

Newtons metode er en iterativ metode. Det vil si, vi lager en funksjon

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

starter med en x_0 og beregner $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F(x_2)$, ...

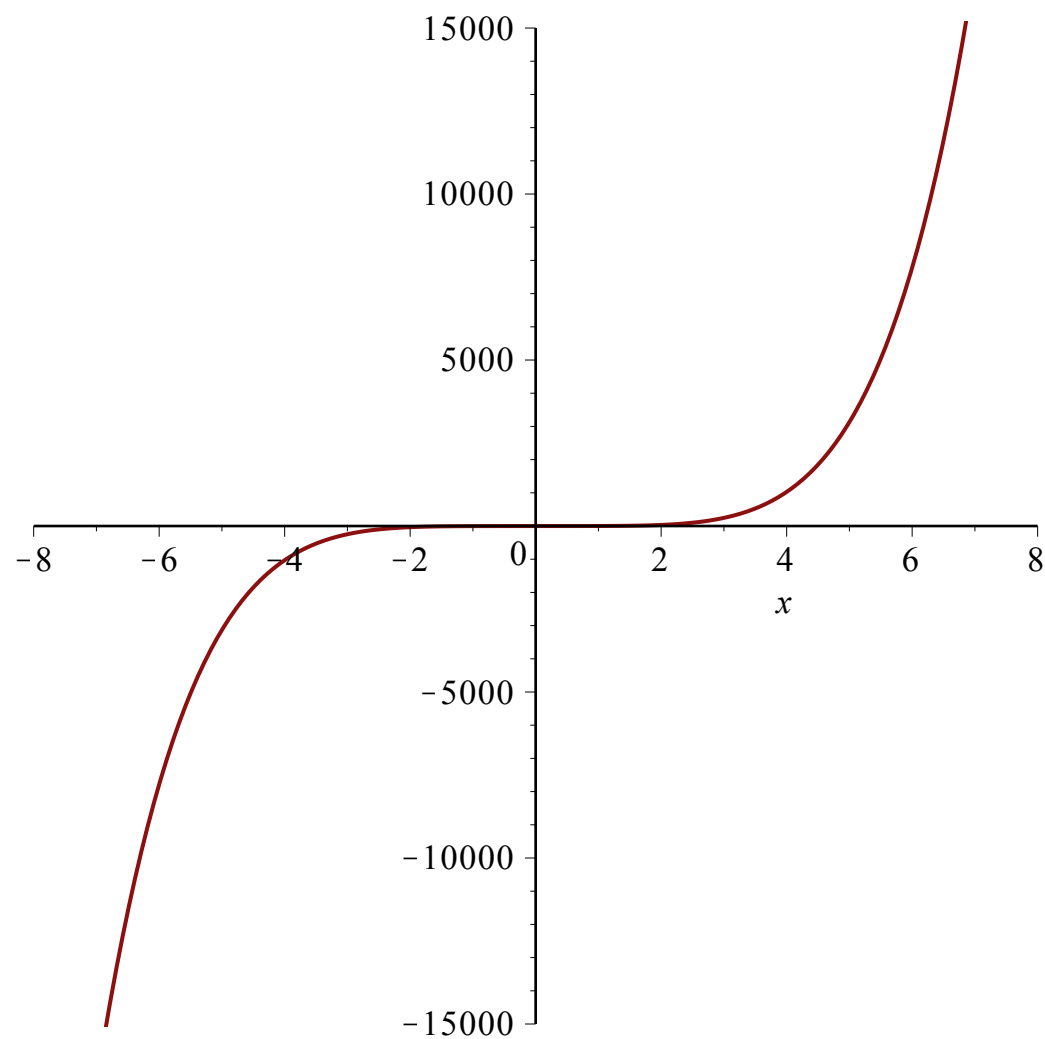
Dette er en metode der en **for**-løkke egner seg ypperlig. Spørsmålet er bare hvor langt vi skal la indeksen n gå.

