Oppgave 7.2.6

a)

> $x := 1.0$

$$x := 1.0 \tag{1}$$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 20 **do** $x := \sin(x)$ **end do**

$$x := 0.8414709848$$
$$x := 0.7456241417$$
$$x := 0.6784304774$$
$$x := 0.6275718321$$
$$x := 0.5871809966$$
$$x := 0.5540163908$$
$$x := 0.5261070755$$
$$x := 0.5021706763$$
$$x := 0.4813293553$$
$$x := 0.4629578986$$
$$x := 0.4465965934$$
$$x := 0.4318984333$$
$$x := 0.4185956610$$
$$x := 0.4064777650$$
$$x := 0.3953765470$$
$$x := 0.3851557131$$
$$x := 0.3757034469$$
$$x := 0.3669270011$$
$$x := 0.3587486881$$
$$x := 0.3511028590 \tag{2}$$

Iterasjonen ser ut til å konvergere sakte mot null som er det eneste fikspunktet for sin x.

d)

Det er klart at $f(x) = 0$ hvis og bare hvis $\frac{(x^2 + 2x)}{4} = x$, altså hvis og bare hvis $x^2 - 2x = 0$. f har derfor akkurat to fikspunkter, nemli

$x = 0$ og $x = 2$.

Vi starter med midtpunktet mellom dem og ser hva som skjer:

> $x := 1.0$

$$x := 1.0 \quad (3$$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$ **end do**

$$x := 0.7500000000$$
$$x := 0.5156250000$$
$$x := 0.3242797852$$
$$x := 0.1884292374$$
$$x := 0.1030910131$$
$$x := 0.05420244580$$
$$x := 0.02783569918$$
$$x := 0.01411155613$$
$$x := 0.007105562069$$
$$x := 0.003565403287$$
$$x := 0.001785879669$$
$$x := 0.0008937371760$$
$$x := 0.0004470682795$$
$$x := 0.0002235841073$$
$$x := 0.0001118045511$$

$$x := 0.00005590540061$$
$$x := 0.00002795348165$$
$$x := 0.00001397693617$$
$$x := 0.000006988516924$$
$$x := 0.000003494270672 \quad (4$$

Iterasjonen ser ut til å konvergere mot null. Hva om vi prøver med en $x > 2$:

> $x := 5.0$

$$x := 5.0 \quad (5$$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2\cdot x)}{4}$ **end do**

$$x := 8.750000000$$
$$x := 23.51562500$$
$$x := 150.0039673$$
$$x := 5700.299536$$
$$x := 8.126203850\ 10^{6}$$
$$x := 1.650880131\ 10^{13}$$
$$x := 6.813513018\ 10^{25}$$
$$x := 1.160598991\ 10^{51}$$
$$x := 3.367475045\ 10^{101}$$
$$x := 2.834972045\ 10^{202}$$
$$x := 2.009266624\ 10^{404}$$
$$x := 1.009288092\ 10^{808}$$
$$x := 2.546656132\ 10^{1615}$$
$$x := 1.621364364\ 10^{3230}$$
$$x := 6.572056002\ 10^{6459}$$

$$x := 1.079798002\ 10^{12919}$$

$$x := 2.914909312\ 10^{25837}$$

$$x := 2.124174074\ 10^{51674}$$

$$x := 1.128028874\ 10^{103348}$$

$$x := 3.181122852\ 10^{206695}$$ (6

Det ser ut til å blåse opp til uendelig.
Vi prøver litt nærmere $x = 2$:

> $x := 2.1$

$$x := 2.1$$ (7

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$ **end do**

$$x := 2.152500000$$

$$x := 2.234564062$$

$$x := 2.365601168$$

$$x := 2.581817806$$

$$x := 2.957354699$$

$$x := 3.665164054$$

$$x := 5.190938912$$

$$x := 9.331931154$$

$$x := 26.43720034$$

$$x := 187.9499906$$

$$x := 8925.274737$$

$$x := 1.991959492\ 10^{7}$$

$$x := 9.919757541\ 10^{13}$$

$$x := 2.460039742\ 10^{27}$$

$$x := 1.512948883\ 10^{54}$$
$$x := 5.722535808\ 10^{107}$$
$$x := 8.186854018\ 10^{214}$$
$$x := 1.675614468\ 10^{429}$$
$$x := 7.019209612\ 10^{857}$$
$$x := 1.231732590\ 10^{1715} \quad \textbf{(8}$$

Hva om vi starter med x bittelitte granne mindre enn 2:

> $x := 1.99999$

$$x := 1.99999 \quad \textbf{(9}$$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2\cdot x)}{4}$ **end do**

$$x := 1.999985000$$
$$x := 1.999977500$$
$$x := 1.999966250$$
$$x := 1.999949375$$
$$x := 1.999924063$$
$$x := 1.999886096$$
$$x := 1.999829147$$
$$x := 1.999743728$$
$$x := 1.999615608$$
$$x := 1.999423449$$
$$x := 1.999135256$$
$$x := 1.998703071$$
$$x := 1.998055027$$
$$x := 1.997083486$$
$$x := 1.995627356$$

$x := 1.993445814$

$x := 1.990179460$

$x := 1.985293301$

$x := 1.977994023$

$x := 1.967112100$ **(10**

Iterasjonen avtar. Antakelig går den mot null igjen. Vi prøver litt lenger. Ved ikke å gi x en ny startverdi, blir startverdien den verdien den allerede har, nemlig den siste verdien i listen vi nettopp fikk.

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \dfrac{(x^2 + 2\cdot x)}{4}$ **end do**

$x := 8.307891970\ 10^{-58}$

$x := 4.153945985\ 10^{-58}$

$x := 2.076972992\ 10^{-58}$

$x := 1.038486496\ 10^{-58}$

$x := 5.192432480\ 10^{-59}$

$x := 2.596216240\ 10^{-59}$

$x := 1.298108120\ 10^{-59}$

$x := 6.490540600\ 10^{-60}$

$x := 3.245270300\ 10^{-60}$

$x := 1.622635150\ 10^{-60}$

$x := 8.113175750\ 10^{-61}$

$x := 4.056587875\ 10^{-61}$

$x := 2.028293938\ 10^{-61}$

$x := 1.014146969\ 10^{-61}$

$x := 5.070734845\ 10^{-62}$

$$x := 2.535367422\ 10^{-62}$$

$$x := 1.267683711\ 10^{-62}$$

$$x := 6.338418555\ 10^{-63}$$

$$x := 3.169209278\ 10^{-63}$$

$$x := 1.584604639\ 10^{-63}$$ **(11**

Det går nok mot null, ja.

