Oppgave 2.3.35

a)
Vi starter med å finne de deriverte til funksjonen av orden 1 opp til og med 5 i punktet $x = 2$.
Det gjør vi ved å bruke kommandoen $diff(f(x),\ x\$n)$ der $f(x)$ er uttrykket som skal deriveres, x er navnet på den variable som vi deriverer med hensyn på, og tallet etter tegnet \$ gir hvilken orden den deriverte skal ha.
Svaret vi da får, er uttrykket for $f^{(n)}(x)$.
Men vi skulle ha $f^{(n)}(2)$.
Det klarer vi med kommandoen $subs\left(x = 2,\ f^{(n)}(x)\right)$ som betyr at x skal settes lik 2 i uttrykket $f^{(n)}(x)$.
Nå liker ikke Maple konstruksjonen $f^{(n)}(x)$, så vi skriver $f(n)(x)$.
Dette gir:

> $f(1)(x) := diff\left(\frac{1}{x}, x\$1\right)$

$$f(1)(x) := -\frac{1}{x^2} \quad (1$$

> $subs(x = 2, f(1)(x))$

$$-\frac{1}{4} \quad (2$$

> $f(2)(x) := diff\left(\frac{1}{x}, x\$2\right)$

$$f(2)(x) := \frac{2}{x^3} \quad (3$$

> $subs(x = 2, f(2)(x))$

$$\frac{1}{4} \quad (4$$

> $f(3)(x) := diff\left(\frac{1}{x},\ x\$3\right)$

$$f(3)(x) := -\frac{6}{x^4} \quad (5$$

> $subs(x = 2, f(3)(x))$

$$-\frac{3}{8} \tag{6}$$

og så videre. Legg merke til at det står kolon foran likhetstegnet når vi definerer $f(1)(x)$, $f(2)(x)$,... Det er nødvendig for at dette skal virke. Men dette kan bli ganske mye arbeid. Vi har en kvikkere måte: en **for**-løkke:

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $f(n)(x) := diff\left(\frac{1}{x}, x\$n\right) : subs(x = 2, f(n)(x))$ **end do**

$$f(1)(x) := -\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$f(2)(x) := \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$f(3)(x) := -\frac{6}{x^4}$$

$$-\frac{3}{8}$$

$$f(4)(x) := \frac{24}{x^5}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$f(5)(x) := -\frac{120}{x^6}$$

$$-\frac{15}{8} \tag{7}$$

Denne kommandoen ber Maple om først å sette $n = 1$, og så gjøre de beregningene som er listet opp mellom **do** og **end do** der det brukes at $n = 1$..

Deretter skal Maple øke n med 1 til 2, og så gjøre de beregningene som er listet opp mellom **do** og **end do** der det brukes at $n = 2$.
Deretter skal Maple øke n med 1 til 3, og så gjøre de beregningene som er listet opp mellom **do** og **end do** der det brukes at $n = 3$.
osv.
Siste gang Maple skal gjøre dette er når $n = 5$.

Det er to ekstra ting å merke seg her:
1. Det står kolon mellom de to kommandoene *diff* og *subs* som er listet opp. Det er nødvendig for å forklare Maple at den skal gjennomføre begge disse to kommandoene for hver verdi av n
2. Vi kan ikke trykke linjeskift mellom **do** og **end do** når vi skriver inn teksten, for linjeskift betyr UTFØR KOMMANDOEN. Så hvis ikke hele kommandoen er skrevet inn, inklusive **end do**, skjønner ikke Maple hva som menes. Blir uttrykkene så lange at de ikke får plass på linjen, fortar Maple et ufarlig linjeskift på egen hånd.

for-løkken ga oss de fem deriverte det spørres etter i oppgaven. Siden $f(2) = \frac{1}{2}$ er polynomet vi skal bruke gitt ved

$$p(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x-2) + \frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2 - \frac{\frac{3}{8}}{3!}(x-2)^3 + \frac{\frac{3}{4}}{4!}(x-2)^4 - \frac{\frac{15}{8}}{5!}(x-2)^5$$

> $P1 := plot\left(\frac{1}{x}, x = 0.5..5, color = \mathrm{red}\right)$

$$P1 := PLOT(...) \tag{8}$$

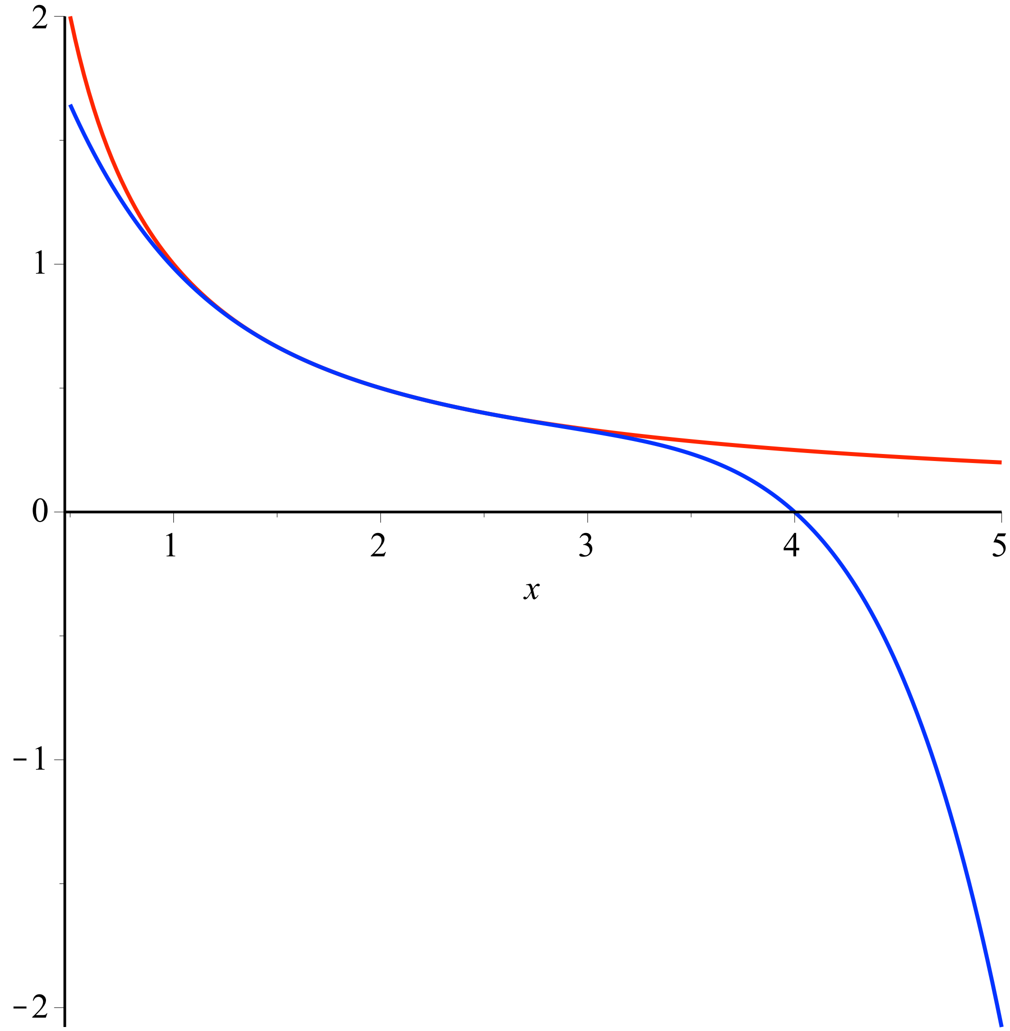
> $P2 := plot\left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x-2) + \frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2 - \frac{\frac{3}{8}}{3!}(x-2)^3 + \frac{\frac{3}{4}}{4!}(x-2)^4 - \frac{\frac{15}{8}}{5!}(x-2)^5, x = 0.5..5, color = \mathrm{blue}\right)$

