Oppgave 3.2.14

a)

> $diff\left(\dfrac{x}{\text{sqrt}(1+x^2)}, x\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}} \quad \text{(1}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \quad \text{(2}$$

Dette viser at den deriverte ikke har noen reelle nullpunkter.

b)

> $diff\left(\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) + \exp(x), x\right)$

$$-\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x} + e^x \quad \text{(3}$$

> $solve(\%, x)$

$$-\frac{2}{3}\ln(2) \quad \text{(4}$$

$f'(x)$ har altså bare ett nullpunkt, nemlig $x = -\dfrac{2}{3}\ln 2$.

c)

> $diff\left(\frac{\mathrm{sqrt}(1+x)}{\sinh(x)}, x\right)$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}\,\sinh(x)} - \frac{\sqrt{1+x}\,\cosh(x)}{\sinh(x)^2} \qquad (5$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-2\cosh(x)\,x+\sinh(x)-2\cosh(x)}{\sqrt{1+x}\,\left(\cosh(x)^2-1\right)} \qquad (6$$

Det er klart at denne brøken er lik 0 hvis og bare hvis telleren er =0.

> $\mathrm{solve}(\sinh(x)-2\cosh(x)\,x-2\cosh(x)=0, x)$

$$RootOf\left(2\left(e^{\_Z}\right)^2\_Z+\left(e^{\_Z}\right)^2+2\_Z+3\right) \qquad (7$$

Maple klarte ikke å løse likningen eksakt i bare ett trinn. Utskriften betyr at vi først må finne nullpunktene til funksjonen
$g(z)=2\left(e^{z}\right)^2\cdot z+\left(e^{z}\right)^2+2z+3.$
Men det er bare en omskrivning av den likningen vi ga til Maple.
Derfor prøver vi heller

> $\mathrm{fsolve}(\sinh(x)-2\cosh(x)\,x-2\cosh(x)=0, x)$

$$-1.447609598 \qquad (8$$

Kan vi stole på at dette er den eneste løsningen? Og kan vi stole på at den er riktig?
fsolve finner ikke alltid *alle* løsningene av en likning.
Hva vet vi egentlig om denne likningen? Den kan naturligvis skrives $\sinh x = 2(x+1)\cosh x$.
Vi kjenner grafen til sinh x som er en voksende funksjon. Grafen til $\cosh x$ er også velkjent, den er symmetrisk om y-aksen, og kan ligne er
parabel med bunnpunkt i punktet (0,1).
Så la oss tegne grafene til $\sinh x$ og 2(x+1)cosh x i samme koordinatsystem

> $with(plots)$

(9

$[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra\_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]$ **(9**