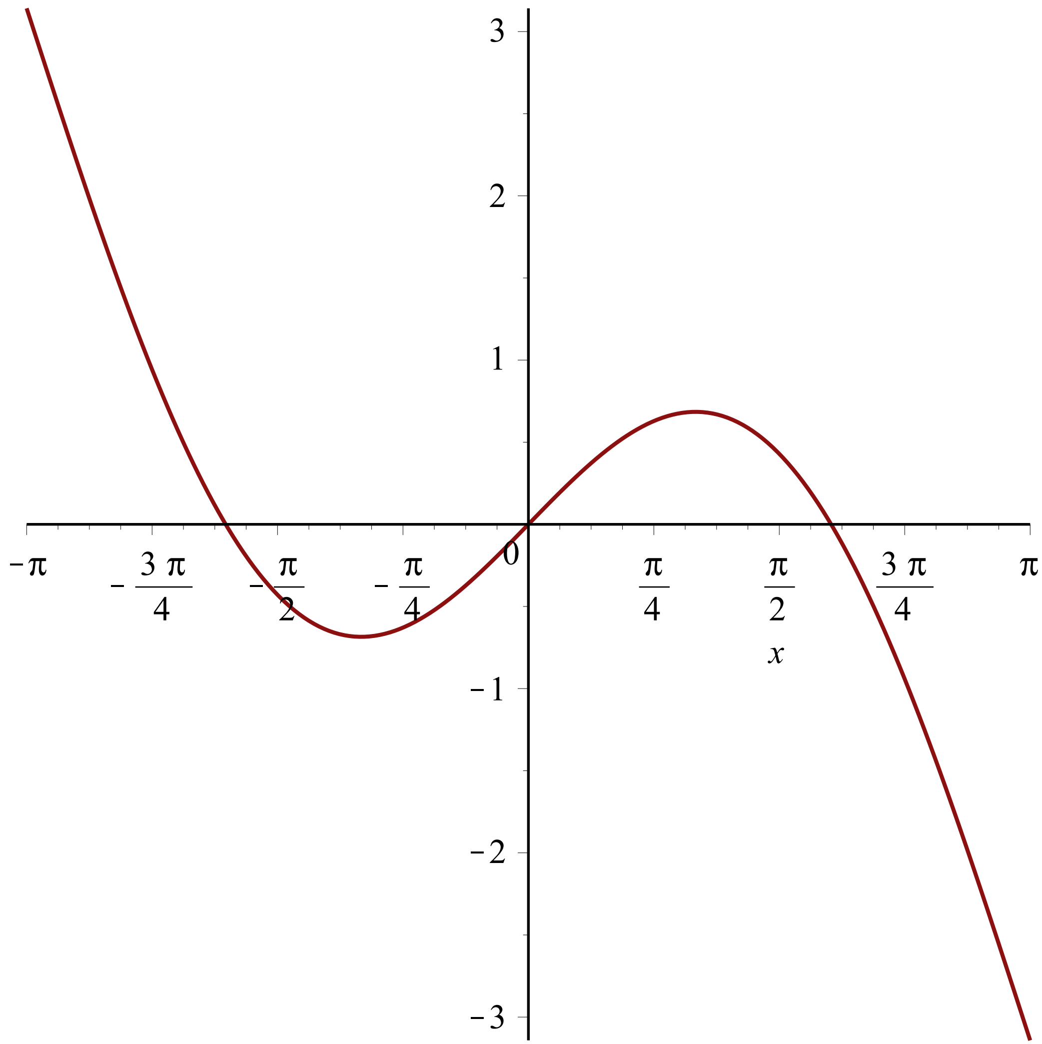
Oppgave 7.2.7.

(i)

Vi har brukt x som et tall, så det er best vi bruker *unassign* på x:

> $unassign('x')$

> $plot(2 \cdot \sin(x) - x, x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi})$

