Ekstraoppgave 11.6.1.

a)

> $with(plots)$

$[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra\_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]$ (1

Vi plotter først de to flatene $x^2 + y^2 = 1$ og $z = 4 - x$ for å få en ide om hvordan T ser ut.

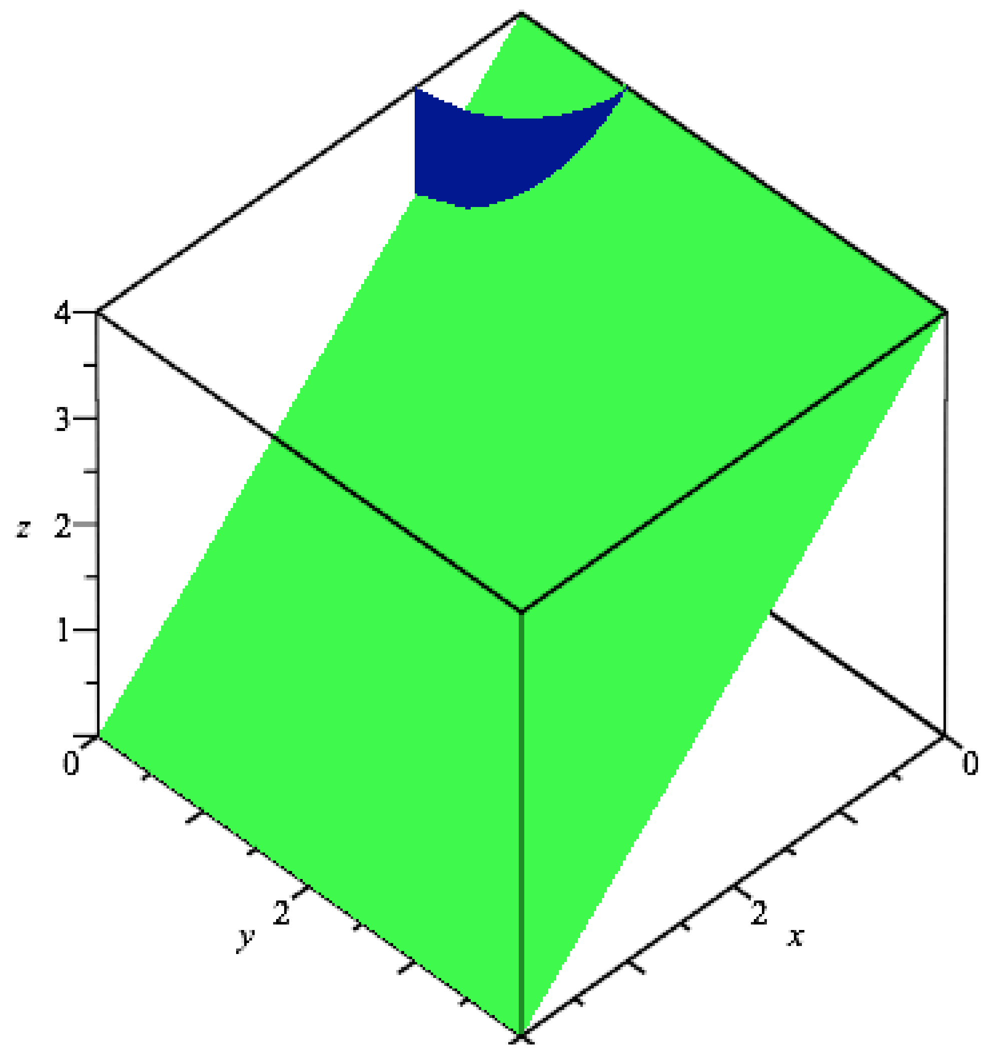
> $P1 := plot3d\left(\left[x, \mathrm{sqrt}\left(1 - x^2\right), z\right], x = 0..4, z = 0..4, color = \mathrm{blue}, style = surface\right)$

$$P1 := PLOT3D(...)$$ (2

> $P2 := plot3d([x, y, 4 - x], x = 0..4, y = 0..4, color = \mathrm{green}, style = surface)$

