Oppgave 12.4.12.

a)

Vi importerer først både vektoranalyse- og plottekommandoene til Maple:

> $with(VectorCalculus)$

$[\&x,$ `*`, `+`, `-`, `.`, $<,>$, $<|>$, $About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, Compatibility, ConvertVector, CrossProduct, Curl, Curvature, \mathrm{D}, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters, GetCoordinates, GetNames, GetPVDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector, IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, Nabla, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector, PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates, SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, Tangent, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField, VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series]$ **(1**

> $with(plots)$

$[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra\_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]$ **(2**

> $F := VectorField\left(\left\langle x^3 \cdot \cos(y),\ x \cdot y \cdot \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)\right\rangle\right)$

Error, (in VectorCalculus:-VectorField) no coordinate names were given

Denne feilmeldingen kom opp fordi vi faktisk trenger å fortelle Maple hvilket koordinatsystem dette vektorfeltet er gitt i.
Derfor setter vi først at vi jobber med to variable i kartesiske koordinater

> $SetCoordinates('cartesian'[x, y])$

$$cartesian_{x,\,y}$$ **(3**

> $F := VectorField(\langle x^3 \cdot \cos(y),\ x \cdot y \cdot \ln(1 + x^2 + y^2) \rangle)$

$$F := (x^3 \cos(y))\bar{e}_x + (x\, y \ln(x^2 + y^2 + 1))\bar{e}_y \quad (4$$

> $Curl(F)$

Error, (in VectorCalculus:-Curl) the input vector field must be three dimensional

Det er egentlig ganske naturlig at Maple vil ha tredimensjonale vektorfelt, for curlen er jo et slags kryss produkt.
Men det er lett å fikse. Vi kjører med tre koordinater for vektorfeltet, der den siste koordinaten er lik 0.

> $SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])$

$$cartesian_{x, y, z} \quad (5$$

> $F := VectorField(\langle x^3 \cdot \cos(y),\ x \cdot y \cdot \ln(1 + x^2 + y^2),\ 0 \rangle)$

$$F := (x^3 \cos(y))\bar{e}_x + (x\, y \ln(x^2 + y^2 + 1))\bar{e}_y \quad (6$$

> $C := Curl(F)$

$$C := \left(y \ln(x^2 + y^2 + 1) + \frac{2\, x^2\, y}{x^2 + y^2 + 1} + x^3 \sin(y) \right)\bar{e}_z \quad (7$$

Som du ser er C også et vektorfelt (fordi det er strek over enhetsvektoren e_z).

Vi skal plotte flaten S og noen utvalgte piler for curl F.
Flaten ligger i xy-planet i denne oppgaven, mens curlen er en vektor parallell med z-aksen.
Figuren blir derfor tredimensjonal.

> $P1 := plot3d([r \cdot \cos(t),\ r \cdot \sin(t),\ 0], r = 0..4, t = 0..2 \cdot \mathrm{Pi}, color = red)$

$$P1 := PLOT3D(\ldots) \quad (8$$

Når vi skal plotte en vektorpil, må vi først angi startpunktet som en vektor, og så selve vektoren som er vektorpilen.
De vektorene vi vil ha tegnet, er vektoren $subs(x = 1,\ y = 1,\ \ z = 0,\ C)$ *i punktet* $< 1, 1, 0 >$, og så videre:

> $\mathrm{P2} := \mathrm{arrow}(\langle 1, 1, 0 \rangle,\ subs(x = 1, y = 1, z = 0, C),\ color = blue, shape = arrow)$