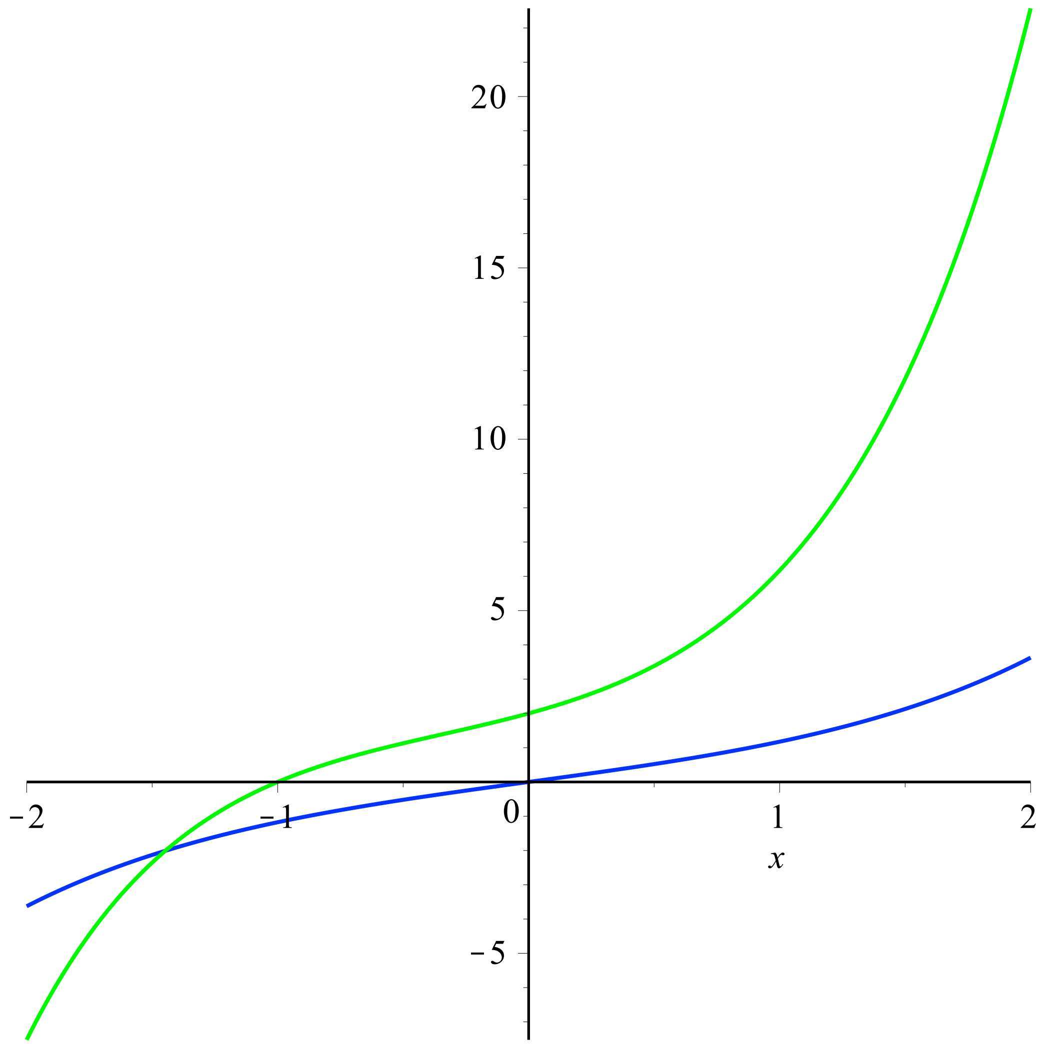
> $P1 := plot(\sinh(x), x = -2..2, color = blue)$

$$P1 := PLOT(...)$$ **(10**

> $P2 := plot(2 \cdot (x+1) \cdot \cosh(x), x = -2..2, color = green)$

$$P2 := PLOT(...)$$ **(11**

> $display(P1, P2)$



Siden $|2(1+x)\cosh x|$ vokser fortere enn $|\sinh x|$ utenfor dette intervallet, er det klart at likningen bare har én eneste løsning, og at den er litt større enn -1.5. Det stemmer perfekt med resultatet vi fikk ved bruk av *fsolve*.

d)

> $diff\left(\dfrac{\mathrm{sqrt}(x^2-1)}{x\cdot\ln(x^2+1)}, x\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,\ln(x^2+1)} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2\ln(x^2+1)} - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{\ln(x^2+1)^2\,(x^2+1)} \qquad \textbf{(12}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{-2x^4 + x^2\ln(x^2+1) + 2x^2 + \ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}\,\ln(x^2+1)^2\,x^2\,(x^2+1)} \qquad \textbf{(13}$$

Merk: Funksjonen i oppgaven er bare definert for $|x| \geq 1$. Den er derfor bare deriverbar for $|x| > 1$. Vi søker derfor etter nullpunkter med absoluttverdi > 1.
Dessuten er denne brøken symmetrisk i x om punktet *x=0,* så det holder å finne positive løsninger.

> $solve\left((x^2+1)\cdot\ln(x^2+1) = 2x^2\cdot(x^2-1), x\right)$

$$-\sqrt{-1+e^{RootOf\left(-2(e^{\_Z})^2 + e^{\_Z}\,\_Z + 6e^{\_Z} - 4\right)}}, \sqrt{-1+e^{RootOf\left(-2(e^{\_Z})^2 + e^{\_Z}\,\_Z + 6e^{\_Z} - 4\right)}} \qquad \textbf{(14}$$

Det der var det ikke mye vits i.
Men vi har en liten Joker i ermet: Vi kan taste inn

> $fsolve\left((x^2+1)\cdot\ln(x^2+1) = 2x^2\cdot(x^2-1), x\right)$

$$0. \qquad \textbf{(15}$$

Hmmm. Har ikke likningen andre løsninger? Vi sjekker:

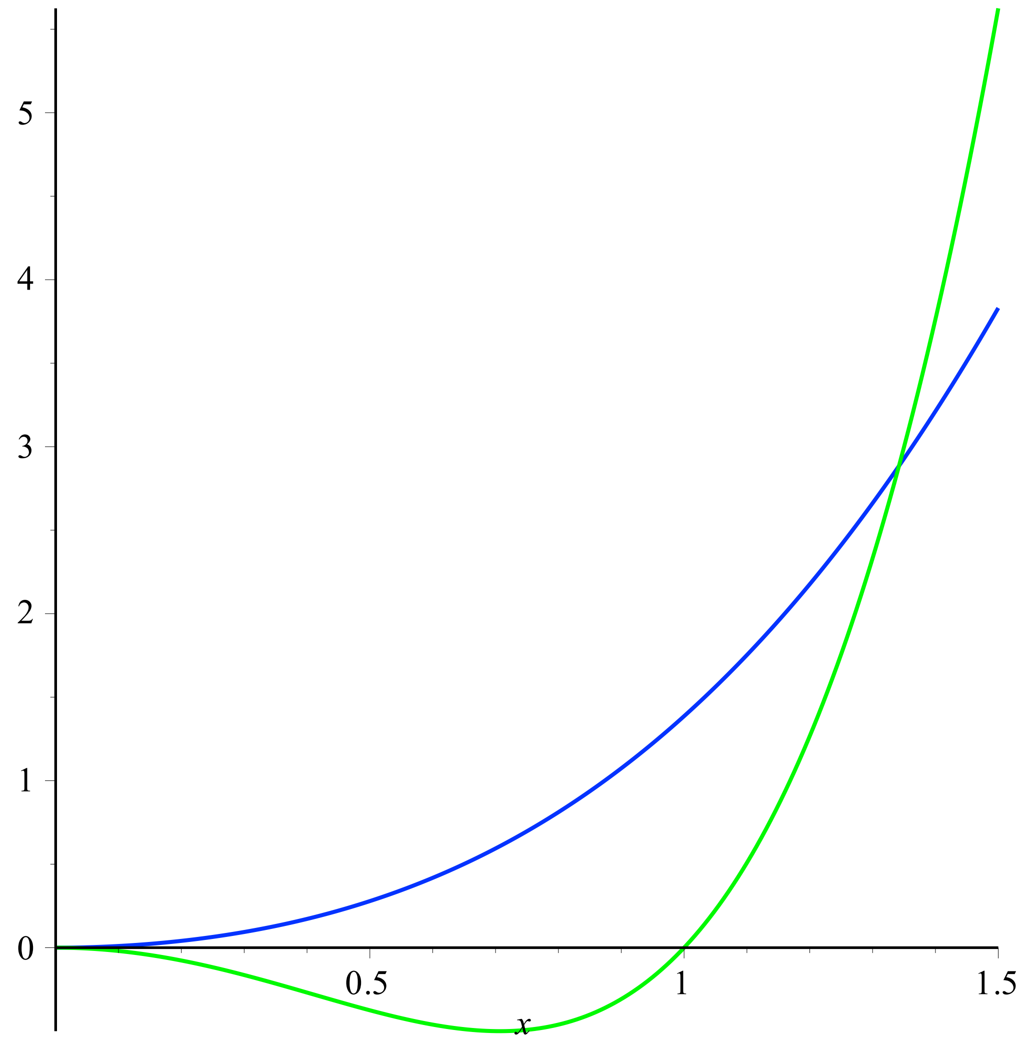
> $P1 := plot\left((x^2+1)\cdot\ln(x^2+1), x = 0..1.5, color = blue\right)$

$$P1 := PLOT(\ldots) \qquad \textbf{(16}$$

> $P2 := plot\left(2\cdot x^2\cdot(x^2-1), x = 0..1.5, color = green\right)$

$$P2 := PLOT(\ldots) \qquad \textbf{(17}$$

> $display(P1, P2)$



Oj sann! Det er klart at begge disse grafene er symmetriske om y - aksen, og at $2x^2(x^2-1)$ vokser fortere enn $(x^2+1)\ln(x^2+1)$ når x øker videre mot uendelig.
Altså har likningen to ekstra nullpunkter som ser ut til å være ca 1.35 og -1.35.
Vi kan finne dem mer nøyaktig ved å tegne grafene i et veldig lite intervall nær 1.35.