$$P2 := PLOT3D(...)$$ (3

> $display(P1, P2, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

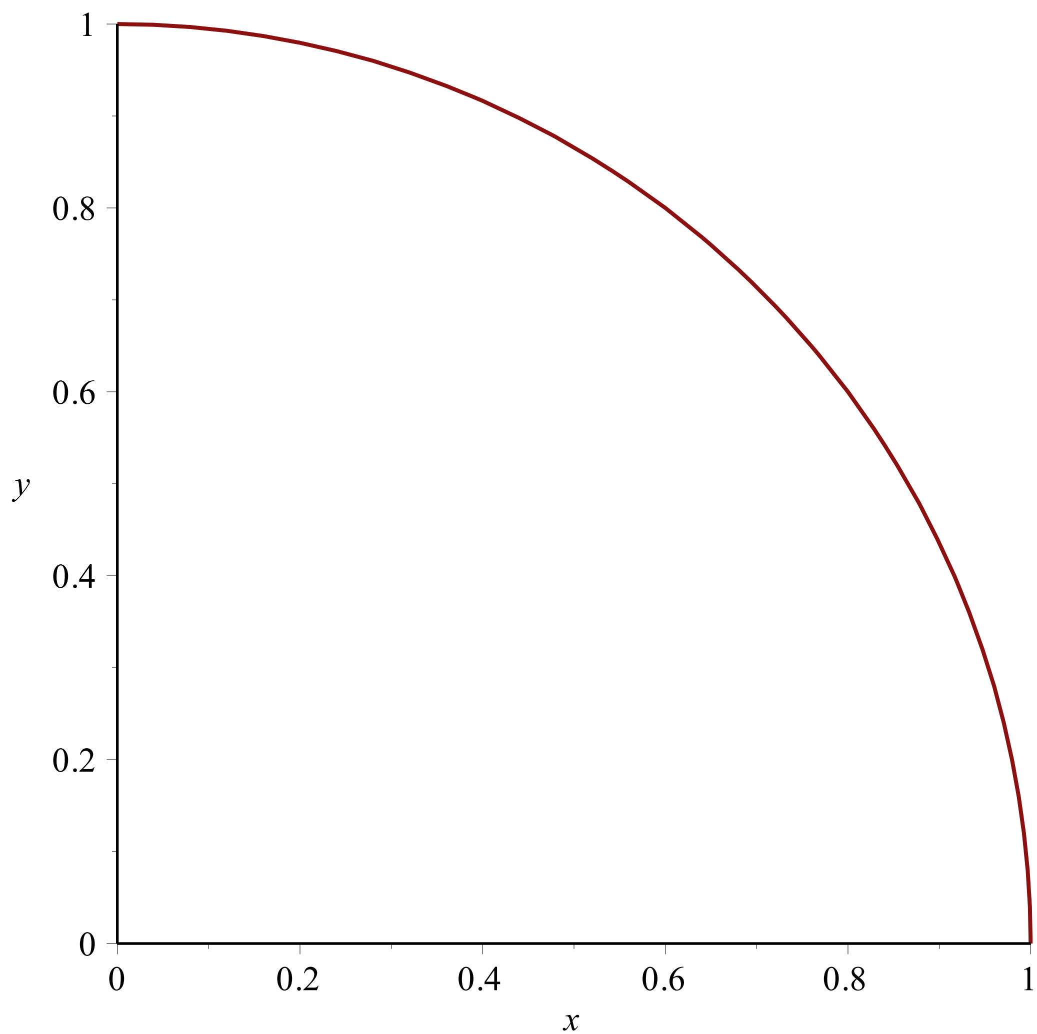


Det var ikke særlig opplysende, men drei på figuren, så får du et bedre inntrykk.
Figuren må være avrenset av det grønne planet og den blå sylinderveggen.
I tillegg har T bunn nede i xy-planet, fra origo og ut til den blå sylinderveggen, og sidevegger i de to vertikale koordinatplanene, fra z-aksen og ut til den blå sylinderveggen.

Vi velger å integrere søylevis (altså i z-retning innerst). En søyle går fra xy-planet der $z = 0$ til det grønne planet der $z = 4 - x$.

For å få med alle søylene, må vi integrere over projeksjonen av T i xy-planet. Vi ser av figuren at denne projeksjonen er det samme som bunnen til T.
Vi kan faktisk se projeksjonen ved å vippe opp figuren slik at du har xy-planet snudd rett mot deg, mens z-aksen peker rett inn i skjermen.
Men det er jo også fort gjort å tegne den opp på en egen figur:

> $implicitplot\left(x^2 + y^2 = 1, x = 0..1, y = 0..1\right)$



Teller vi søylene kolonnevis, er det y som teller. I kolonnen ved x vil y gå fra $y = 0$ til $y = \sqrt{1 - x^2}$.
For å få med alle kolonnene må x gå fra $x = 0$ til $x = 1$.

Vi kan derfor skrive det søkte integralet som det itererte integralet $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\mathrm{sqrt}(1-x^2)} \int_{z=0}^{4-x} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.

Vi ber Maple beregne dette itererte integralet:

> $int(int(int(z, z = 0..4 - x), y = 0..\mathrm{sqrt}(1 - x^2)), x = 0..1)$

$$\frac{65}{32}\pi - \frac{4}{3} \tag{4}$$

En annen sak er at når vi har skrevet integralet som et iterert integral, kan vi skrive T som

$T: \quad 0 \le z \le 4 - x, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 1$

og bruke det til å lage en mye bedre tegning av T. For at ikke de ulike sidene av T skal dekke over hverandre, gjør vi sidene transparente.
Graden av transparens er et tall mellom 0 og 1, jo høyere tall, jo mer transparent.

> $P1 := plot3d([x, \mathrm{sqrt}(1 - x^2), z], x = 0..1, z = 0..4 - x, color = \mathrm{blue}, \mathrm{style} = \mathrm{surface}, \mathrm{transparency} = 0.5, \mathrm{numpoints} = 5000)$

$$P1 := PLOT3D(...) \tag{5}$$

> $P2 := plot3d([x, y, 4 - x], x = 0..1, y = 0..\mathrm{sqrt}(1 - x^2), color = \mathrm{green}, style = surface, transparency = 0.5)$

$$P2 := PLOT3D(...) \tag{6}$$

> $P3 := plot3d([x, y, 0], x = 0..1, y = 0..\mathrm{sqrt}(1 - x^2), color = \mathrm{yellow}, style = surface, transparency = 0.5)$

$$P3 := PLOT3D(...) \tag{7}$$

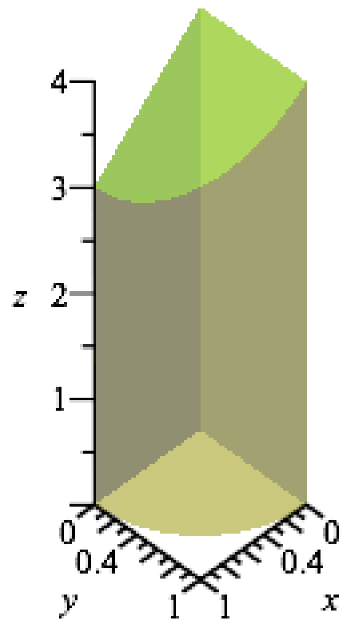
> $P4 := plot3d([0, y, z], y = 0..1, z = 0..4, color = yellow, style = surface, transparency = 0.5)$

$$P4 := PLOT3D(...) \tag{8}$$

> $P5 := plot3d([x, 0, z], x = 0..1, z = 0..4 - x, color = \mathrm{yellow}, style = surface, transparency = 0.5)$

$$P5 := PLOT3D(...) \tag{9}$$

> $display(P1, P2, P3, P4, P5, axes = framed, scaling = constrained, labels = [x, y, z])$