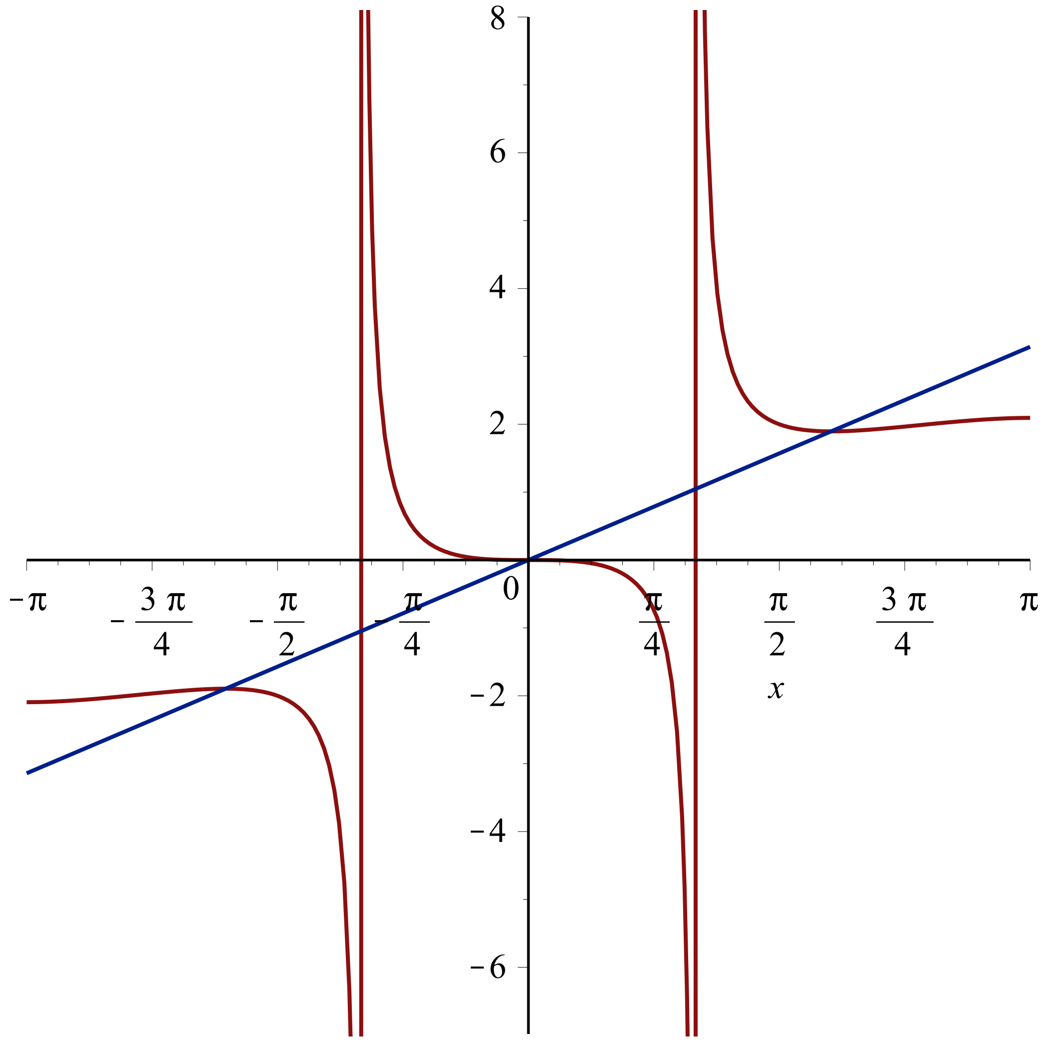


Det ser ut til at funksjonen har nullpunkter for $x = 0$ og $x \approx \pm\, \frac{11\,\pi}{16}$.

(ii)

Vi skal plotte to grafer i samme koordinatsystem, nemlig grafen til $y = x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$ og grafen til $y = x$. Det kan vi gjøre ved bruk av kommandoen *display*
Men det finnes også en raskere måte: de to funksjonene settes i en hakeparentes, adskilt med et komma i en *plot*-kommando:

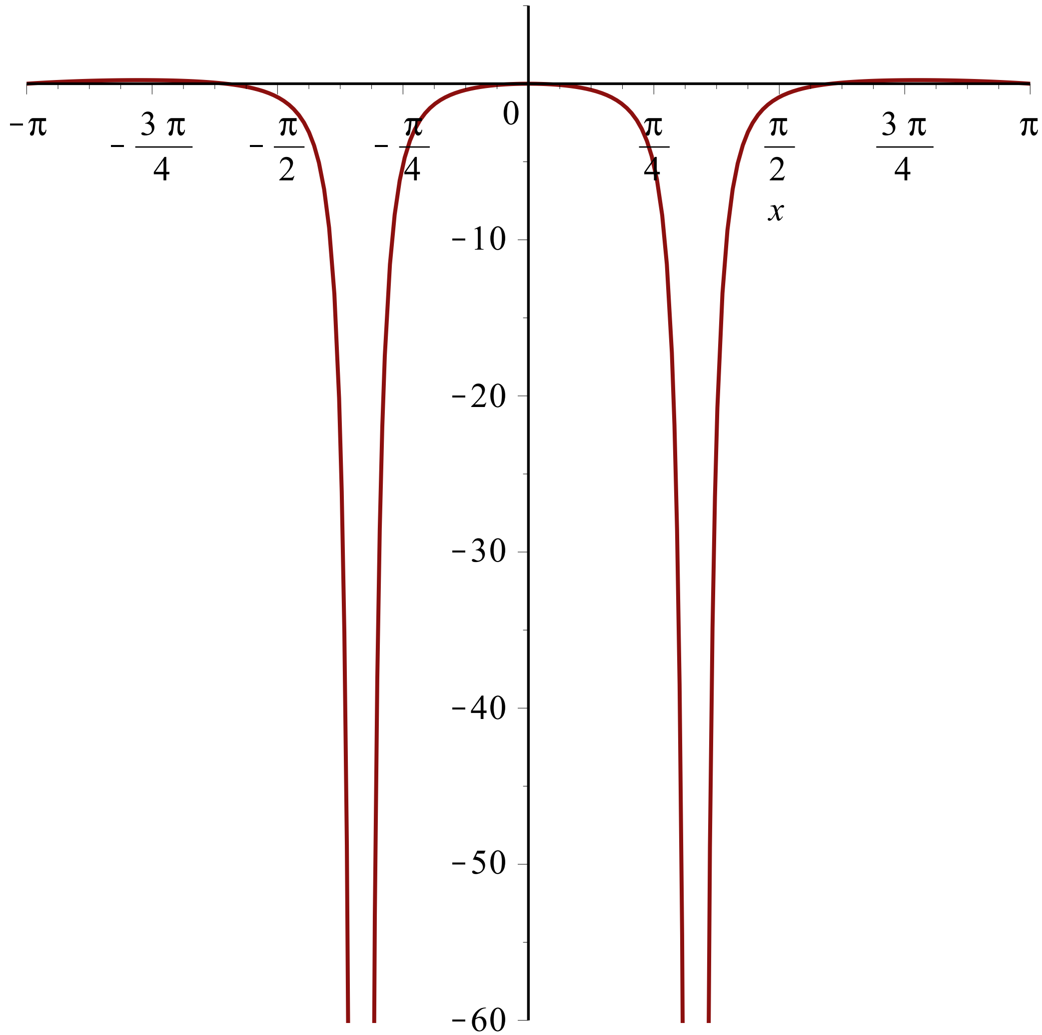
> $plot\left(\left[x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right], x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}\right)$



De tre punktene vi fant i (i) er de tre skjæringspunktene mellom de to grafene på denne figuren. Hvorfor?