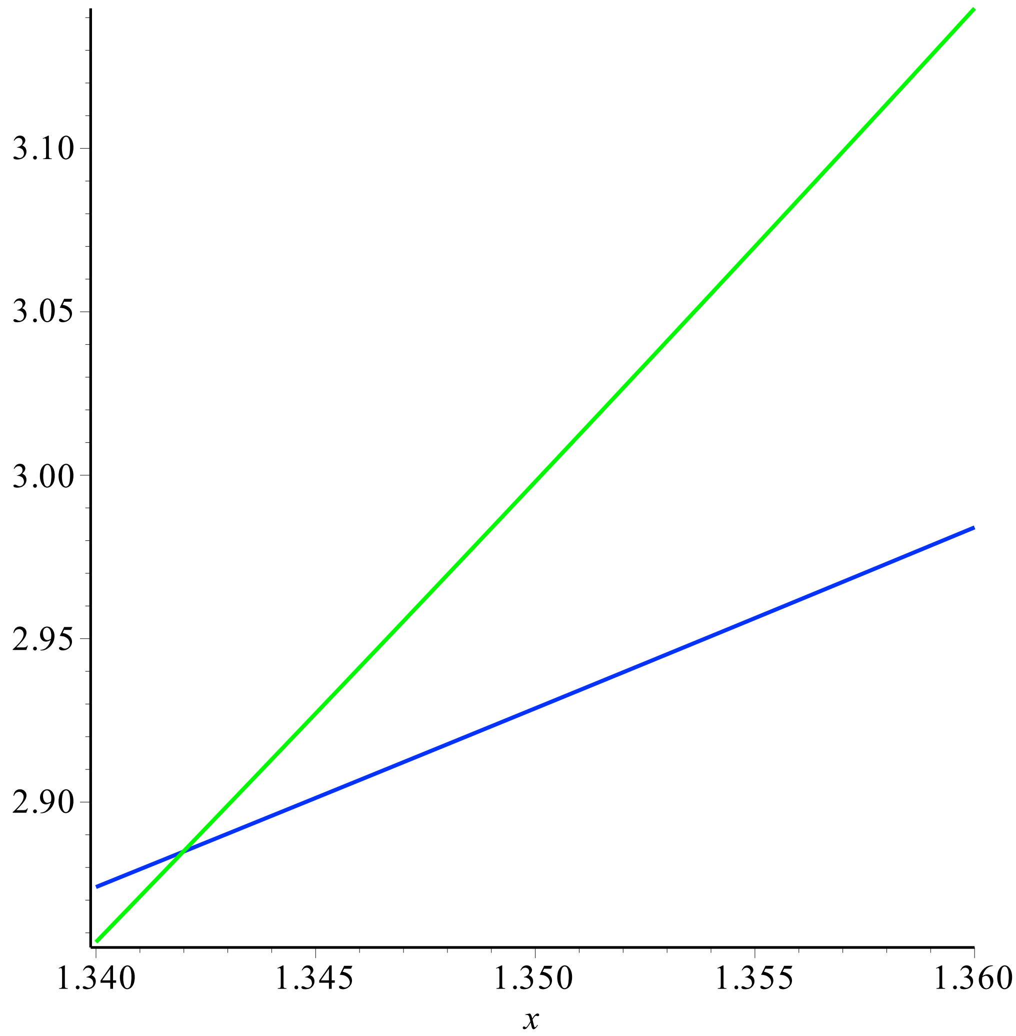
> $P1 := plot\left(\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right), x = 1.34 .. 1.36, color = blue\right)$

$$P1 := PLOT(\ldots) \tag{18}$$

> $P2 := plot\left(2\cdot x^2\cdot\left(x^2-1\right), x = 1.34 .. 1.36, color = green\right)$

$$P2 := PLOT(\ldots) \tag{19}$$

> $display(P1, P2)$



$f'(x)$ har derfor nullpunkter for $x = 1.342$ og $x = -1.342$.

>