Ved å snu og dreie på figuren, får du et godt inntrykk av hvordan den ser ut.

b)

Det ser ut til at flatene $y = x^2$ og $y = 6 + x$ er vertikale (z mangler i likningene), mens flatene $z = -3$ og $z = \sin x$ avgrenser T i z-retning. Vi tegner derfor først de to vertikale flatene:

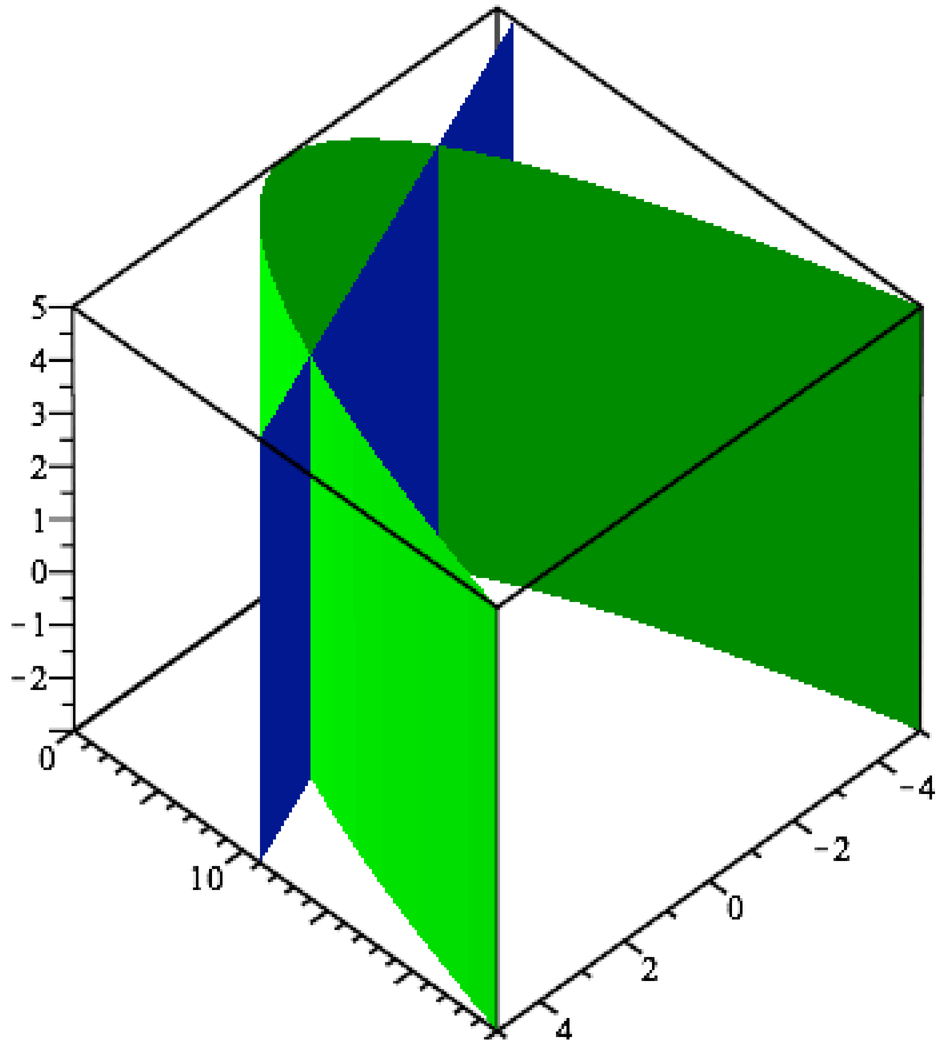
> $P1 := plot3d([x, 6 + x, z], x = -5 ..5, z = -3 ..5, style = surface, color = \mathrm{blue})$

$$P1 := PLOT3D(...) \tag{10}$$

> $P2 := plot3d\left([x, x^2, z], x = -5 ..5, z = -3 ..5, style = surface, color = \mathrm{green}\right)$

$$P2 := PLOT3D(...) \tag{11}$$

> $display(P1, P2, axes = boxed)$



Det er klart at både den grønne og den blå flaten er tegnet for langt, men vi lar det stå slik foreløpig.
Så var det de to flatene som avgrenser T i z-retning:

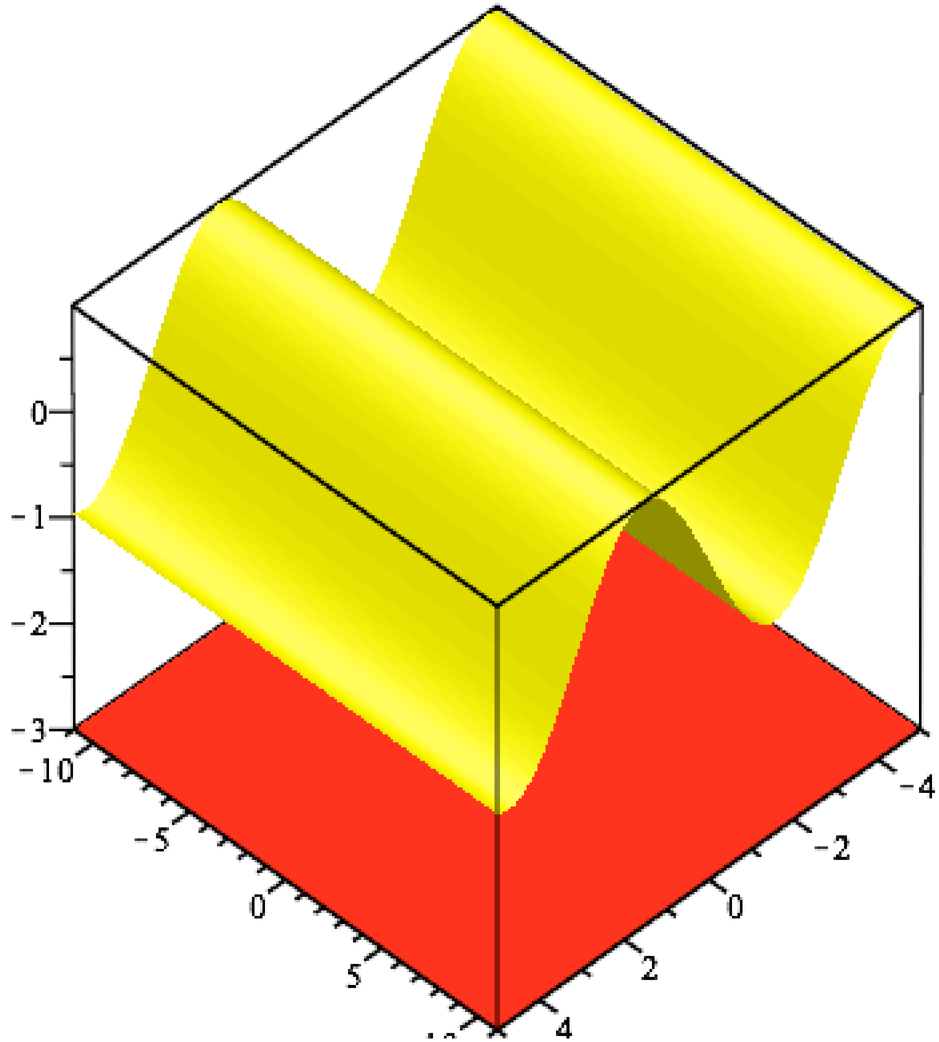
> $P3 := plot3d([x, y, -3], x = -5..5, y = -11..11, style = surface, color = red)$

$$P3 := PLOT3D(...) \quad (12$$

> $P4 := plot3d([x, y, \sin(x)], x = -5..5, y = -11..11, style = surface, color = yellow)$

$$P4 := PLOT3D(...) \tag{13}$$

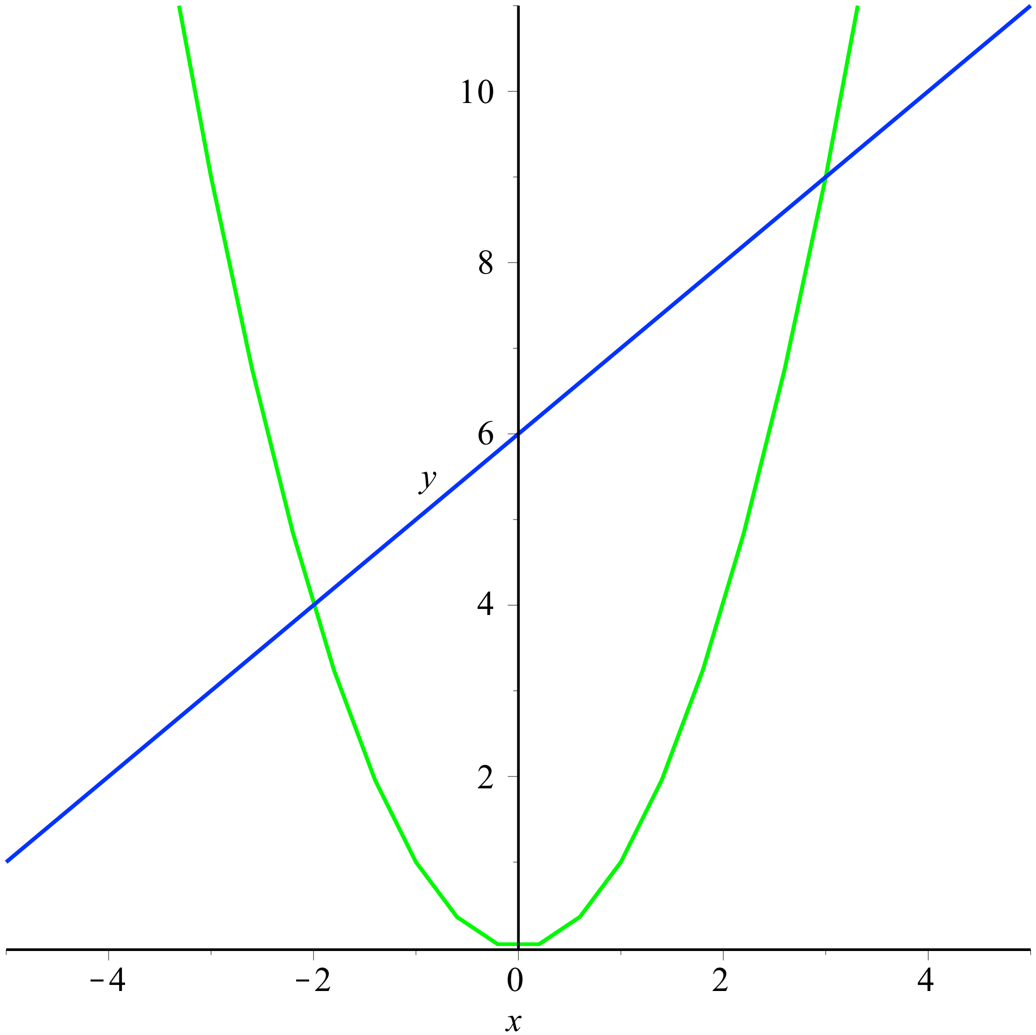
> $display(P3, P4, axes = boxed)$



Vi velger å integrere søylevis. Av den siste figuren ser vi at hver søyle starter på $z = -3$ og ender når den når den gule flaten, altså for $z = \sin x$.