$$P2 := PLOT3D(\ldots) \quad (9$$

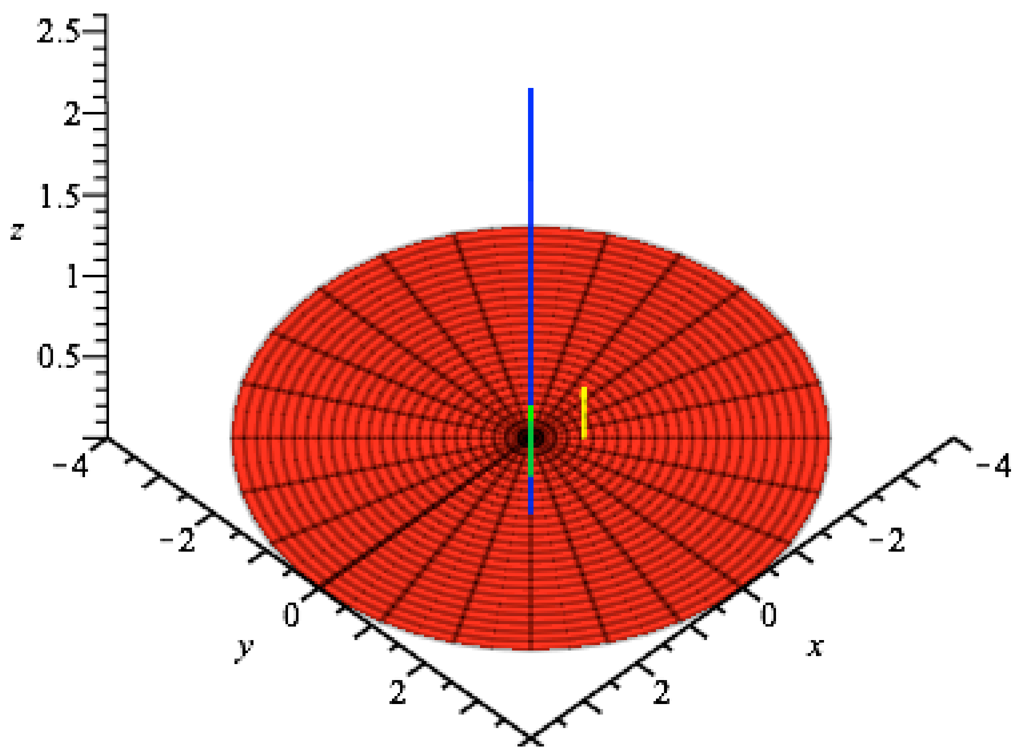
> $P3 := arrow\left(\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\rangle, subs\left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0, C\right), color = green, shape = arrow\right)$

$$P3 := PLOT3D(\ldots) \tag{10}$$

> $P4 := arrow\left(\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\rangle, subs\left(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0, C\right), color = yellow, shape = arrow\right)$

$$P4 := PLOT3D(\ldots) \tag{11}$$

> $display(P1, P2, P3, P4, axes = framed, labels = [x, y, z])$



Det kan lønne seg å snu litt på figuren, slik at de tre curl-vektorene vises tydeligere.
Hvis du også vil se uttrykkene for gradientvektoren i det tre punktene, kan du naturligvis skrive

> $subs(x = 1, y = 1, z = 0, C)$

$$\left(\ln(3) + \frac{2}{3} + \sin(1)\right)\bar{e}_z \qquad (12$$

og så videre.

b)

> $SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])$

$$cartesian_{x, y, z} \tag{13}$$

> $F := VectorField(\langle x^3 \cdot \cos(y),\ x^3 \cdot \sin(y),\ x \cdot y \cdot z \rangle)$

$$F := (x^3 \cos(y))\bar{e}_x + (x^3 \sin(y))\bar{e}_y + (x\,y\,z)\bar{e}_z \tag{14}$$

> $C := Curl(F)$

$$C := (x\,z)\bar{e}_x - y\,z\bar{e}_y + (3\,x^2 \sin(y) + x^3 \sin(y))\bar{e}_z \tag{15}$$

For å plotte flaten, tenker vi flaten som en parametrisert flate der de kartesiske koordinatene (x, y, z) er gitt ved parametrene (r, θ) som rett og slett er polarkoordinatene i xy-planet.

> $P1 := plot3d([r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), r^2], r = 0..2, t = 0..2 \cdot \text{Pi}, color = \text{"SandyBrown"}, axes = framed)$

$$P1 := PLOT3D(...) \tag{16}$$

> $P2 := arrow(\langle 1, 1, 1^2 + 1^2 \rangle,\ subs(\mathrm{x} = 1,\ \mathrm{y} = 1,\ \mathrm{z} = 1^2 + 1^2,\ C), color = blue, shape = arrow)$