Det enkleste er å prøve seg frem, så la oss gjøre det.

Oppgave 3.4.10

a) (i)

```
> plot(x5 + x - 1, x=-10..10)
```



Grafen viser at likningen har minst én løsning.

At den ikke har flere enn én følger av at $f'(x) = 4x^4 + 1 > 0$ for alle x .

(ii) Grafen viser at nullpunktet ligger mellom 2 og -2.
Vi velger derfor å starte Newtons metode med

$$x_0 = 0.$$

Nå står det ikke i oppgaven hvor nøyaktig svaret skal være. Så la oss være litt rå, og kreve 10 sifres nøyaktighet. Svaret må da gis med 11 sifre, og utregningene gjøres med enda 2-3 sifre.

Vi velger å gjennomføre beregningene med 14 sifre, og slutte når 11 sifre er like i to påfølgende svar.

Vi vet ikke hvor langt n må gå i **for**-løkken. Men som en tommelfingerregel får man to nye sifre i hvert trinn ved Newtons metode.

Det skulle derfor være tilstrekkelig å gå til $n = \frac{11}{2} + 1$ der det siste trinnet er lagt til for kontrollen av at de to siste trinnene gir minst 11 like sifre.

Derfor skulle det være nok å la n gå fra 1 til 7.

Vi prøver. Er det ikke nok, kan vi jo bare fortsette noen trinn til.

```
> x := 0
```

```
x := 0
```

(1)

```
> for n from 1 by 1 to 7 do x := evalf(x - (x^5 + x - 1) / (5*x^4 + 1), 14) end do
```

```
x := 1.
```

```
x := 0.8333333333333333
```

```
x := 0.76438211566010
```

```
x := 0.75502486723184
```

```
x := 0.75487770177013
```

```
x := 0.75487766624667
```

```
x := 0.75487766624669
```

(2)

Det gikk bra! Løsningen er altså $x = 0.7548776625$ korrekt avrundet.

(Dersom ikke forløkken fungerer, får du regne rekursjonen trinn for trinn selv.)

Nå har vi gitt x en tallverdi. Hvis det er sjanse for at den skal brukes som variabel i neste omgang, er det en god skikk å bruke *unassign* like godt først som sist:

```
> unassign('x')
```

(iii) Det er vanskeligere å bruke en **for**-løkke for intervallhalveringsmetoden, for prosessen i ett trinn er avhengig av resultatet fra forrige trinn.

Men det finnes det råd for. Vi bruker konstruksjonen **if ... then ... else ... end if**

Men da er det gunstig om Maple vet hvilken funksjon f er.

Vi skal derfor definere denne funksjonen for Maple.

Vi starter så med intervallet $[-2, 2]$ som vi kaller $[x_0, y_0]$

Deretter velger vi intervaller $[x_n, y_n]$ for $n = 1, 2, \dots, 10$ og ser hva som skjer.

Altså: vi starter med å sette $x=-2$ og $y=2$:

> $x := -2 : y := 2$

$y := 2$

(3)

For å definere funksjonen $f(x) = x^5 + x + 1$, bruker vi kommandoen $f := x \rightarrow x^5 + x + 1$ der pilen er tastet som minus etterfulgt av "større enn", altså \rightarrow

> $f := x \rightarrow x^5 + x - 1$

$f := x \rightarrow x^5 + x - 1$

(4)

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 10 **do** $t := \text{evalf}\left(\frac{(x+y)}{2}, 14\right) : \text{if } f(x) \cdot f(t) \leq 0$ **then** $y := t$ **else** $x := t$ **end if end do**

$t := 0.$

$t := 1.$

$t := 0.5000000000000000$

$t := 0.7500000000000000$

$t := 0.8750000000000000$

$t := 0.8125000000000000$

$t := 0.7812500000000000$

$t := 0.7656250000000000$

$t := 0.7578125000000000$

$t := 0.7539062500000000$

(5)

Det er viktig at du ser at det vi har gjort her virkelig er å be Maple om å bruke intervallhalveringsmetoden.