$$P2 := PLOT(...) \tag{9}$$

> *with*(*plots*)

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*] (10)

> $display(P1, P2)$



Polynomet approksimerer funksjonen ganske godt i nærheten av $x = 2$ må man si.

Oppgave 2.3.36

a)

Når vi bare skal ha den førstederiverte, trenger vi ikke skrive $1 inne i *diff*-kommandoen.

> $f(1) := diff(\ln(\tan(x)), x)$

$$f(1) := \frac{1 + \tan(x)^2}{\tan(x)} \quad (11$$

> $subs\left(x = \frac{\text{Pi}}{4}, f(1)\right)$

$$\frac{1 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)} \quad (12$$

> $simplify\left(\frac{1 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)^2}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)}\right)$

$$2 \quad (13$$

Vi kan nå skrive opp likningen for tangenten og normalen til grafen til denne funksjonen i punktet der $x = \frac{\pi}{4}$ og funksjonsverdien er ln(1)=0:

Tangent: $y = 0 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, Normal: $y = 0 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

For å plotte selve kurven, lar vi x variere i et lite intervall om $x = \frac{\pi}{4}$.

Det kan ikke nå helt ned til $x = 0$, for der er $\tan x = 0$ og derfor $\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$ udefinert.

Det kan heller ikke strekke seg helt opp til $x = \frac{\pi}{2}$ for tan x går mot ∞ når x vokser mot $\frac{\pi}{2}$.

Vi velger derfor å la x gå fra 0.5 til $\frac{7\pi}{16}$, og ser hvordan det blir:

> $with(plots)$

$[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra\_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]$ (14

> $Kurven := plot\left(\ln(\tan(x)), x = 0.5 .. \frac{7\cdot \mathrm{Pi}}{16}, color = \mathrm{red}\right)$

$$Kurven := PLOT(...)$$ (15

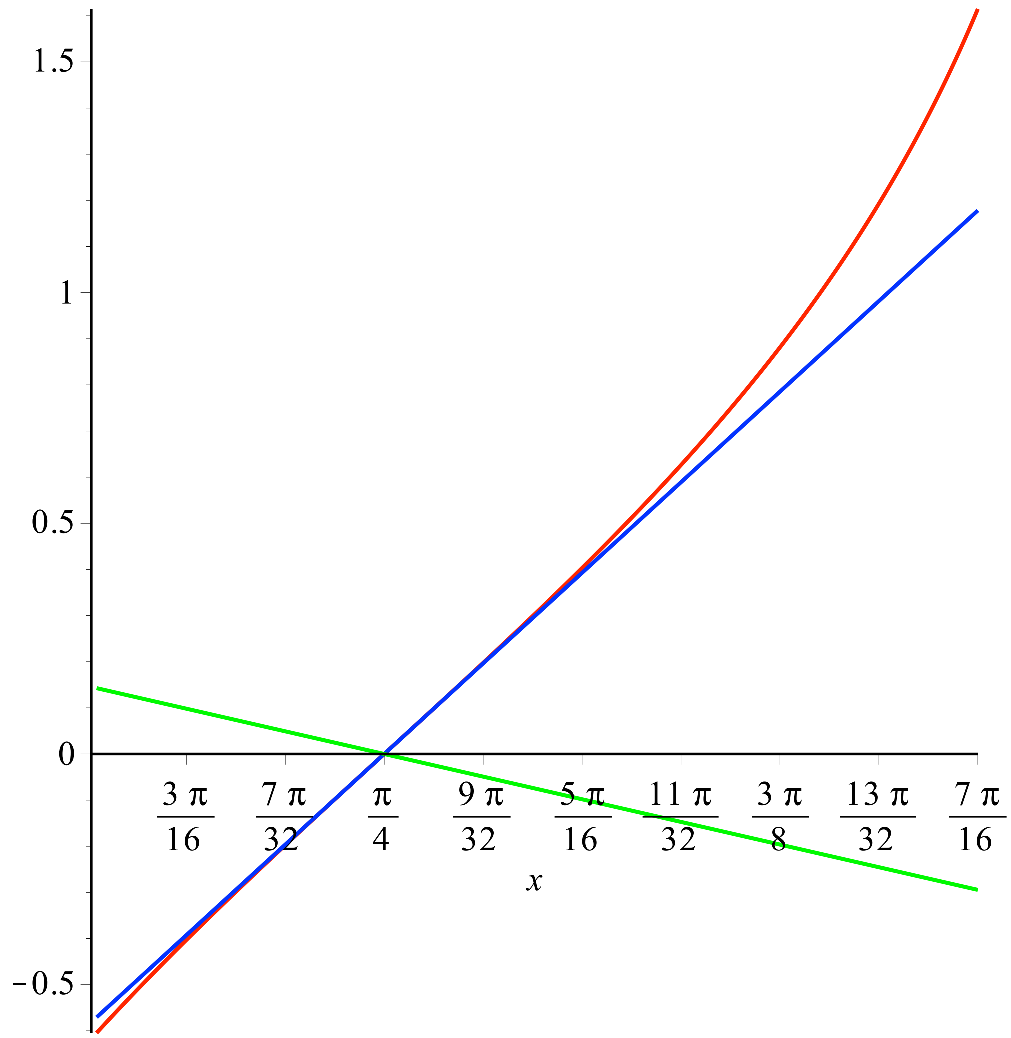
> $Tangenten := plot\left(2\left(x - \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right), x = 0.5 .. \frac{7\cdot \mathrm{Pi}}{16}, color = \mathrm{blue}\right)$