For å få med alle søylene, kan vi se på projeksjonen av T i xy-planet, og den finner vi av den første figuren. Projeksjonen er rett og slett området innenfor kurvene $y = x^2$ og $y = 6 + x$. Vi tegner den:

> $implicitplot\left(\left[y = x^2, y = 6 + x\right], x = -5..5, y = -11..11, color = [green, blue]\right)$



Vi velger å telle søylene kolonnevis. Kolonnen ved x går fra $y = x^2$ til $y = x + 6$.

For å få med alle kolonnene, trenger vi å vite $x-$ koordinatene i de to skjæringspunktene på grafen over.
De lar vi Maple finne:

> $solve(x^2 = x + 6, x)$

$$3, -2 \tag{14}$$

Aha! For å få med alle kolonnene, må x gå fra $x = -2$ til $x = 3$.
Integralet er derved gitt ved følgende itererte integral:
$\int_{x=-2}^{3} \int_{y=x^2}^{x+6} \int_{z=-3}^{\sin x} x^2 \cdot y \cdot z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$. Vi lar Maple beregne det:

> $int(int(int(x^2 \cdot y \cdot z, z = -3 .. \sin(x)), y = x^2 .. x + 6), x = -2 .. 3)$

$$-\frac{162725}{224} + \frac{9}{8}\sin(2)^2 + \frac{11}{8}\cos(2)^2 - \frac{195}{32}\sin(2)\cos(2) + \frac{153}{16}\cos(3)^2 - \frac{9}{8}\sin(3)^2 - \frac{1275}{32}\sin(3)\cos(3) \tag{15}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{171}{16}\cos(3)^2 - \frac{1275}{32}\sin(3)\cos(3) - \frac{162725}{224} + \frac{1}{4}\cos(2)^2 - \frac{195}{32}\sin(2)\cos(2) \tag{16}$$

> $evalf(\%)$

$$-708.0605752 \tag{17}$$

Når vi nå har skrevet integralet på iterert form, så vet vi også at T er gitt ved

$T: \quad -3 \le z \le \sin x, \quad x^2 \le y \le 6 + x, \quad -2 \le x \le 3,$

noe vi kan bruke til å tegne et bilde av T:

> $P1 := plot3d([x, 6 + x, z], x = -2 .. 3, z = -3 .. \sin(x), style = surface, color = blue, transparency = 0.5)$

$$P1 := PLOT3D(\ldots) \tag{18}$$

> $P2 := plot3d([x, x^2, z], x = -2 .. 3, z = -3 .. \sin(x), style = surface, color = \text{green}, transparency = 0.5)$

$$P2 := PLOT3D(\ldots) \tag{19}$$

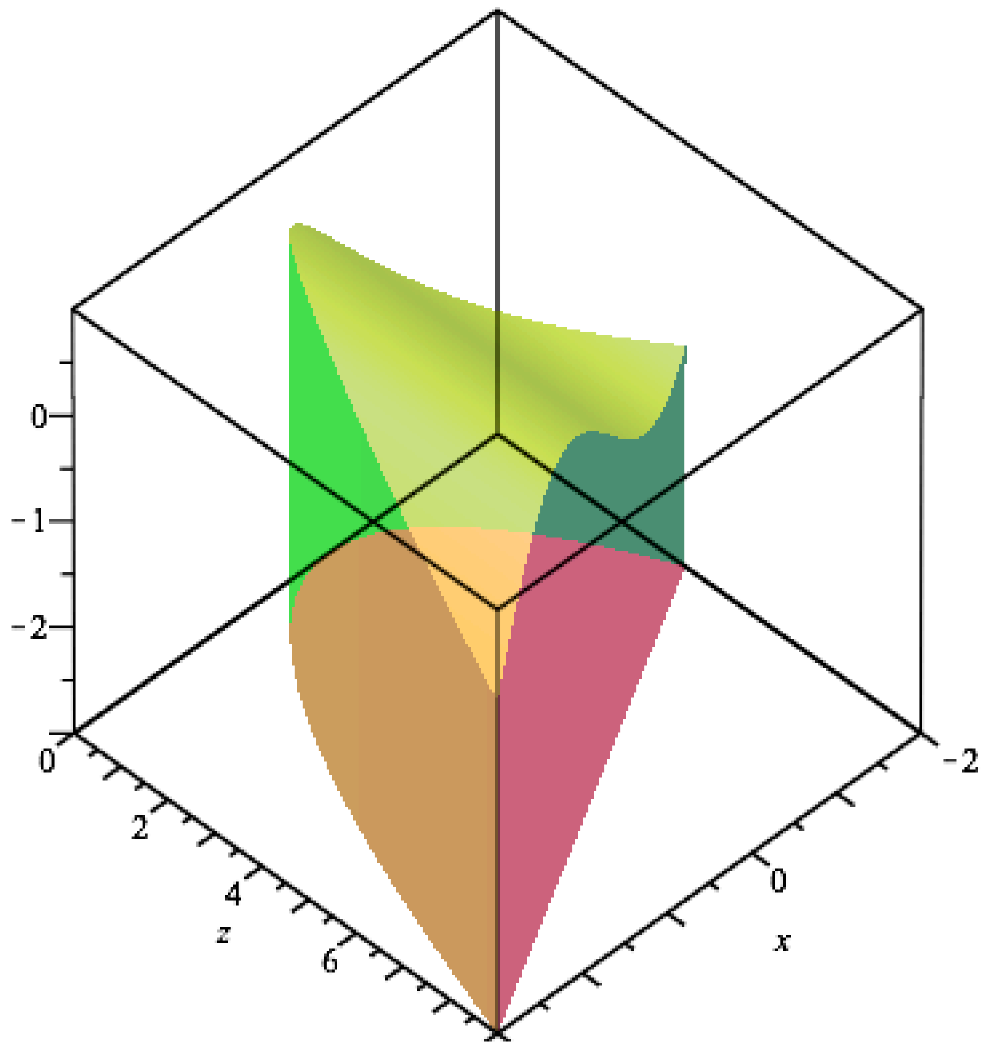
> $P3 := plot3d([x, y, -3], x = -2 .. 3, y = \mathrm{x}^2 .. x + 6, style = surface, color = red, transparency = 0.5)$