(t settes først lik midtpunktet av intervallet $[x_n, y_n]$). I **if**-konstruksjonen sjekkes det om $f(x_{n-1})$ og $f(t)$ har ulike fortegn, og har de det, får vi en ny y_n som blir lik midtpunktet. Hvis de ikke har ulikt fortegn, er det x_n som blir lik t .

Merk:

Maple skal gjennomføre to ting på hvert trinn i **for**-løkken: beregne t og bestemme det nye endepunktet for intervallet. To eller flere operasjoner i en **for**-løkke adskilles ved et kolon.

Listen vi fikk viser bare t -verdiene. Vi er interessert i x og y . Men de er lette å få tak i:

```
> x
```

0.75390625000000 (6)

```
> y
```

0.75781250000000 (7)

Dette er endepunktene for intervallet vi er kommet frem til så langt. Løsningen ligger et sted mellom x og y (endepunktene er også mulige). Er vi ikke fornøyd, kan vi bare fortsette, idet vi starter med verdiene som x og y nå allerede har:

```
> for n from 1 by 1 to 10 do t := evalf( $\frac{(x+y)}{2}$ , 14) : if f(x)·f(t) ≤ 0 then y := t else x := t end if end do
```

$t := 0.75585937500000$
 $t := 0.75488281250000$
 $t := 0.75439453125000$
 $t := 0.75463867187500$
 $t := 0.75476074218750$
 $t := 0.75482177734375$
 $t := 0.75485229492188$
 $t := 0.75486755371094$
 $t := 0.75487518310547$
 $t := 0.75487899780274$ (8)

```
> x
```

0.75487518310547 (9)

```
> y
```

0.75487899780274 (10)

Oppgaven krevde ikke noen spesiell nøyaktighet i svaret. Vi er nå kommet frem til at løsningen ligger i et intervall der $t = 0.75487899780274$ er midtpunktet. Vi sier derfor at denne t -verdien er løsningen.

Nøyaktigheten i dette svaret er slik at feilen maksimert er lik

```
> t - x
```

OBS! Viktig! Både x , y og t har nå fått tallverdier av Maple. Så Maple kan ikke lenger oppfatte dem som frie variable.

Det kan skape problemer senere på dette arbeidsarket.

Derfor er det en god idé å alltid "avtallifisere" variable som har fått tallverdier ved kommandoen `:=` når man er ferdig med å bruke dem som tall.

Det gjør vi ved kommandoen `unassign`

```
> unassign('x', 'y', 't')
```

Oppgave 3.4.11

Vi løser oppgaven for $x = 0.2$. Siden $\sin(y) = x$, er $y = \sin^{-1}(x)$. Derfor er det en god idé å løse oppgaven ved å løse likningen $\sin(y) = x$ med hensyn på y .