$$Tangenten := PLOT(...)$$ (16

> $Normalen := plot\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right), x = 0.5 .. \frac{7\cdot \mathrm{Pi}}{16}, color = \mathrm{green}\right)$

$$Normalen := PLOT(...)$$ (17

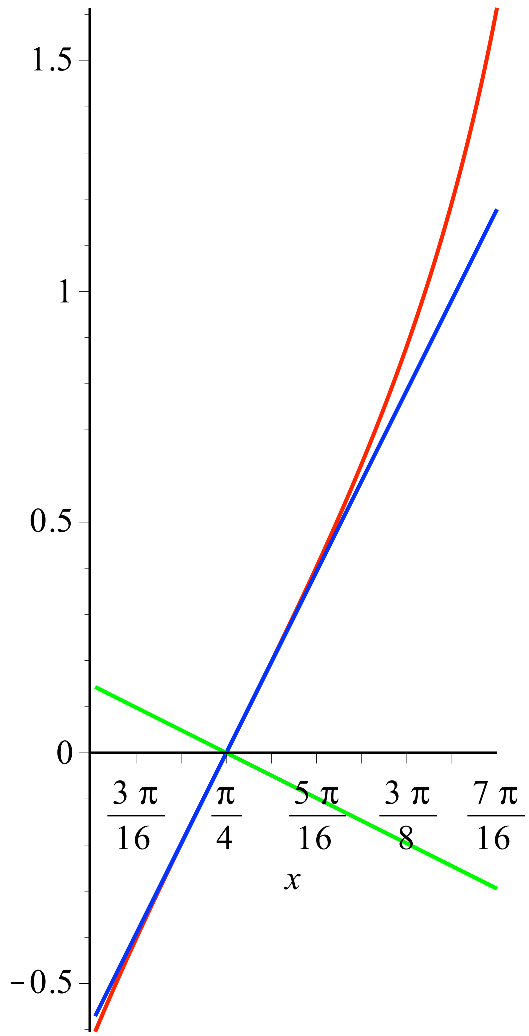
> $display(Kurven, Tangenten, Normalen)$



Dette ser jo slett ikke riktig ut.
Tangenten og normalen skal jo stå normalt på hverandre.
Det store spørsmålet er: hva har gått galt.

Svaret er: ingenting. Siden det ikke er samme målestokk på koordinataksene, blir vinkelen skjev.
Det kan vi fikse:

> *display*(*Kurven*, *Tangenten*, *Normalen*, *scaling* = *constrained*)



Nå står de normalt på hverandre!

b)

> $f(1) := diff(\cos(x^2), x)$

$$f(1) := -2\sin(x^2)\,x \tag{18}$$

> $subs(x = \mathrm{sqrt}(\mathrm{Pi}), f(1))$

$$-2\sin(\pi)\sqrt{\pi} \tag{19}$$

> $simplify(\%)$

$$0 \tag{20}$$

Dette betyr at gafen har en horisontal tangent og en vertikal normal i punktet der $x = \sqrt{\pi}$ og derved $y = \cos(\pi) = -1$

Tangent: $y = -1$ Normal: $x = \sqrt{\pi}$

For å tegne grafen til normalen, holder det ikke å bruke kommandoen *plot* som bare tegner grafer til funksjoner. Derfor bruker vi *implicitplot*

> $Kurven := plot(\cos(x^2), x = 0..3, color = \mathrm{red})$

$$Kurven := PLOT(...) \tag{21}$$

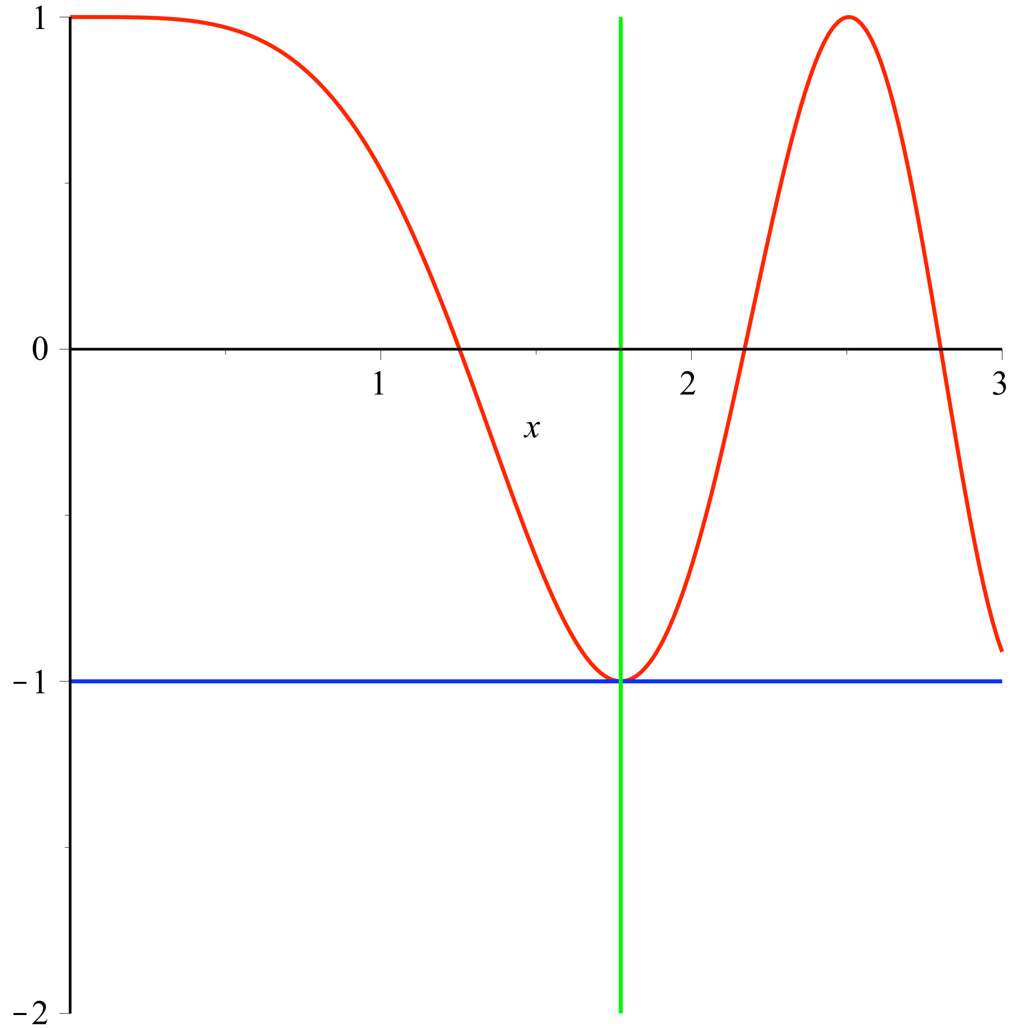
> $Tangenten := plot(-1, x = 0..3, color = \mathrm{blue})$