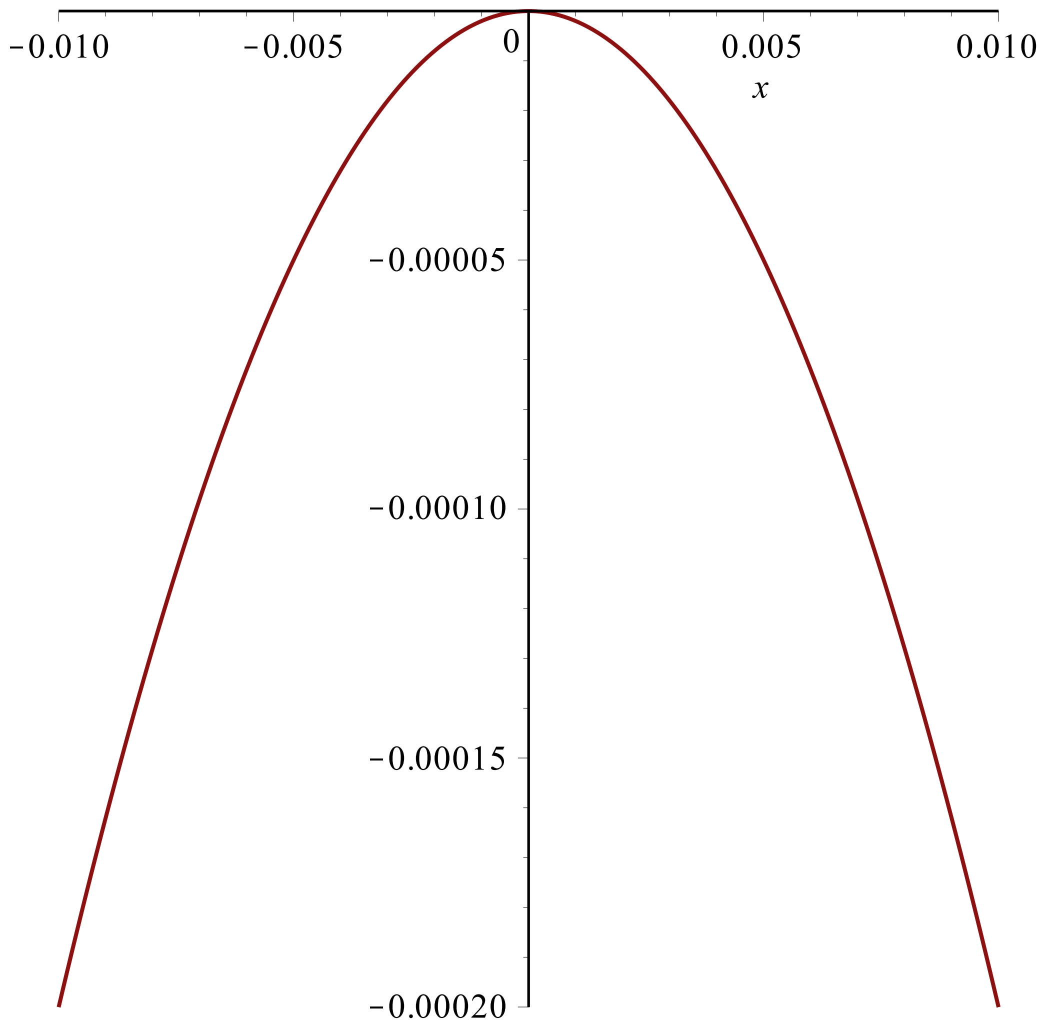
(iii)

> $plot\left(\operatorname{diff}\left(x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}, x\right), x = -\text{Pi}..\text{Pi}\right)$

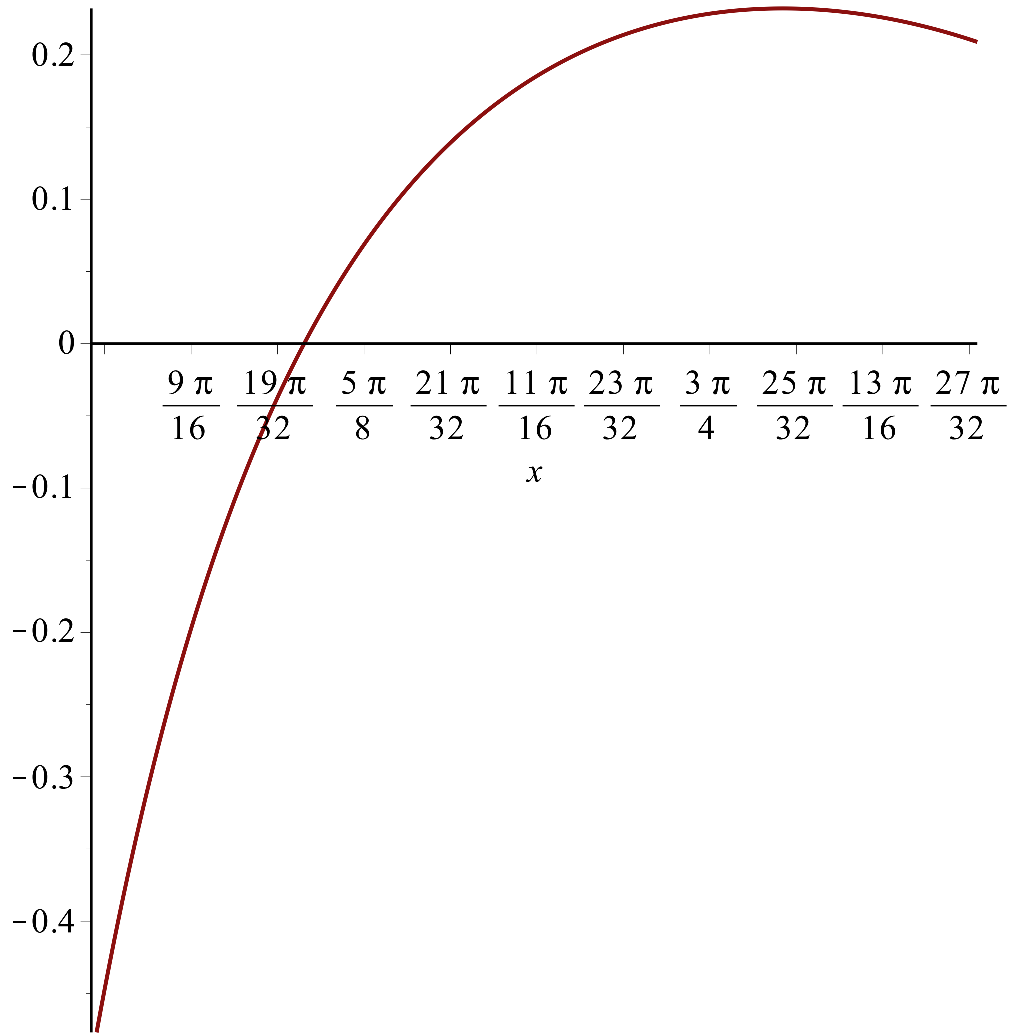


Ikke bare ser det ut til at de deriverte av $F(x)$ er lik null i de tre punktene, men den deriverte er ganske nær null i nærheten av fikspunktene også.
Men la oss plotte grafen til $F'(x)$ i små omegner om fikspunktene:

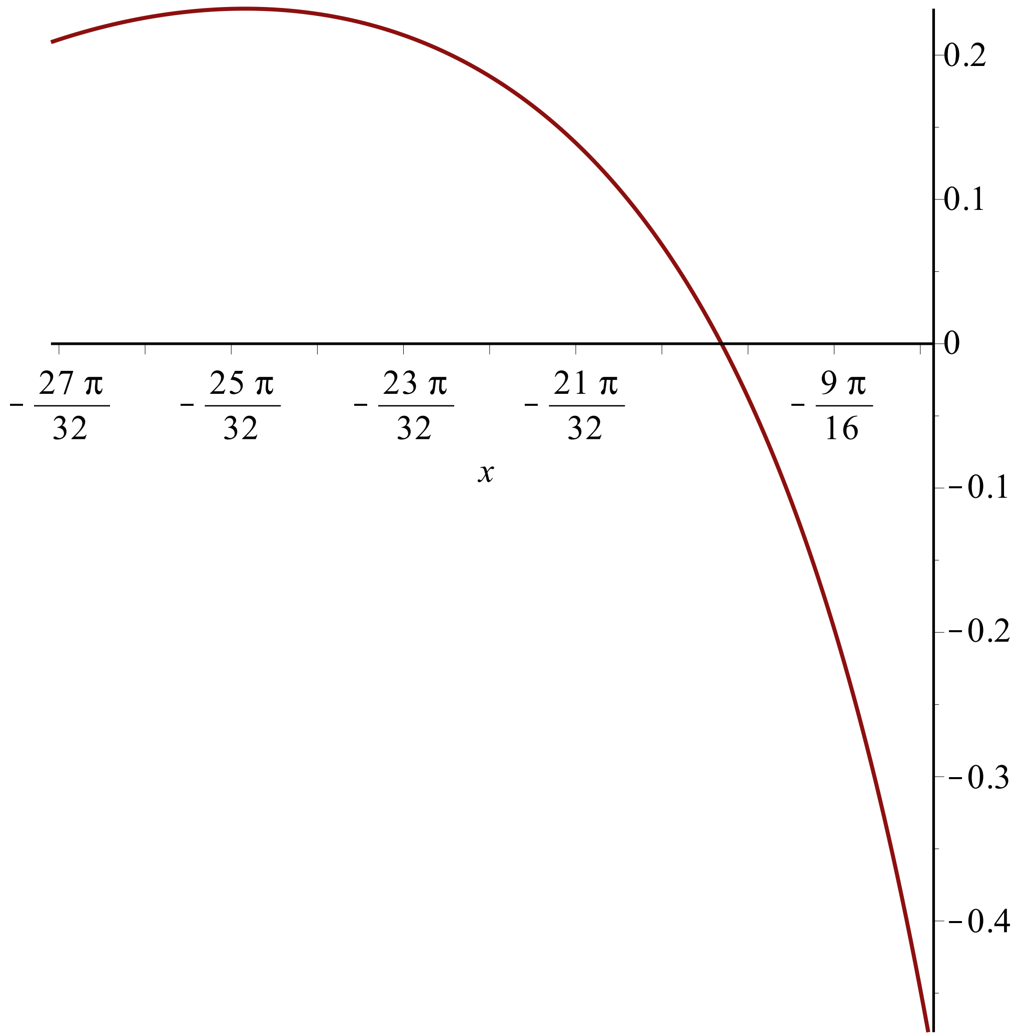
> $plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}, x\right), x = -0.01 .. 0.01\right)$



> $plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}, x\right), x = \frac{11\cdot \mathrm{Pi}}{16} - 0.5 .. \frac{11\cdot \mathrm{Pi}}{16} + 0.5\right)$



> $plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}, x\right), x = -\frac{11\cdot \mathrm{Pi}}{16} - 0.5\,..\,-\frac{11\cdot \mathrm{Pi}}{16} + 0.5\right)$



(iv)

$U = (\alpha - p,\ \alpha + p)$ være en symmetrisk omegn om fikspunktet α der $F'(x)$ er kontinuerlig med $|F'(x)| < 1$ for alle $x \in U$. La $x \in U$.

Siden $F'(x)$ er kontinuerlig i U finnes det en (positiv) konstant $K < 1$ slik at $|F'(c)| \leq K$ for alle c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α.

Videre følger det av sekantteoremet (side 133) at det finnes en c med avstand $\leq |x-\alpha|$ til α, slik at $\frac{(F(x)-F(\alpha))}{x-\alpha} = F'(c)$.

Det betyr at $|F(x)-F(\alpha)| = |F(x)-\alpha| \leq K|x-\alpha|$. Det vil si, $F(x)$ har mindre avstand til α enn x har.

Derfor må (av samme grunn) $|F \circ F(x)-\alpha| \leq K|F(x)-\alpha| \leq K^2|x-\alpha|$

og så videre. Siden $K^n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, må $F^{[n]}(x) \rightarrow \alpha$.

(v)

Vi ser først på fikspunktet nær $\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16}$

> $c := \mathrm{evalf}\left(\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16}\right)$

$$c := 2.159844950 \qquad (12$$

> $c := subs\left(x=c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)$

$$c := 2.159844950 - \frac{2\sin(2.159844950) - 2.159844950}{2\cos(2.159844950) - 1} \qquad (13$$

> $c := evalf(\%)$

$$c := 1.924471826 \qquad (14$$

> $c := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x=c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

(Vi bruker *subs* istedenfor å sette x lik verdien. Derved slipper vi å bruke *unassign('x')* etterpå.)

$$c := 1.895961262 \qquad (15$$

> $c := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x=c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

$$c := 1.895494393 \qquad (16$$

$\alpha \approx 1.895494$ er derfor en bedre approksimasjon til dette fikspunktet. På grunn av symmetrien er også $\alpha \approx -1.895494$ en bedre approksimasjon til fikspunktet nær $-\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16}$.