$$P3 := PLOT3D(...)$$ (20

> $P4 := plot3d([x, y, \sin(x)], x = -2..3, y = x^2..x + 6, style = surface, color = yellow, transparency = 0.5)$

$$P4 := PLOT3D(...)$$ (21

> $display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed)$



Ekstraoppgave 11.6.2.

a)

> $with(plots)$

$[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra\_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]$ (22

For å plotte flatene, løser vi likningen for flaten med hensyn på en av de variable og skriver det slik:

> $P1 := plot3d([x, y, x + y], x = -5..5, y = -5..5, color = blue)$

$$P1 := PLOT3D(...) \quad (23$$

> $P2 := plot3d([x, y, 9 - x^2], x = -5..5, y = -5..5, color = green)$

$$P2 := PLOT3D(...) \quad (24$$

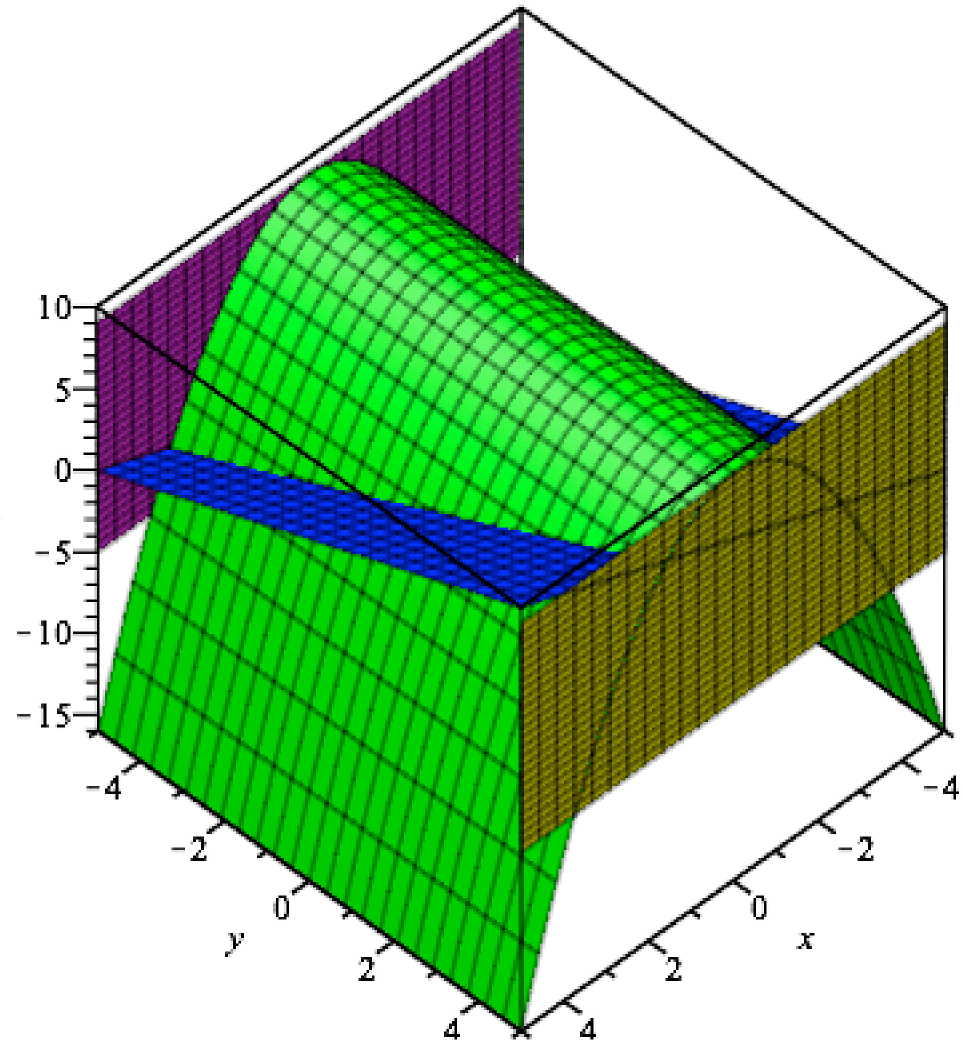
> $P3 := plot3d([x, 5, z], x = -5..5, z = -5..9, color = \text{yellow})$

$$P3 := PLOT3D(...) \quad (25$$

> $P4 := plot3d([x, -5, z], x = -5..5, z = -5..9, color = \text{magenta})$

$$P4 := PLOT3D(...) \quad (26$$

> $display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed, labels = [x, y, z])$



Noen av flatene ble for korte og noen for lange, men figuren gir likevel et visst inntrykk av området T.
Du kan dreie på figuren for å få et enda bedre inntrykk av hvordan flaten blir.
Vi velger å telle søylevis. Da starter z på den blå flaten $z = x + y$, og stopper når den når den grønne flaten $z = 9 - x^2$.
For å være sikker på at vi får med alle søylene én og bare én gang, trenger vi å se projeksjonen av T ned i xy-planet.