$$Tangenten := PLOT(...) \tag{22}$$

> $Normalen := implicitplot(x = \mathrm{sqrt}(\mathrm{Pi}), x = 0..3, y = -2..1, color = \mathrm{green})$

$$Normalen := PLOT(...) \tag{23}$$

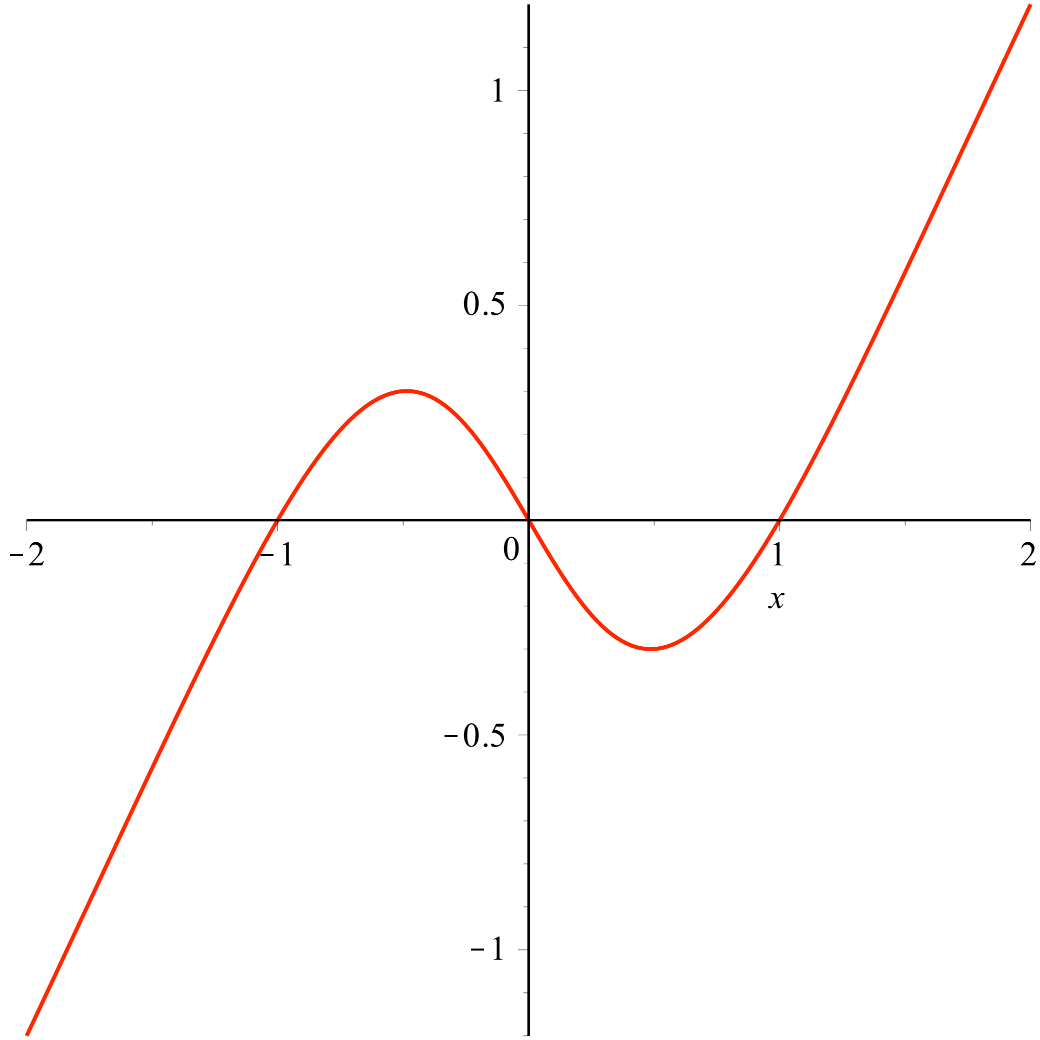
> $display(Kurven, Tangenten, Normalen)$



Oppgave 2.3.37

a)

> $plot\left(\frac{(x^3 - x)}{(x^2 + 1)}, x = -2..2, color = red\right)$



Husk at du skal skissere en kurve for den deriverte for hånd, før du fortsetter!!!

