Ekstraoppgave 11.6.1.

a)

> $with(plots)$

Vi plotter først de to flatene $x^2 + y^2 = 1$ og $z = 4 - x$ for å få en ide om hvordan T ser ut.

> $P1 := plot3d\left(\left[x, \text{sqrt}\left(1 - x^2\right), z\right], x = 0..4, z = 0..4, color = \text{blue}, style = surface\right)$

> $P2 := plot3d([x, y, 4 - x], x = 0..4, y = 0..4, color = \text{green}, style = surface)$

> $display(P1, P2, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

Det var ikke særlig opplysende, men drei på figuren, så får du et bedre inntrykk.
Figuren må være avrenset av det grønne planet og den blå sylinderveggen.
I tillegg har T bunn nede i xy-planet, fra origo og ut til den blå sylinderveggen, og sidevegger i de to vertikale koordinatplanene, fra z-aksen og ut til den blå sylinderveggen.

Vi velger å integrere søylevis (altså i z-retning innerst). En søyle går fra xy-planet der $z = 0$ til det grønne planet der $z = 4 - x$.
For å få med alle søylene, må vi integrere over projeksjonen av T i xy-planet. Vi ser av figuren at denne projeksjonen er det samme som bunnen til T.
Vi kan faktisk se projeksjonen ved å vippe opp figuren slik at du har xy-planet snudd rett mot deg, mens z-aksen peker rett inn i skjermen.
Men det er jo også fort gjort å tegne den opp på en egen figur:

> $implicitplot\left(x^2 + y^2 = 1, x = 0..1, y = 0..1\right)$

Teller vi søylene kolonnevis, er det y som teller. I kolonnen ved x vil y gå fra $y = 0$ til $y = \sqrt{1 - x^2}$.
For å få med alle kolonnene må x gå fra $x = 0$ til $x = 1$.

Vi kan derfor skrive det søkte integralet som det itererte integralet $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\text{sqrt}(1 - x^2)} \int_{z=0}^{4 - x} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$

Vi ber Maple beregne dette itererte integralet:

> $int\left(int\left(int(z, z = 0..4 - x), y = 0..\text{sqrt}\left(1 - x^2\right)\right), x = 0..1\right)$

En annen sak er at når vi har skrevet integralet som et iterert integral, kan vi skrive T som

$T: \quad 0 \le z \le 4 - x, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 1$

og bruke det til å lage en mye bedre tegning av T. For at ikke de ulike sidene av T skal dekke over hverandre, gjør vi sidene transparente. Graden av transparens er et tall mellom 0 og 1, jo høyere tall, jo mer transparent.

```
> P1 := plot3d([x, sqrt(1 - x^2), z], x = 0..1, z = 0..4 - x, color = blue, style = surface, transparency = 0.5, numpoints = 5000)
> P2 := plot3d([x, y, 4 - x], x = 0..1, y = 0..sqrt(1 - x^2), color = green, style = surface, transparency = 0.5)
> P3 := plot3d([x, y, 0], x = 0..1, y = 0..sqrt(1 - x^2), color = yellow, style = surface, transparency = 0.5)
> P4 := plot3d([0, y, z], y = 0..1, z = 0..4, color = yellow, style = surface, transparency = 0.5)
> P5 := plot3d([x, 0, z], x = 0..1, z = 0..4 - x, color = yellow, style = surface, transparency = 0.5)
> display(P1, P2, P3, P4, P5, axes = framed, scaling = constrained, labels = [x, y, z])
```

Ved å snu og dreie på figuren, får du et godt inntrykk av hvordan den ser ut.

b)

Det ser ut til at flatene $y = x^2$ og $y = 6 + x$ er vertikale (z mangler i likningene), mens flatene $z = -3$ og $z = \sin x$ avgrenser T i z-retning. Vi tegner derfor først de to vertikale flatene:

```
> P1 := plot3d([x, 6 + x, z], x = -5..5, z = -3..5, style = surface, color = blue)
> P2 := plot3d([x, x^2, z], x = -5..5, z = -3..5, style = surface, color = green)
> display(P1, P2, axes = boxed)
```

Det er klart at både den grønne og den blå flaten er tegnet for langt, men vi lar det stå slik foreløpig. Så var det de to flatene som avgrenser T i z-retning:

```
> P3 := plot3d([x, y, -3], x = -5..5, y = -11..11, style = surface, color = red)
> P4 := plot3d([x, y, sin(x)], x = -5..5, y = -11..11, style = surface, color = yellow)
```

> $display(P3, P4, axes = boxed)$

Vi velger å integrere søylevis. Av den siste figuren ser vi at hver søyle starter på $z = -3$ og ender når den når den gule flaten, altså for $z = \sin x$.
For å få med alle søylene, kan vi se på projeksjonen av T i xy-planet, og den finner vi av den første figuren.
Projeksjonen er rett og slett området innenfor kurvene $y = x^2$ og $y = 6 + x$. Vi tegner den:

> $implicitplot\left(\left[y = x^2, y = 6 + x\right], x = -5\,..5, y = -11\,..11, color = [green, blue]\right)$

Vi velger å telle søylene kolonnevis. Kolonnen ved x går fra $y = x^2$ til $y = x + 6$.
For å få med alle kolonnene, trenger vi å vite x- koordinatene i de to skjæringspunktene på grafen over.
De lar vi Maple finne:

> $solve\left(x^2 = x + 6, x\right)$

Aha! For å få med alle kolonnene, må x gå fra $x = -2$ til $x = 3$.
Integralet er derved gitt ved følgende itererte integral:
$\int_{x=-2}^{3} \int_{y=x^2}^{x+6} \int_{z=-3}^{\sin x} x^2 \cdot y \cdot z \, dz \, dy \, dx$. Vi lar Maple beregne det:

> $int\left(int\left(int\left(x^2 \cdot y \cdot z, z = -3\,..\sin(x)\right), y = x^2\,..x + 6\right), x = -2\,..3\right)$
> $simplify(\%)$
> $evalf(\%)$

Når vi nå har skrevet integralet på iterert form, så vet vi også at T er gitt ved

$T: \quad -3 \le z \le \sin x, \quad x^2 \le y \le 6 + x, \quad -2 \le x \le 3,$

noe vi kan bruke til å tegne et bilde av T:

> $P1 := plot3d([x, 6 + x, z], x = -2\,..3, z = -3\,..\sin(x), style = surface, color = blue, transparency = 0.5)$
> $P2 := plot3d\left(\left[x, x^2, z\right], x = -2\,..3, z = -3\,..\sin(x), style = surface, color = \text{green}, transparency = 0.5\right)$

```
> P3 := plot3d([x, y, -3], x = -2..3, y = x^2..x + 6, style = surface, color = red, transparency = 0.5)
> P4 := plot3d([x, y, sin(x)], x = -2..3, y = x^2..x + 6, style = surface, color = yellow, transparency = 0.5)
> display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed)
```

Ekstraoppgave 11.6.2.

a)

```
> with(plots)
```

For å plotte flatene, løser vi likningen for flaten med hensyn på en av de variable og skriver det slik:

```
> P1 := plot3d([x, y, x + y], x = -5..5, y = -5..5, color = blue)
> P2 := plot3d([x, y, 9 - x^2], x = -5..5, y = -5..5, color = green)
> P3 := plot3d([x, 5, z], x = -5..5, z = -5..9, color = yellow)
> P4 := plot3d([x, -5, z], x = -5..5, z = -5..9, color = magenta)
> display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed, labels = [x, y, z])
```

Noen av flatene ble for korte og noen for lange, men figuren gir likevel et visst inntrykk av området T.
Du kan dreie på figuren for å få et enda bedre inntrykk av hvordan flaten blir.
Vi velger å telle søylevis. Da starter z på den blå flaten $z = x + y$, og stopper når den når den grønne flaten $z = 9 - x^2$.
For å være sikker på at vi får med alle søylene én og bare én gang, trenger vi å se projeksjonen av T ned i xy-planet.

Denne projeksjonen ligger mellom de to vertikale veggene $y = 5$ og $y = -5$.
I x-retning er det skjæringskurvene mellom den grønne og den blå flaten som danner avgrensningen av projeksjonen.
Derfor eliminerer vi z fra likningene $z = x + y$ og $z = 9 - x^2$, og får $x + y = 9 - x^2$.

> $P1 := implicitplot\left(x+y=9-x^2,\ x=-5..5, y=-5..5, color=blue\right)$

> $P2 := implicitplot(\mathrm{y}=-5, \mathrm{x}=-5..5, \mathrm{y}=-5..5, \mathrm{color}=\mathrm{magenta})$

> $P3 := implicitplot(y=5, x=-5..5, y=-5..5, color=yellow)$

> $display(P1, P2, P3)$

Vi velger å integrere linjevis.
Da vil x gå fra den blå kurven til venstre, helt til den når den blå kurven til høyre.
De to blå kurvene er gitt ved $x+y=9-x^2$. For å finne likningene for dem, løser vi denne likningen med hensyn på x:

> $solve\left(x+y=9-x^2, x\right)$

Med andre ord, x skal gå fra $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}$ helt til den når $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}$.
For å få med alle linjene med søyler, må y gå fra -5 til 5.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså $\int_{y=-5}^{y=5}\int_{x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}}\int_{z=x+y}^{z=9-x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$

> $int\left(int\left(int\left(x^3, z=x+y..9-x^2\right), \mathrm{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{sqrt}(37-4y)..-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sqrt}(37-4y)\right), y=-5..5\right)$

> $simplify(\%)$

> $evalf(\%)$

Nå som vi har skrevet integralet som et iterert integral, kan vi også lage en penere illustrasjon av området T basert på beskrivelsen

$T: \quad x+y \le z \le 9-x^2, \qquad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y} \le x \le -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}, \qquad -5 \le y \le 5$

> $P1 := plot3d\left([x, y, x+y], x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}..-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{37-4y}, y=-5..5, color=blue\right)$

> $P2 := plot3d\left(\left[x, y, 9 - x^2\right],\ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4\,y} \,..\, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4\,y}, y = -5\,..5, color = green\right)$

> $P3 := plot3d\left(\left[x, -5, z\right],\ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4\cdot(-5)} \,..\, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4\cdot(-5)},\ \ z = \mathrm{x} - 5\,..9 - \mathrm{x}^2, color = \mathrm{yellow}\right)$

> $P4 := plot3d\left(\left[x, 5, z\right],\ x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4\cdot 5} \,..\, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37 - 4\cdot 5},\ \ z = \mathrm{x} + 5\,..9 - \mathrm{x}^2, color = \mathrm{magenta}\right)$

> $display(P1, P2, P3, P4, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

>