 0 ..2 · π, phi = 0 .. π, *coords* = *spherical*, *scaling* = *constrained*, *style* = *patch*, *transparency* = 0.3, *color* = *green*)



> $plot3d(\sin(\text{phi}), \text{theta} = 0..2\cdot\pi, \text{phi} = 0..\pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surfacecontour, transparency = 0.3, color = green)$



Det er nok en slags smultring med hull langs z-aksen tvers igjennom, unntatt i origo
Integralet er lettere å regne ut:

> $int\left(int\left(int\left(\rho^2 \cdot \sin(\text{phi}), \text{rho} = 0..\sin(\text{phi})\right), \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}\right), \text{phi} = 0..\text{Pi}\right)$

$$\frac{1}{4}\pi^2 \qquad (15$$