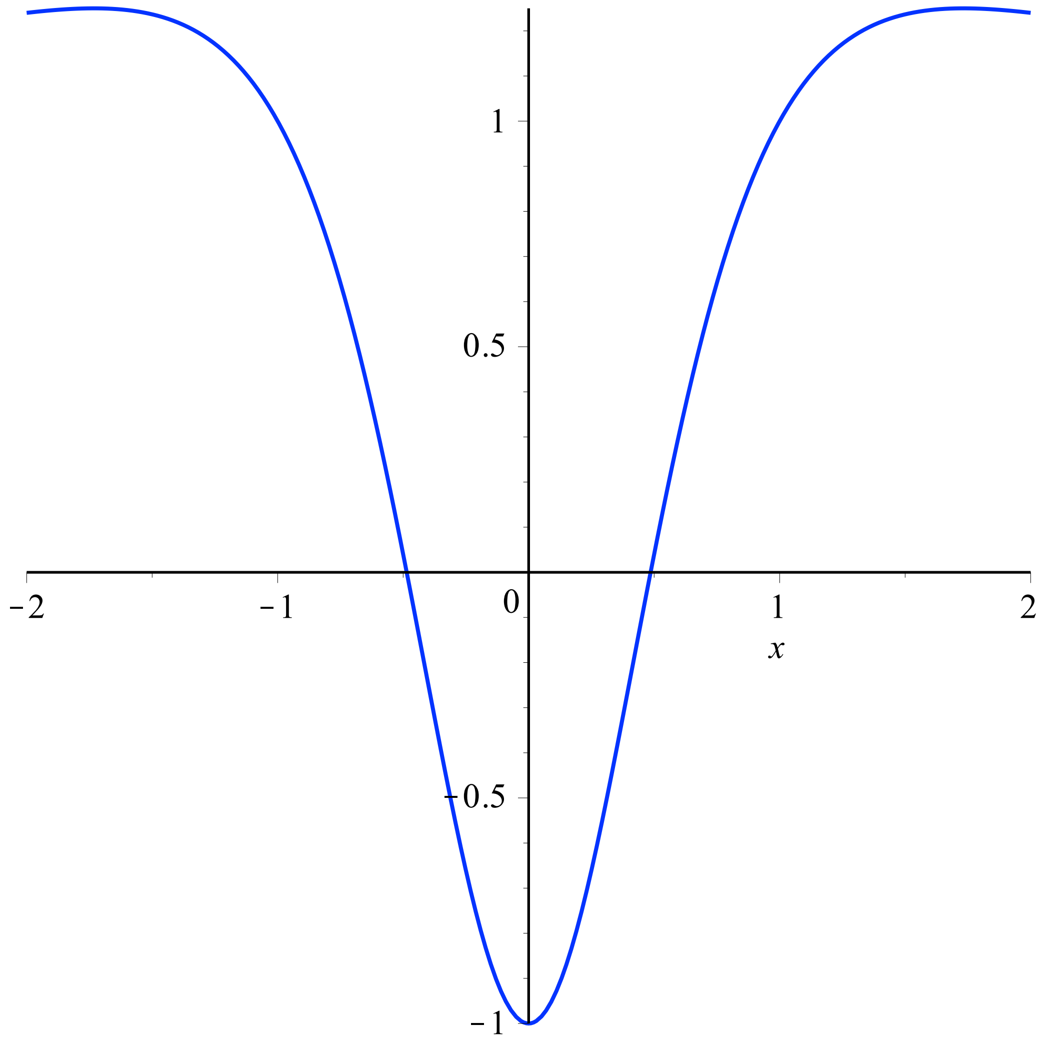
> $g(x) = \text{diff}\left(\frac{(x^3 - x)}{(x^2 + 1)}, x\right)$

$$g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{2(x^3 - x)x}{(x^2 + 1)^2} \tag{24}$$

> $simplify\left(\frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{2(x^3 - x)x}{(x^2 + 1)^2}\right)$

$$\frac{x^4 + 4x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \tag{25}$$

> $plot\left(\frac{x^4 + 4x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, x = -2..2, color = blue\right)$



Stemmer det med den kurven du tegnet? Hvis ikke, tenk nøye igjennom hvorfor kurven ble som den ble.
Det er kanskje lettere å sammenligne hvis vi tegner dem i samme koordinatsystem med samme målestokk på de to aksene:

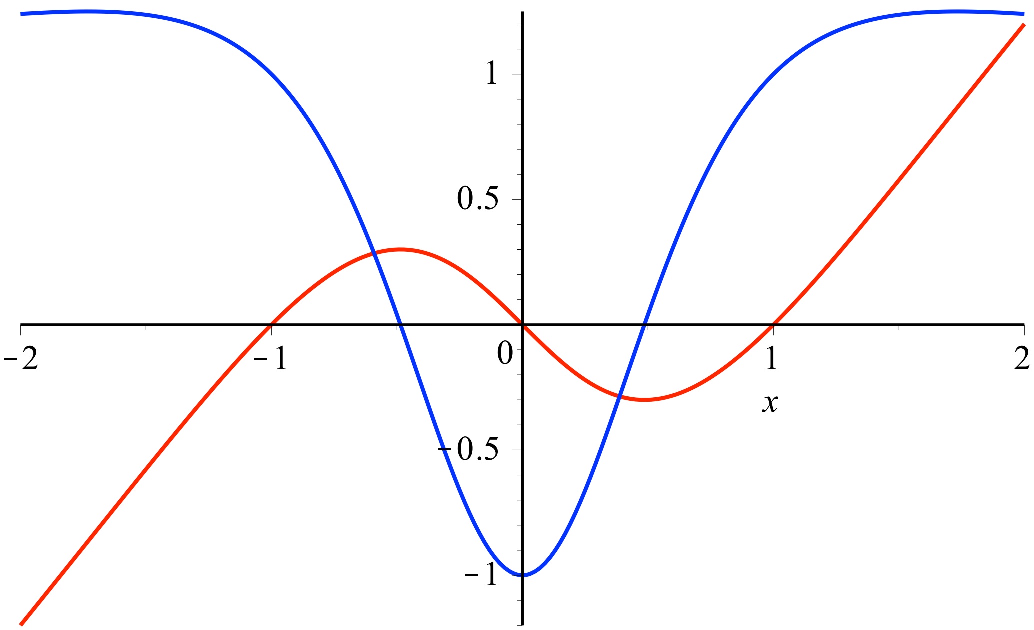
> $P1 := plot\left(\frac{(x^3 - x)}{(x^2 + 1)}, x = -2..2, color = red\right)$

$$P1 := PLOT(\ldots) \quad \textbf{(26}$$

> $P2 := plot\left(\frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}, x=-2..2, color = blue\right)$