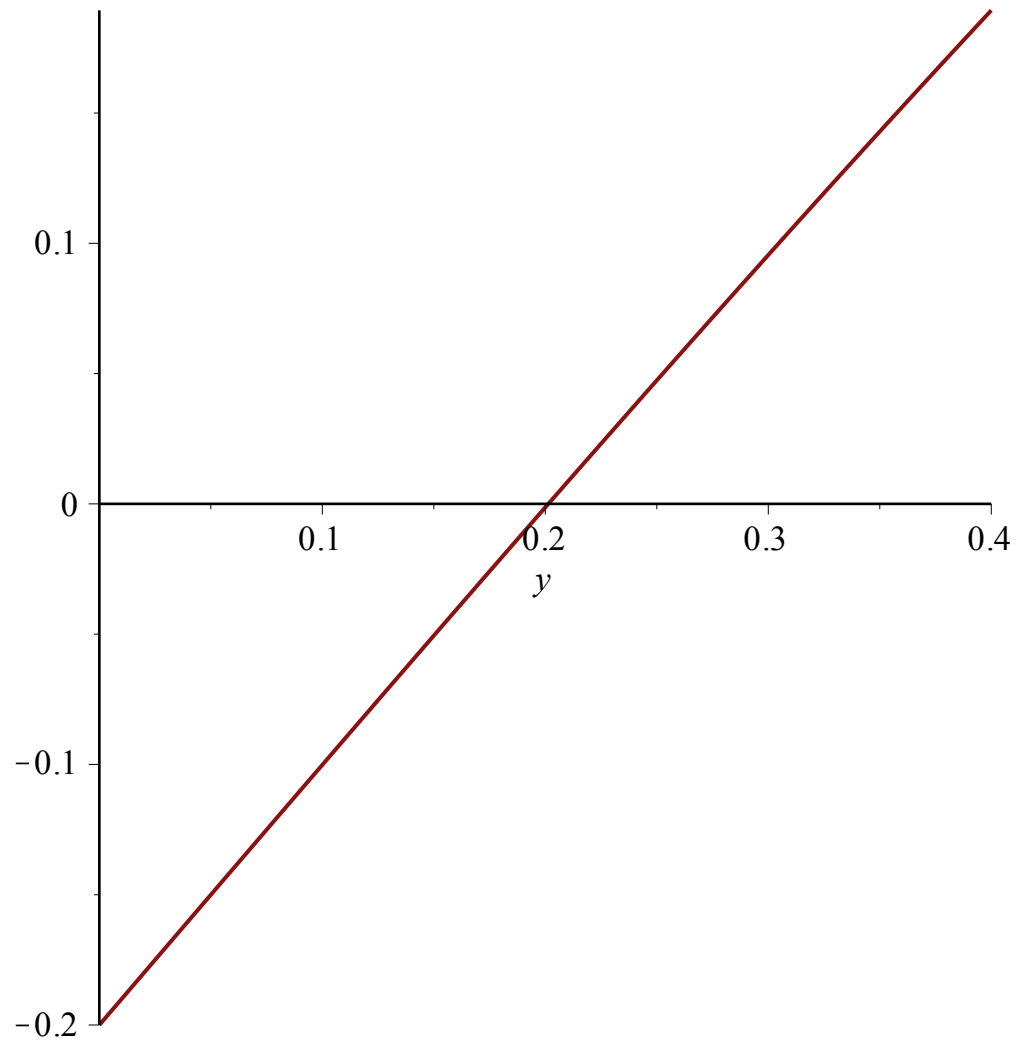
Newtons metode krever at likningen er skrevet på formen $f(y) = 0$.

Vår funksjon $f(y)$ er derfor $f(y) = \sin(y) - x = \sin(y) - 0.2$.

Den deriverte av $f(y)$ er $f'(y) = \cos(y)$

Det kan være lurt å sjekke hvor nullpunktet for $f(y)$ omtrentlig er:

```
> plot(sin(y) - 0.2, y = 0 .. 0.4)
```



Aha! vi lar derfor Newtons metode starte med $y = 0.2$. Det ser ut til at vi bare trenger tre desimaler til.

Vi lar derfor n gå fra 1 til $\frac{4}{2} + 1 = 3$ (eller litt lenger om du vil, for sikkerhets skyld)

> $y := 0.2$

$y := 0.2$

```

> for n from 1 by 1 to 3 do y := y -  $\frac{(\sin(y) - 0.2)}{\cos(y)}$  end do
                                     y := 0.2013577335
                                     y := 0.2013579208
                                     y := 0.2013579208

```

(13)

Vi fikk visshet for at svaret er 0.2014 korrekt avrundet, allerede etter $n = 2$

Oppgave 3.4.12.