Denne projeksjonen ligger mellom de to vertikale veggene $y = 5$ og $y = -5$.

I x-retning er det skjæringskurvene mellom den grønne og den blå flaten som danner avgrensningen av projeksjonen.
Derfor eliminerer vi z fra likningene $z = x + y$ og $z = 9 - x^2$, og får $x + y = 9 - x^2$.

> $P1 := implicitplot(x + y = 9 - x^2,\ x = -5..5, y = -5..5, color = blue)$

$$P1 := PLOT(...) \tag{27}$$

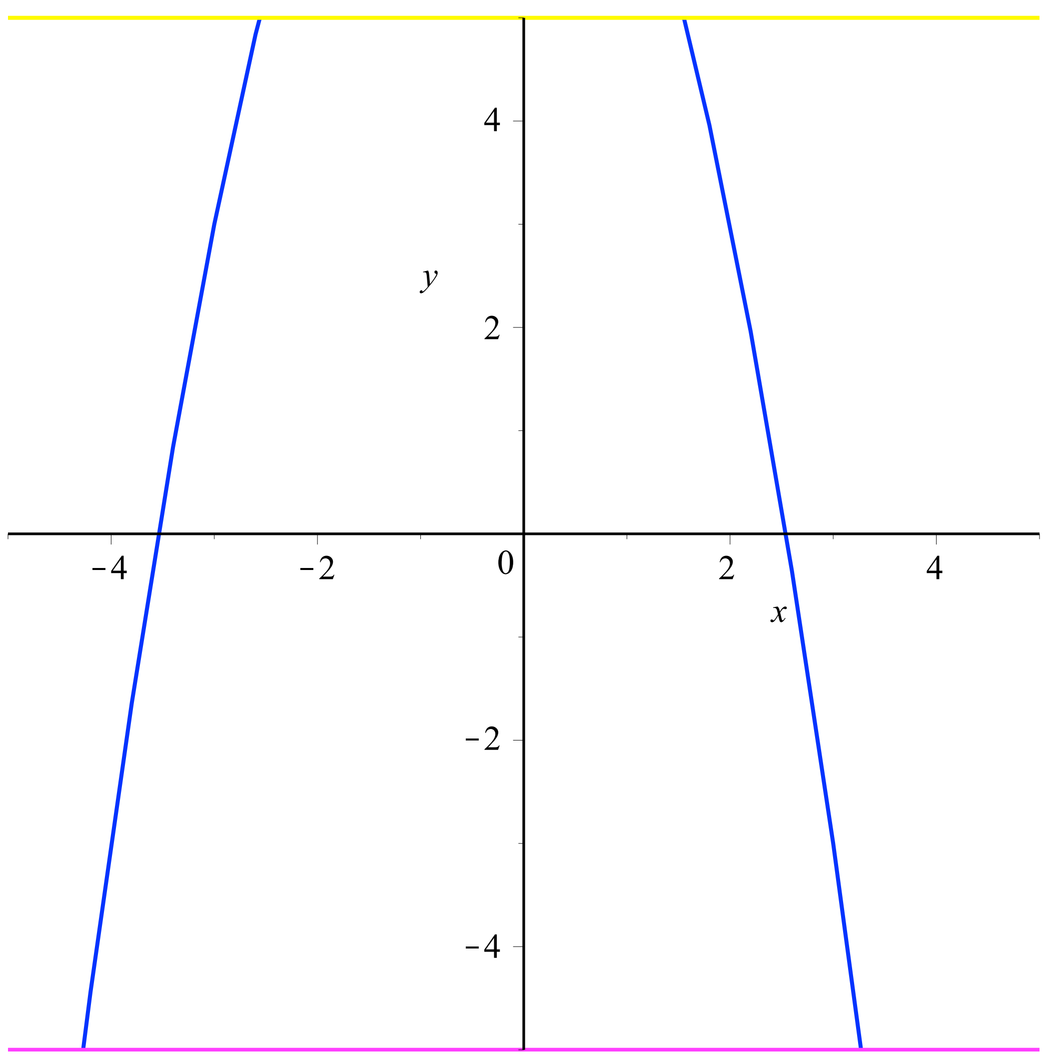
> $P2 := implicitplot(\mathrm{y} = -5, \mathrm{x} = -5..5, \mathrm{y} = -5..5, \mathrm{color} = \mathrm{magenta})$

$$P2 := PLOT(...) \tag{28}$$

> $P3 := implicitplot(y = 5, x = -5..5, y = -5..5, color = yellow)$

$$P3 := PLOT(...) \tag{29}$$

> $display(P1, P2, P3)$



Vi velger å integrere linjevis.
Da vil x gå fra den blå kurven til venstre, helt til den når den blå kurven til høyre.
De to blå kurvene er gitt ved $x + y = 9 - x^2$. For å finne likningene for dem, løser vi denne likningen med hensyn på x:

> $solve(x + y = 9 - x^2, x)$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y},\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y} \qquad (30$$

Med andre ord, x skal gå fra $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}$ helt til den når $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}$.
For å få med alle linjene med søyler, må y gå fra -5 til 5.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså $\int_{y=-5}^{y=5}\int_{x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}}\int_{z=x+y}^{z=9-x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{dz}\ \mathrm{dx}\ \mathrm{d}y$.