$$P2 := PLOT(\ldots) \quad (27$$

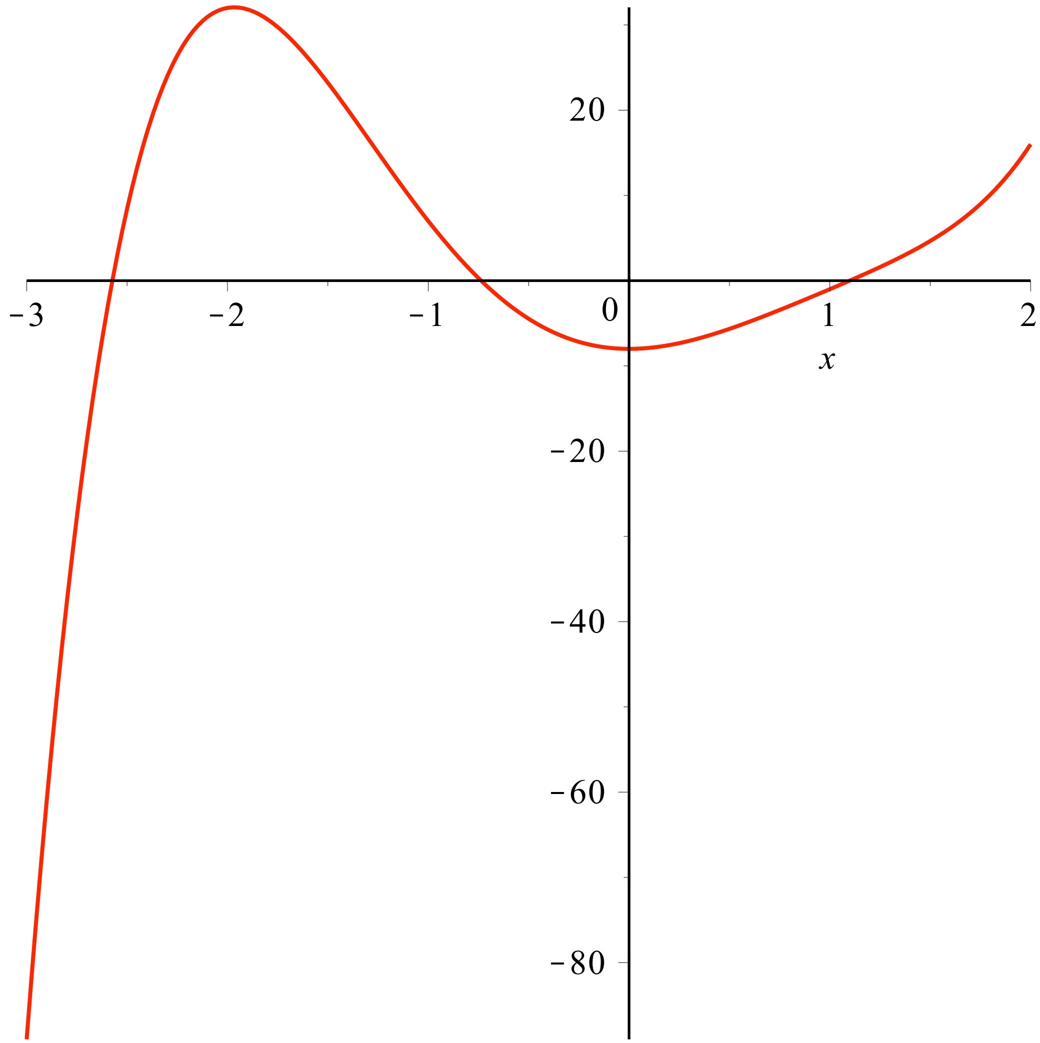
> $display(P1, P2, scaling = constrained)$



Oppgave 2.3.38

Jeg velger funksjonen $f(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 8$

> $plot(x^5 - x^4 - 5 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 8, x = -3..2, color = red)$

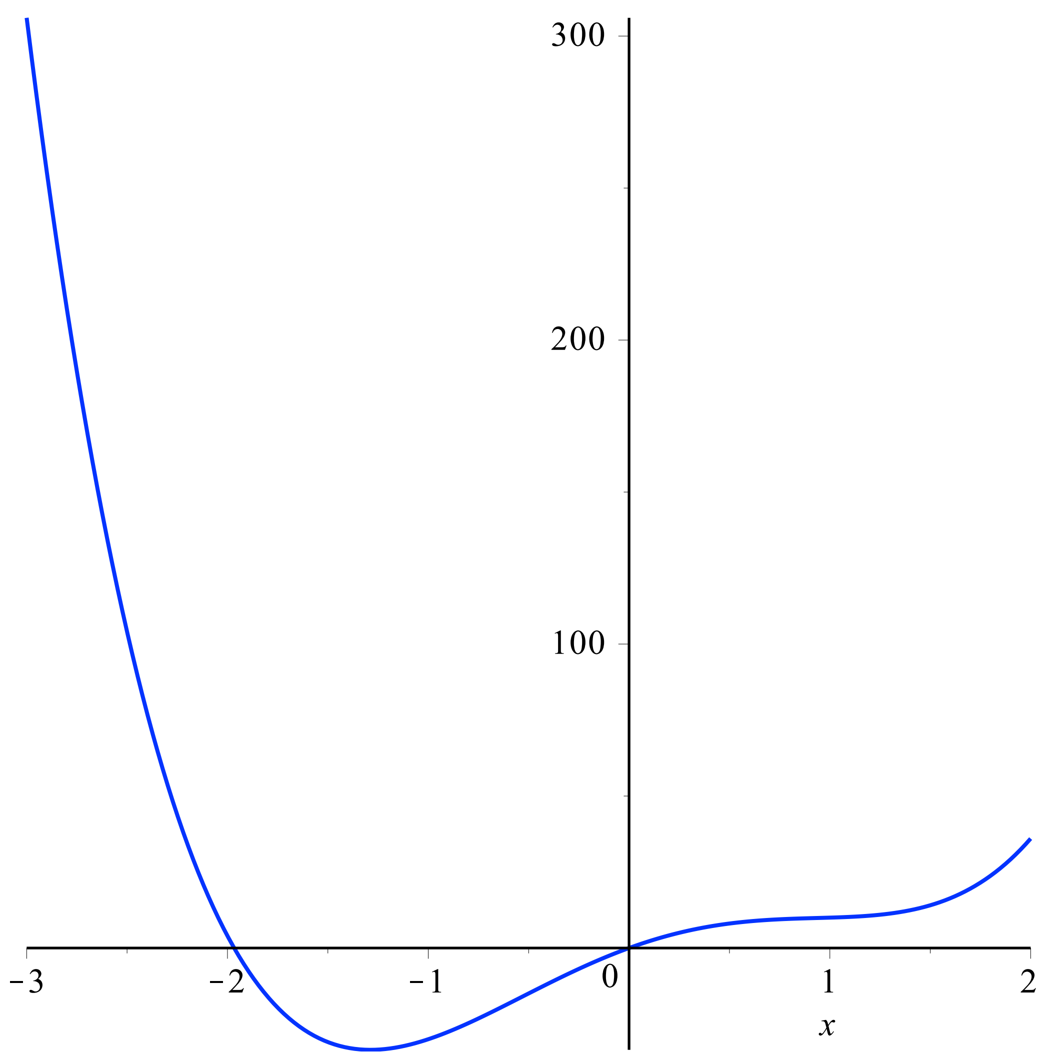


Som vi ser, er grafen voksende for $x < -2$ og for $x > 0$, sånn omtrent. Det betyr at den deriverte må være positiv i disse to intervallene..
Videre er grafen avtakende for $-2 < x < 0$, så her må den deriverte være negativ.
I skillepunktene $x = -2$ og $x = 0$ har grafen en horisontal tangent, så der må den deriverte være lik 0.
Grafen er jevn og pen, uten spisser og hjørner. Altså gjetter jeg at den deriverte eksisterer overalt og er jevn og pen.
Vi kontrollerer:

> $diff(x^5 - x^4 - 5\cdot x^3 + 12\cdot x^2 - 8, x)$

$$5\,x^4 - 4\,x^3 - 15\,x^2 + 24\,x \qquad \textbf{(28}$$

> $plot(\ 5\cdot x^4 - 4\cdot x^3 - 15\cdot x^2 + 24\cdot x,\ x = -3\,..2, color = [blue, red])$