For $\alpha = 0$ kan vi se hva som skjer om vi starter med $x = 0.5$

> $c := 0.5$

$$c := 0.5 \tag{17}$$

> $c := \text{evalf}\left(\text{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}\right)\right)$

$$c := -0.1076168809 \tag{18}$$

> $c := \text{evalf}\left(\text{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}\right)\right)$

$$c := 0.0008396554 \tag{19}$$

> $c := \text{evalf}\left(\text{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2\cdot\sin(x) - x)}{2\cdot\cos(x) - 1}\right)\right)$

$$c := -3.950\ 10^{-10} \tag{20}$$

Det gikk veldig fort mot null.

Oppgave 7.2.8.

a)

(i)

.

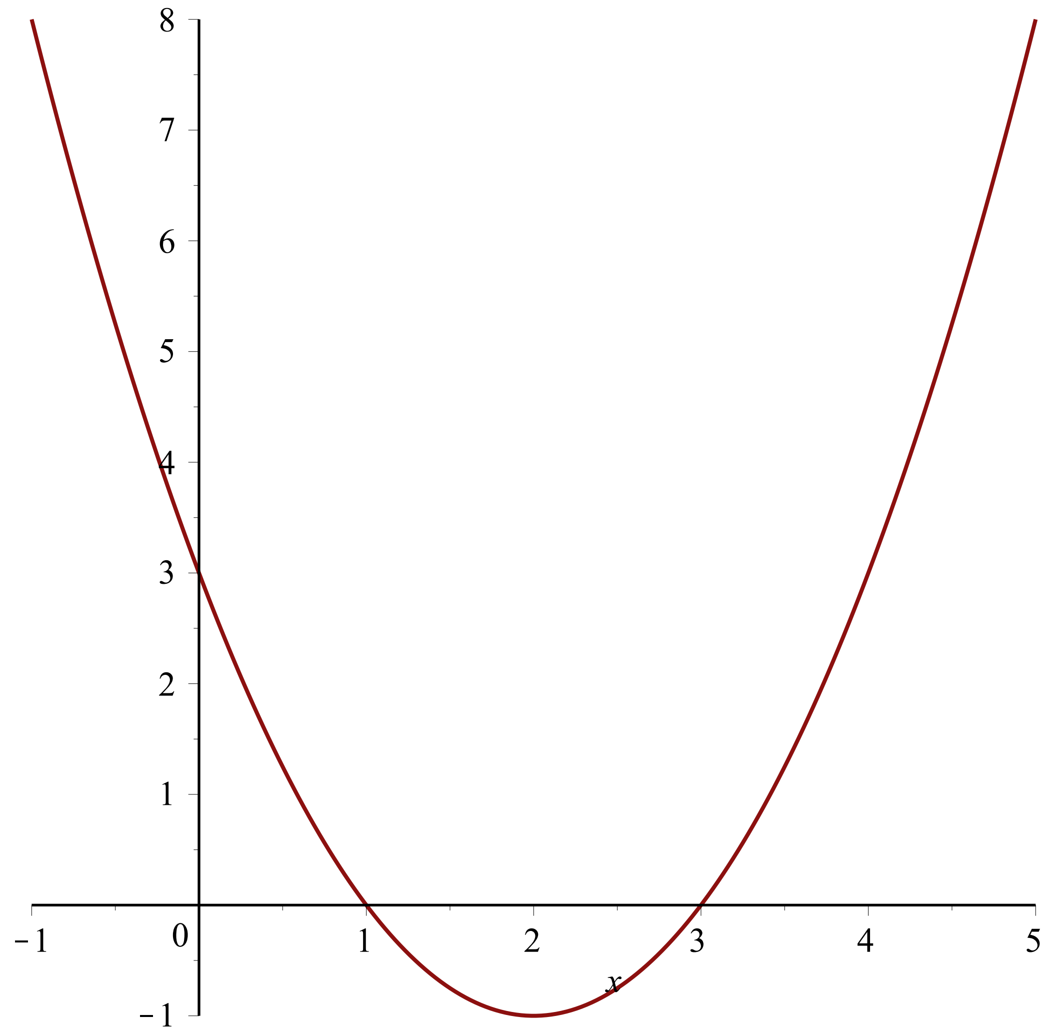
> $unassign('x')$

> $F := x \rightarrow x - \frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$

$$F := x \rightarrow x - \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 4} \tag{21}$$

(ii)

> $plot(x^2 - 4x + 3, x = -1..5)$



Det er lett å kontrollere at de to nullpunktene til f (som vi skal finne ved Newtons metode) er $x = 1$ og $x = 3$.

(iii)