> $int\left(int\left(int\left(x^3, z=x+y..9-x^2\right), \mathrm{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{sqrt}(37-4y)..-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sqrt}(37-4y)\right), y=-5..5\right)$

$$-\frac{96387}{560}\sqrt{57}+\frac{8381}{1680}\sqrt{17} \qquad (31$$

> $simplify(\%)$

$$-\frac{96387}{560}\sqrt{57}+\frac{8381}{1680}\sqrt{17} \qquad (32$$

> $evalf(\%)$

$$-1278.905909 \qquad (33$$

Nå som vi har skrevet integralet som et iterert integral, kan vi også lage en penere illustrasjon av området T basert på beskrivelsen

$T:\quad x+y\le z\le 9-x^2,\qquad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}\le x\le -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y},\qquad -5\le y\le 5$

> $P1 := plot3d\left([x, y, x+y], x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}..-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}, y=-5..5, color=blue\right)$

$$P1 := PLOT3D(...) \qquad (34$$

> $P2 := plot3d\left([x, y, 9-x^2],\ x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}..-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}, y=-5..5, color=green\right)$

$$P2 := PLOT3D(...) \qquad (35$$

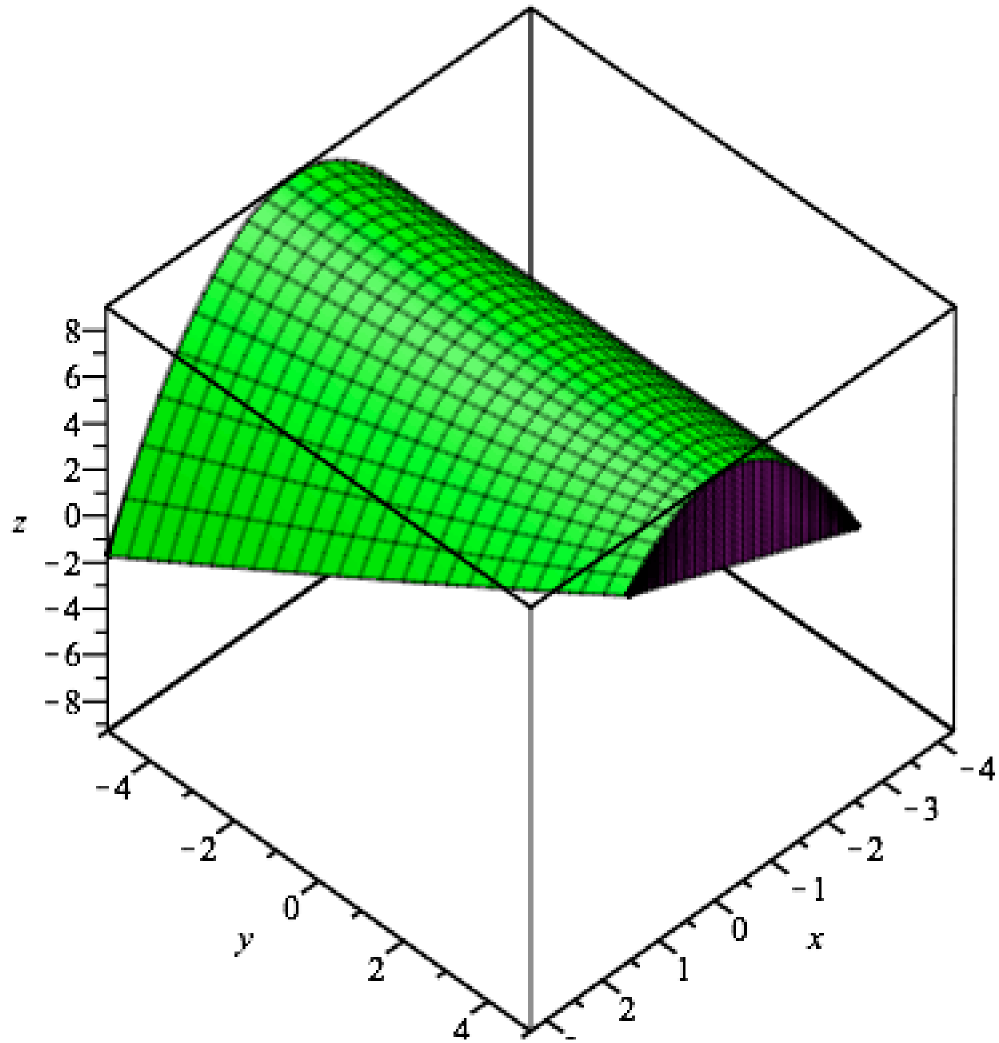
> $P3 := plot3d\left([x, -5, z],\ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4 \cdot (-5)} .. -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4 \cdot (-5)},\ \ z = \mathrm{x} - 5 .. 9 - \mathrm{x}^2, color = \mathrm{yellow} \right)$

$$P3 := PLOT3D(\ldots) \tag{36}$$

> $P4 := plot3d\left([x, 5, z],\ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4 \cdot 5} .. -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4 \cdot 5},\ \ z = \mathrm{x} + 5 .. 9 - \mathrm{x}^2, color = \mathrm{magenta} \right)$

$$P4 := PLOT3D(\ldots) \tag{37}$$

> $display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed, labels = [x, y, z])$



z
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
y
-4
-2
0
2
4
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2

>