Det er kanskje lettere å se sammenhengen hvis vi tegner de to grafene i samme koordinatsystem:

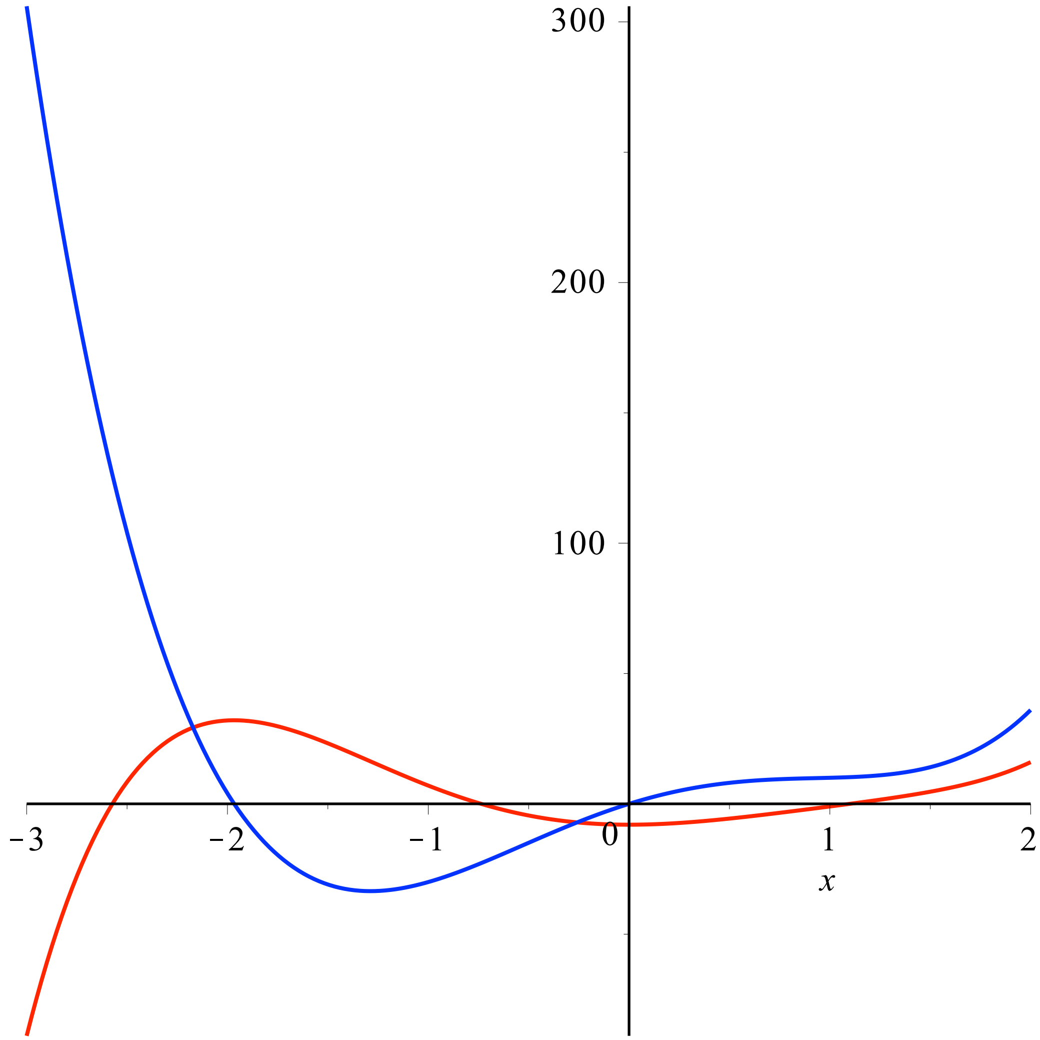
> $P1 := plot\left(x^5 - x^4 - 5 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 8, x = -3 ..2, color = red\right)$

$$P1 := PLOT(...) \qquad (29$$

> $P2 := plot\left(5 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 24 \cdot x,\ x = -3 ..2, color = [blue, red]\right)$