> $diff(\mathrm{F}(\mathrm{x}), x)$

$$\frac{2\,(x^2-4\,x+3)}{(2\,x-4)^2} \tag{22}$$

> $solve(\% = 1, x)$

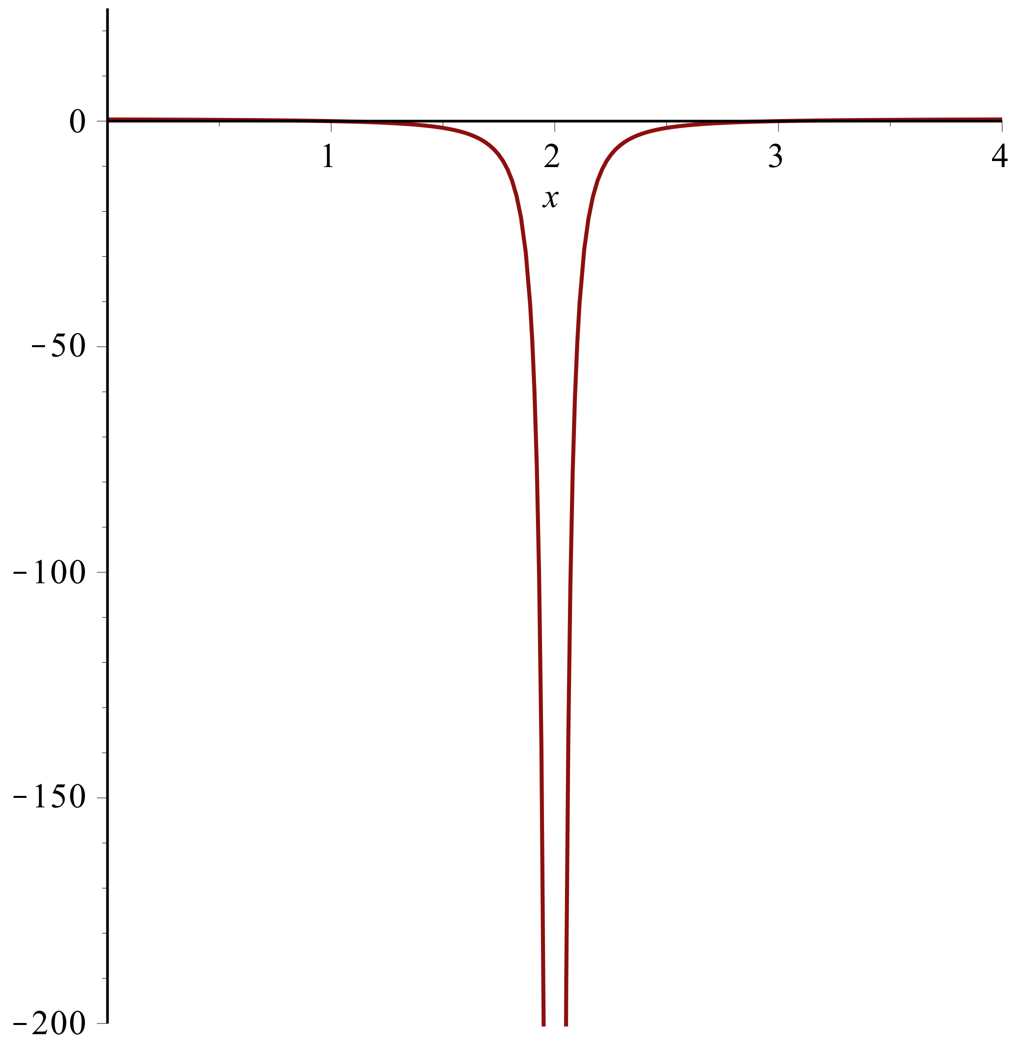
$$2-\mathrm{I}, 2+\mathrm{I} \tag{23}$$

Likningen har altså bare komplekse røtter. $F'(x) = 1$ kan derfor ikke inntreffe for noen reell x.

> $solve\left(\frac{2\,(x^2-4\,x+3)}{(2\,x-4)^2} = -1, x\right)$

$$2+\frac{1}{3}\sqrt{3}, 2-\frac{1}{3}\sqrt{3} \tag{24}$$

> $plot\left(\frac{2\,(x^2-4\,x+3)}{(2\,x-4)^2}, x = 0..4\right)$



Det er klart at $F'(x)$ er kontinuerlig for alle $x \neq 2$, og at $f(x)$ bare har de to fikspunktene 1 og 3.
Jeg foreslår derfor intervalletne $\left(-\infty, 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ og $\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$.
Som en liten kontroll ser jeg hva som skjer om jeg starter med $x = 50$: (jeg skriver 50.0 for jeg vil ikke ha eksakte svar, jeg vil ha svar på desimalform!)

> $x := 50.$

$$x := 50. \tag{25}$$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := x - \frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$ **end do**

$$x := 26.01041667$$
$$x := 14.02603263$$
$$x := 8.054592787$$
$$x := 5.109878329$$
$$x := 3.715717159$$
$$x := 3.149281905$$
$$x := 3.009695222$$
$$x := 3.000046548$$
$$x := 3.000000001$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000$$
$$x := 3.000000000 \tag{26}$$

Det ser bra ut. Og starter jeg med $x = -50$, får jeg også svar som forventet:

> $x := -50.0$

$$x := -50.0 \tag{27}$$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := x - \frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$ **end do**

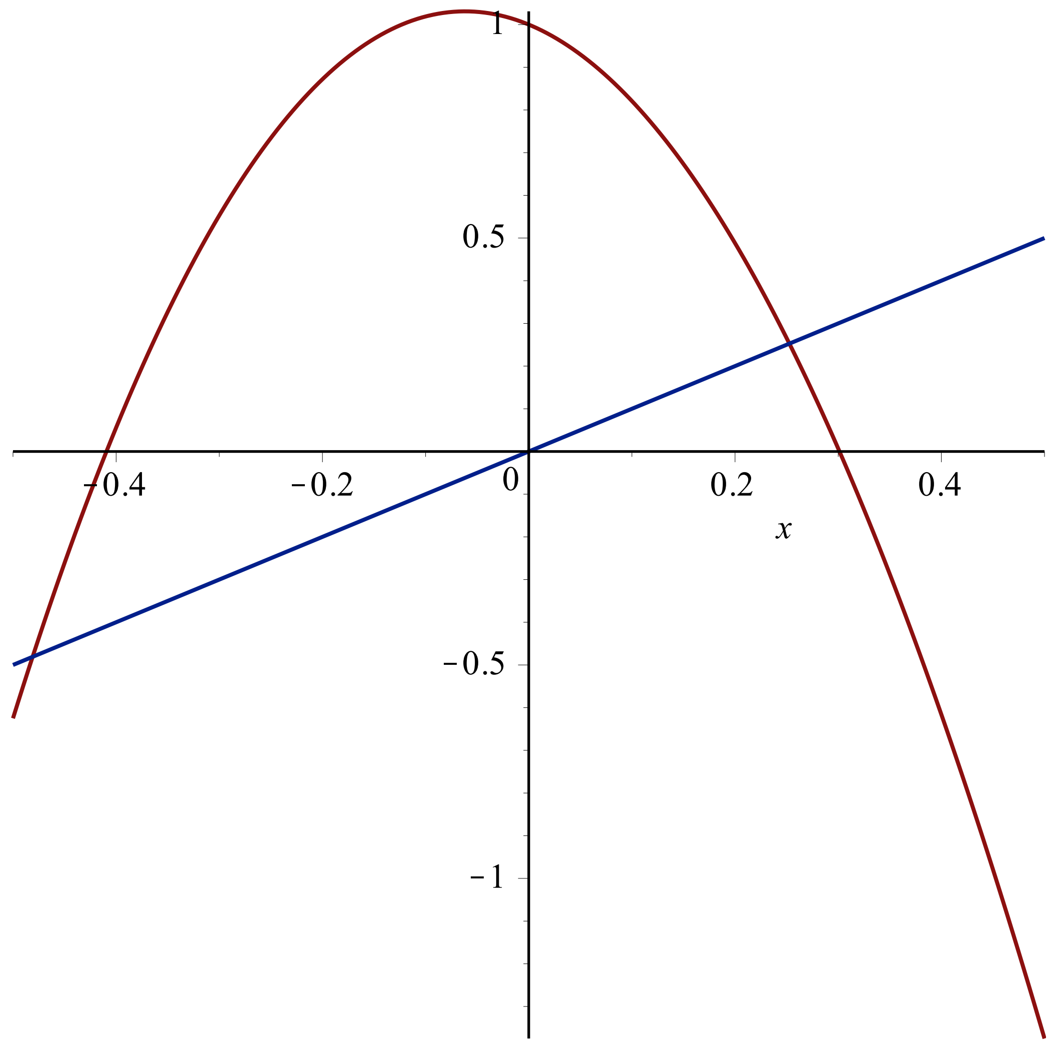
$$x := -24.00961538$$
$$x := -11.02403135$$
$$x := -4.550406246$$
$$x := -1.351534266$$
$$x := 0.175047462$$
$$x := 0.8135440030$$
$$x := 0.9853488715$$
$$x := 0.9998942222$$
$$x := 0.9999999945$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000$$
$$x := 1.000000000 \quad \textbf{(28}$$