$$P2 := PLOT3D(...) \tag{17}$$

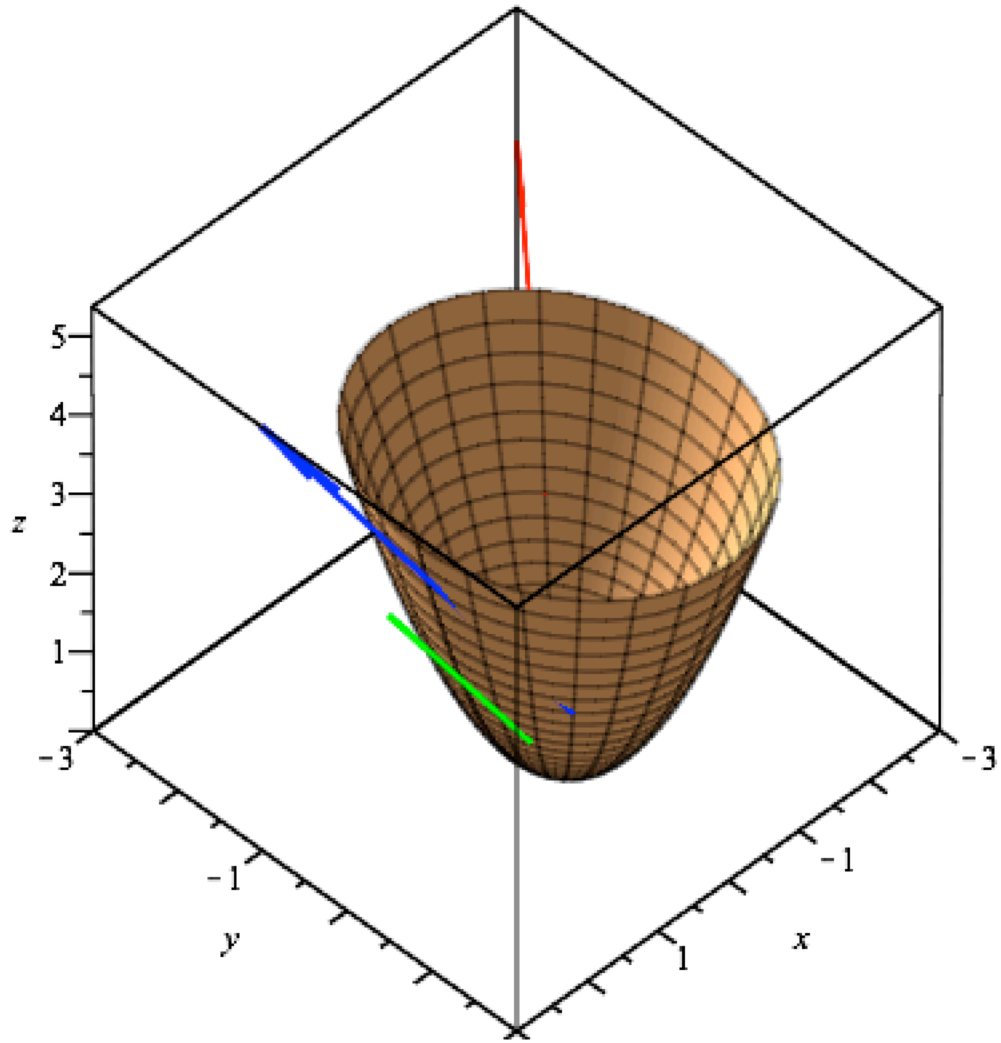
> $P3 := arrow\left(\left\langle 1, \frac{1}{2}, 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\rangle,\ subs\left(\mathrm{x} = 1,\ \mathrm{y} = \frac{1}{2},\ \mathrm{z} = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, C\right), color = green, shape = arrow\right)$

$$P3 := PLOT3D(...) \tag{18}$$

> $P4 := arrow(\langle -1, -1, 1^2 + 1^2 \rangle,\ subs(\mathrm{x} = -1,\ \mathrm{y} = 1,\ \mathrm{z} = 1^2 + 1^2, C), color = red, shape = arrow)$

$$P4 := PLOT3D(...) \tag{19}$$

> $display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed, labels = [x, y, z])$



Synes du resultatet ble rart? Husk da at curlen er basert på vektorfeltet, mens flaten er helt uavhengig av vektorfeltet.
Det er altså ingen grunn til å forvente at pilene skal stå normalt på flaten!!!
Savner du den røde pilen? Har du husket å dreie på figuren?

>