$$P2 := PLOT(...) \qquad (30$$

> $display(P1, P2)$

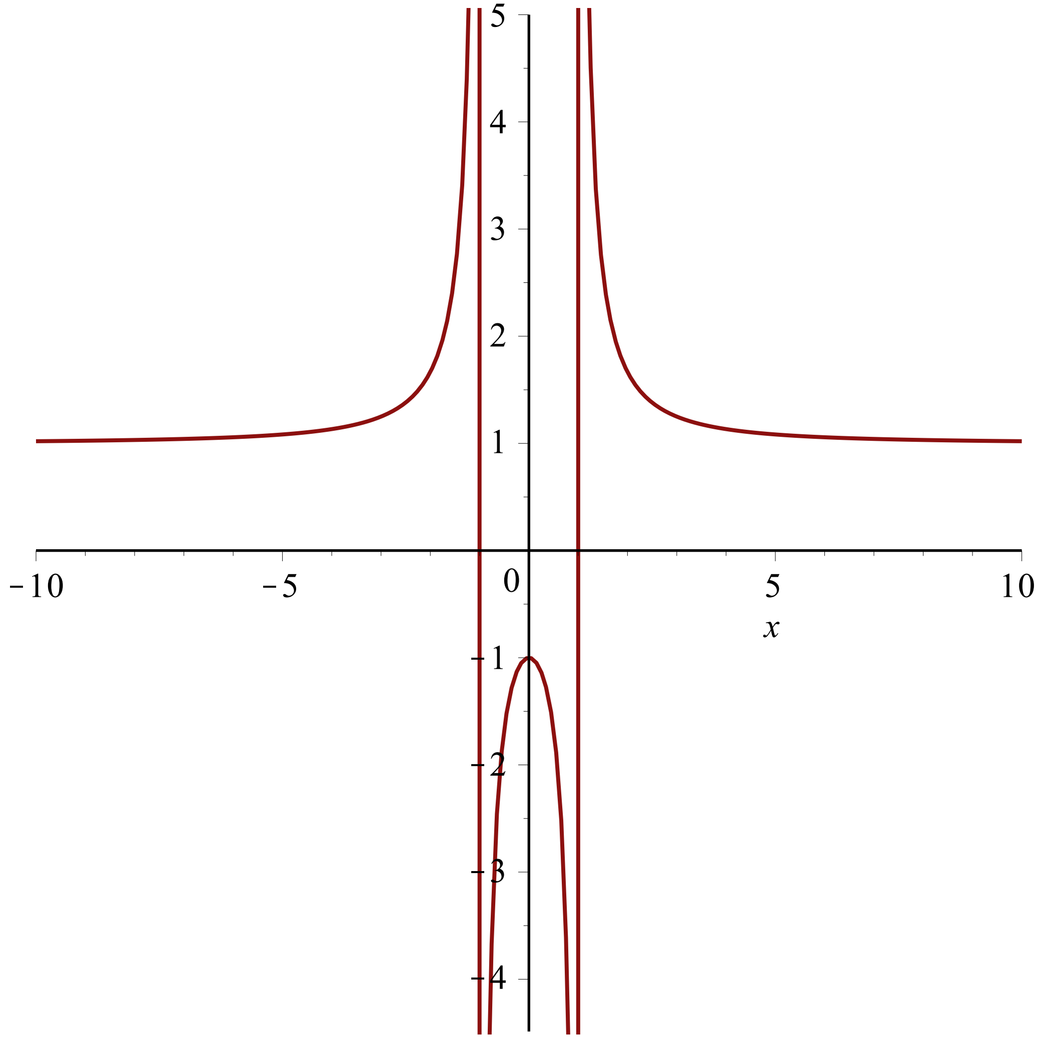


Den røde kurven er grafen til $f(x)$. Den viser at $f(x)$ er en voksende funksjon for $x < -2$ og for $x > 0$. Det stemmer med den blå kurven som er grafen til $f'(x)$ som viser at $f'(x) > 0$ i akkurat de samme intervallene.

Oppgave 2.3.39

c)

> $plot\left(\dfrac{(x^2+1)}{x^2-1}, x=-10..10\right)$



Av figuren ser det ut til at grafen har tre asymptoter, nemlig de to vertikale asymptotene $x=-1$ og $x=1$ og den horisontale asymptoten $y=1$.

Det stemmer da også med uttrykket for $f(x)$.

(Det ser egentlig ut som om Maple har tegnet de to vertikale asymptotene på egen hånd, men det er ikke helt slik...)

> $P1 := plot\left(\frac{(x^2+1)}{x^2-1}, x=-10..-1.1, color=red\right)$

$$P1 := PLOT(...) \quad (31$$

> $P2 := plot\left(\frac{(x^2+1)}{x^2-1}, x=-0.9..0.9, color=red\right)$

$$P2 := PLOT(...) \quad (32$$

> $P3 := plot\left(\frac{(x^2+1)}{x^2-1}, x=1.1..10, color=red\right)$

$$P3 := PLOT(...) \quad (33$$

> $P4 := implicitplot(y=1, x=-10..10, y=-10..10, color=green)$

$$P4 := PLOT(...) \quad (34$$

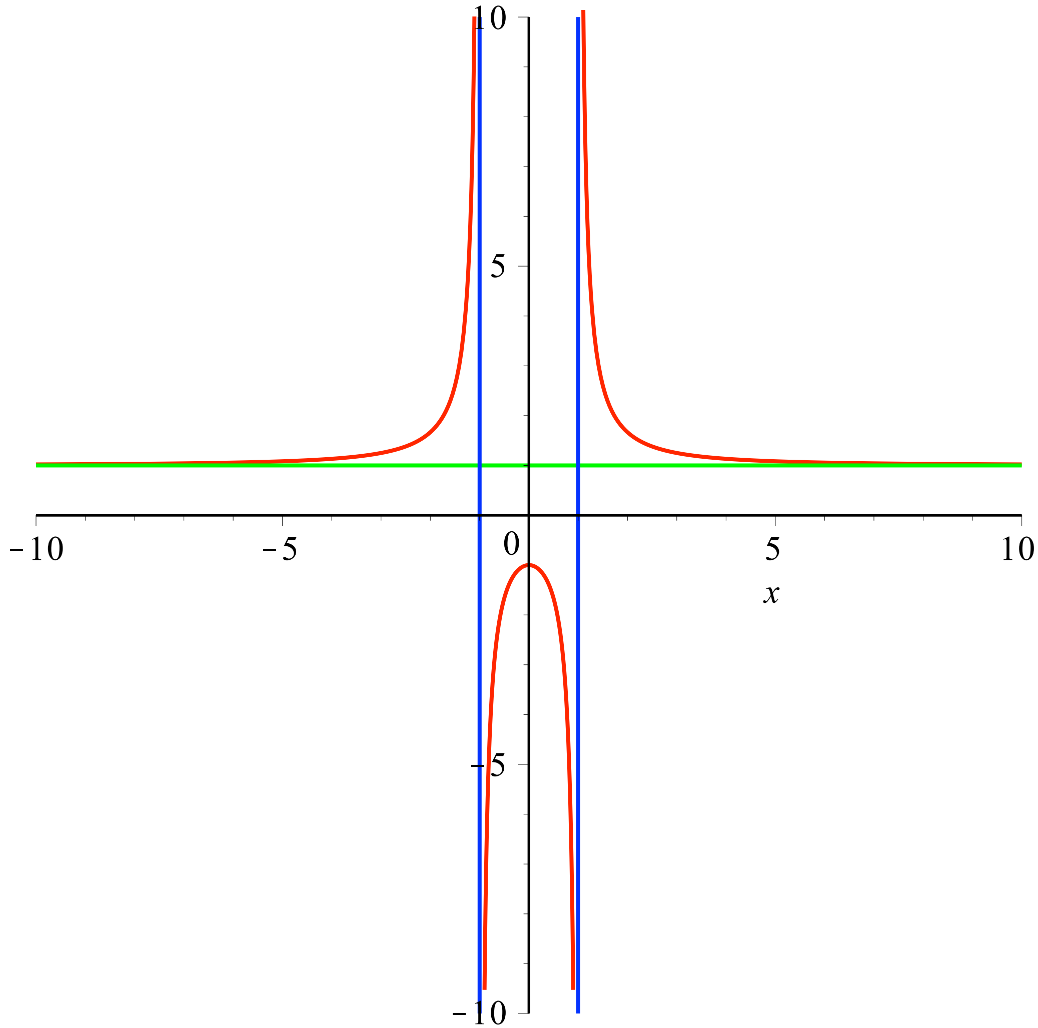
> $P5 := implicitplot(x=-1, x=-10..10, y=-10..10, color=blue)$

$$P5 := PLOT(...) \quad (35$$

> $P6 := implicitplot(x=1, x=-10..10, y=-10..10, color=blue)$

$$P6 := PLOT(...) \quad (36$$

> $display(P1, P2, P3, P4, P5, P6)$



Asymptotene er grønn og blå, mens grafen er rød.