Vi vet at $\sin\left(\frac{\text{Pi}}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Derfor er $\frac{\text{Pi}}{6}$ en løsning av likningen $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Vi skriver likningen som $\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$, og løser den med hensyn på x ved Newtons metode. Når vi så multipliserer svaret med 6, har vi et estimat for Pi.

Vi bruker $x_0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ som startverdi for Newtons metode. Siden vi skal multiplisere svaret med 6, trenger vi minst 10 sikre desimaler i svaret.

Vi lar derfor n gå fra 1 til 6, og ser hva det leder til. Blir det ikke langt nok, er det lett å henge på noen ekstra trinn.

Vi trenger også å regne med litt mer enn 10 sikre sifre (som er Maples standard). La oss bruke 12.

```

> x := 0.5
                                     x := 0.5
> for n from 1 by 1 to 6 do x := evalf $\left(x - \frac{\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)}{\cos(x)}, 12\right)$  end do
                                     x := 0.523444473819
                                     x := 0.523598768727
                                     x := 0.523598775599
                                     x := 0.523598775598
                                     x := 0.523598775598
                                     x := 0.523598775598

```

(14)

(15)


```
> evalf(x·6, 10)
```

$$3.141592654$$

(16)

For kontroll kan vi be Maple om å skrive Pi med 10 sikre sifre, som rett og slett er Maples standardform:

```
> evalf(Pi);
```

$$3.141592654$$

(17)

```
> unassign('x')
```

Oppgave 13.

a)

Vi beregner først funksjonsverdiene i randpunktene $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$:

```
> f := x → 1/3 · x3 + cos(x)
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{3} x^3 + \cos(x)$$

(18)

```
> evalf(f(0))
```

$$1.$$

(19)

```
> evalf(f(Pi/2))
```

$$1.291928196$$

(20)

Deretter leter vi etter kritiske punkter:

```
> diff(f(x), x)
```

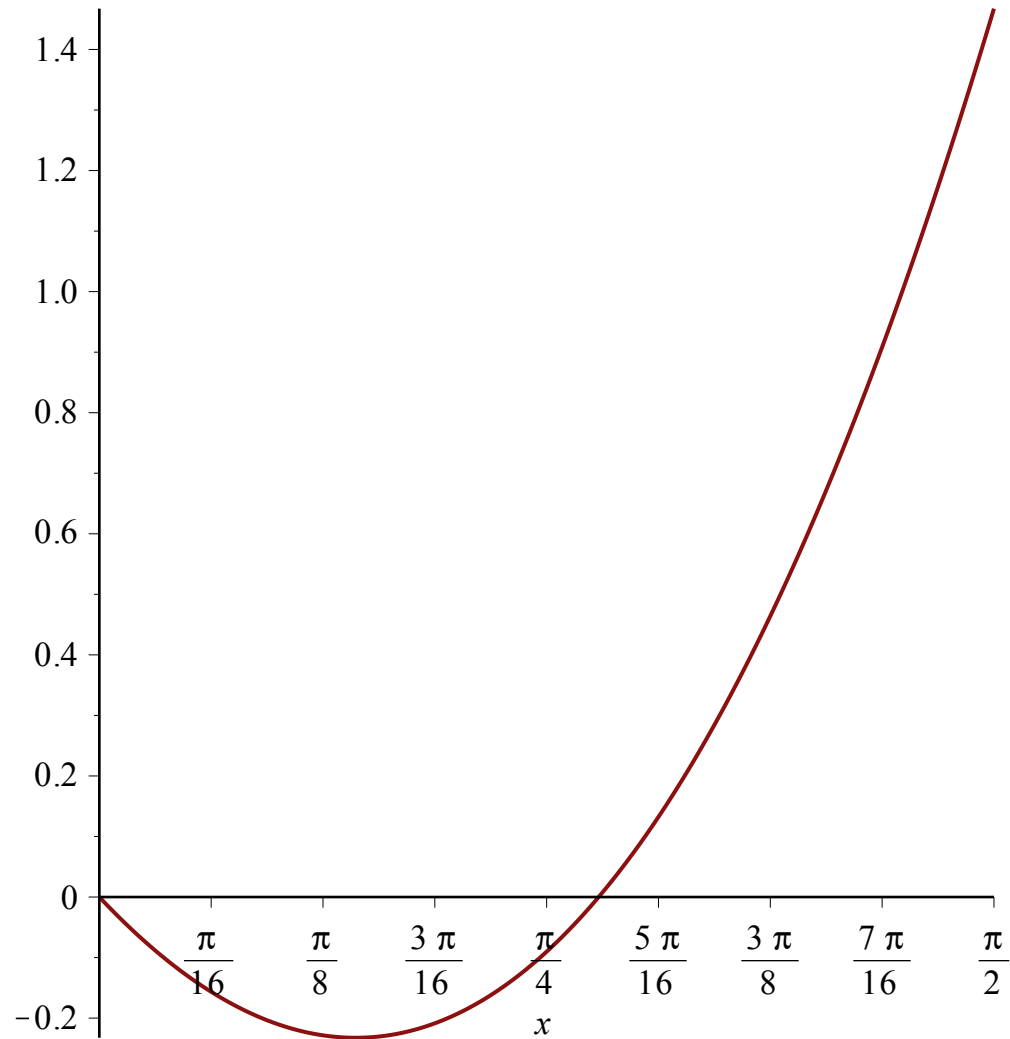
(21)

$$x^2 - \sin(x)$$

(21

Vi er interessert i løsninger av likningen $x^2 - \sin x = 0$. For å få en idé om hvor de er, plotter vi først grafen til $x^2 - \sin x$:

> $\text{plot}\left(x^2 - \sin(x), x = 0 \dots \frac{\pi}{2}\right)$



Aha! det er kritiske punkter i $x = 0$ og omtrent i midtpunktet mellom $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{16}$. At $x = 0$ er en løsning, ser vi egentlig umiddelbart. Der andre løsningen er nok ikke eksakt. Så vi forbedrer estimatet $x_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{16} \right)$ ved hjelp av Newtons metode. Likningen vi skal løse er

$x^2 - \sin x = 0$, så iterasjonen er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - \sin x_n)}{2x_n - \cos x_n}.$$

> $x := \text{evalf}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\text{Pi}}{4} + \frac{5 \cdot \text{Pi}}{16}\right)\right)$

$x := 0.8835729339$

(22)

> **for** n **from** 1 **to** 5 **do** $t := x - \frac{(x^2 - \sin(x))}{2 \cdot x - \cos(x)}$: $x := t$ **end do**

$t := 0.8767835642$

$x := 0.8767835642$

$t := 0.8767262195$

$x := 0.8767262195$

$t := 0.8767262154$

$x := 0.8767262154$

$t := 0.8767262154$

$x := 0.8767262154$

$t := 0.8767262154$

$x := 0.8767262154$

(23)

Så beregner vi funksjonsverdien i de to kritiske punktene. Det vil si, vi har allerede beregnet funksjonsverdien i $x = 0$, så vi trenger bare beregne verdien for denne x -verdien som Maple nettopp fant for oss:

> $\text{evalf}(f(x))$

0.8643024928

(24)

Som kontroll kan vi naturligvis også beregne denne funksjonsverdien slik:

```
> evalf( (0.8767262154)^3 / 3 + cos(0.8767262154) )
```

0.8643024928

(25

Konklusjon: funksjonen har maksimum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.291928196$ og minimum $f(0.8767262154) = 0.8643024928$. For moro skyld kan vi tegne grafen til f , men da må x slutte å være tallet 0.8767262154 og bli en fri variabel igjen:

```
> unassign('x')
```

```
> plot( f(x), x = 0 .. Pi / 2 )
```