Oppgave 7.2.9.

b)

> $unassign('x')$

> $plot\left(\left[x^3 - 8x^2 - x + 1, x\right], x = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{2}\right)$



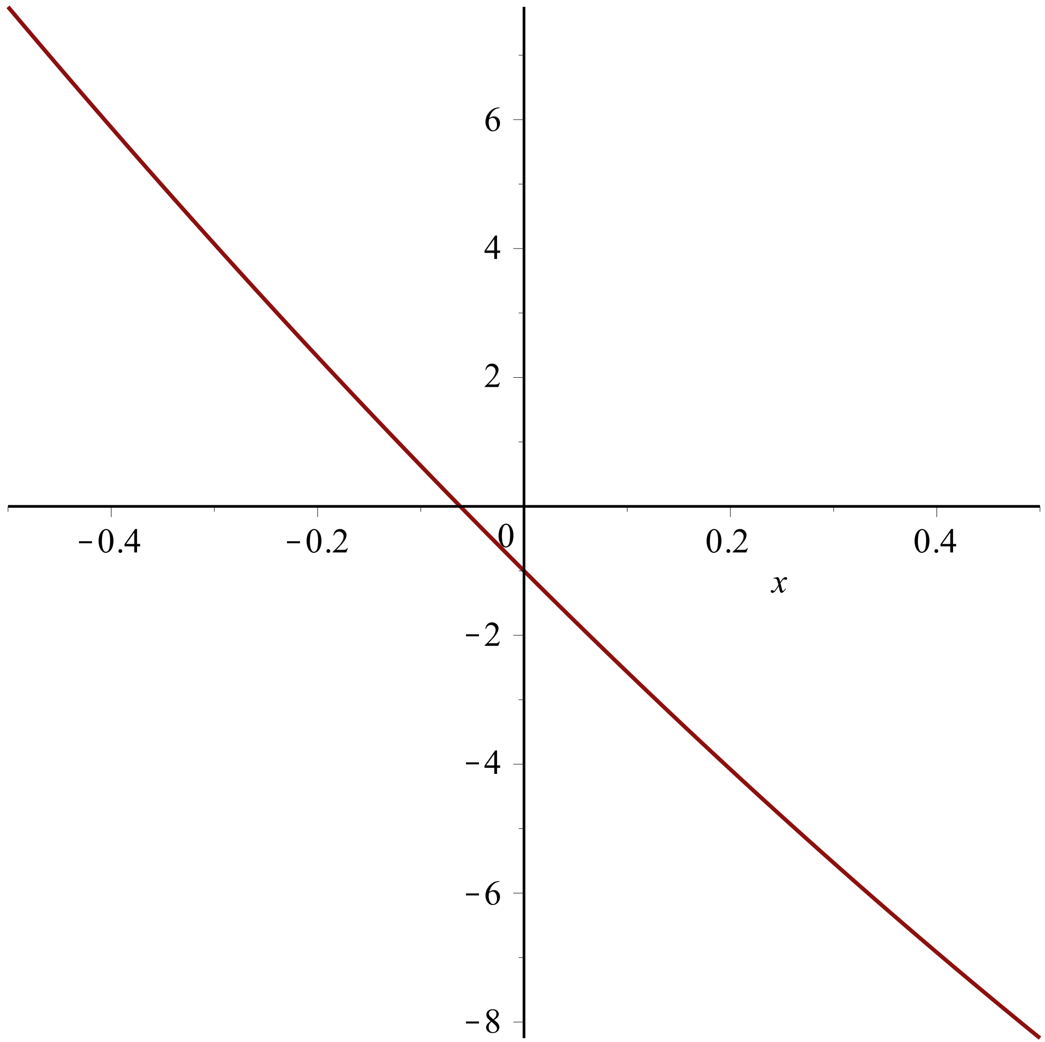
Det er klart at $y = x$ i alle punktene på den blå linjen, og at $y = f(x)$ i alle punktene på den røde kurven. I skjæringspunktene holder begge disse to likhetene. Det vil si, $y = f(x) = x$.

(ii)

> $diff\left(x^3 - 8\,x^2 - x + 1, x\right)$

$$3\,x^2 - 16\,x - 1 \qquad (29$$

> $plot\left(\%, x = -\frac{1}{2}\,..\,\frac{1}{2}\right)$



>

Kurven viser at begge fikspunktene er frastøtende.