Rungekuttametodene løser initialverdiproblemer på formen $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ der $F(x, y)$ står for et uttrykk i x og y.
De er iterative metoder, så **for** - løkker egner seg ypperlig i denne sammenhengen.
Vi må bare vite hva som skal utføres i løkken.

For å plotte punktene vi får, skal vi bruke kommandoen *pointplot*
men da må vi hente inn Maples plottekommandoer

> $with(plots)$

Ekstraoppgave 4.6.1

a)

Iterasjonen er her $y_n = y_{n-1} + h\left(x_{n-1}^2 + x_{n-1} \cdot y_{n-1}\right)$ med $y_0 = 0,\ x_0 = 0$

(i)

Vi setter startverdiene for x og y, verdien for h og definerer plottet P_1 av det første punktet.
Legg merke til at vi bruker hakeparenteser når vi skriver inn indekser.
Kommandoen *pointplot* brukes for å plotte ett og ett punkt.

> $x[0] := 0 : y[0] := 0 : h := 0.2$

For å finne de resterende punktene og definere plottene for dem, bruker vi en **for** - løkke.
Kontroller selv at denne løkken gjør akkurat det vi vil:

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $y[n] := y[n-1] + h\cdot\left(x[n-1]^2 + x[n-1]\cdot y[n-1]\right) :\ x[n] := x[n-1] + h$ **end do**

For å plotte disse punktene, lager vi en liste av dem som vi kan kalle hva vi vil. Her er listen kalt *points*

Kommandoen for å lage en slik liste er *seq*
Legg merke til at vi bruker hakeparentes rundt de to koordinatene til punktet også.

> $points := \{seq([x[n], \mathrm{y}[\mathrm{n}]], n = 0 ..5)\}$

Og så plotter vi punktene ved hjelp av kommandoen *pointplot*

> $pointplot(points, color = blue)$

Eller hvis du vil ha linjestykker mellom punktene:

> $plot(points, color = blue)$

Et lite råd på slutten: Dersom man skal plott mange punkter, og ikke trenger å vite tallkoordinatene til punktene, kan man unngå utskriften etter **for** -løkken og listekonstruksjonen ved å avslutte disse kommandoene med kolon. Prøv for eksempel

> $x[0] := 0 :\ y[0] := 0 : h := 0.2 :$ **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $y[n] := y[n-1] + h\cdot\left(x[n-1]^2 + x[n-1]\cdot y[n-1]\right) :\ x[n] := x[n-1] + h$ **end do**: $points := \{seq([x[n], \mathrm{y}[\mathrm{n}]], n = 0 ..5)\} :\ plot(points, color = blue)$

Ekstraoppgave 4.6.2

a)

Rungekuttametodene løser initialverdiproblemer på formen $y' = F(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$ der $F(x, y)$ står for et uttrykk i x og y.
De er iterative metoder, så **for** - løkker egner seg ypperlig i denne sammenhengen.
Vi må bare vite hva som utføres i løkken.

Iterasjonen er her $y_n = y_{n-1} + h\left(xx_{n-1}^2 + xx_{n-1}yy_{n-1}\right)$ der $xx_{n-1} = x_{n-1} + \frac{h}{2}$

og $yy_{n-1} = y_{n-1} + \frac{\left(x_{n-1}^2 + x_{n-1}y_{n-1}\right)\cdot h}{2}$ med $y_0 = 0,\ x_0 = 0$

Her har vi skrevet xx og yy istedenfor $hat\,x$ og $hat\,y$ Siden det ikke står noe multiplikasjonstegn mellom de to $x -$ ene eller y-ene, oppfatter Maple dem som nye navn.

(i)

Først setter vi startverdiene. Ikke heng dere opp i at Maple bare kvitterer for den siste kommandoen -- Maple har merket seg alle tre.

$> \mathrm{x}[0] := 0 :\ \mathrm{y}[0] := 0 :\ h := 0.2$

$> \textbf{for } n \textbf{ from } 1 \textbf{ by } 1 \textbf{ to } 5 \textbf{ do } xx[n-1] := x[n-1] + \frac{h}{2} :\ yy[n-1] := \frac{\left(x[n-1]^2 + x[n-1]\cdot y[n-1]\right)\cdot h}{2} :\ y[n] := y[n-1] + h\cdot\left(xx[n-1]^2 + xx[n-1]\cdot yy[n-1]\right) :\ x[n] := x[n-1] + h \textbf{ end do}$

$> \mathrm{points} := \{seq([x[n], y[n]],\ n = 0..5)\}$

$> pointplot(points)$

Ekstraoppgave 4.6.3

a)

Iterasjonen er nå adskillig mer komplisert. Spesielt brukes funksjonsuttrykket $F(x, y) = x^2 + x\cdot y$ gjentatte ganger.
Det enkleste er derfor å definere denne funksjonen i Maple.
Men det er en funksjon som er avhengig av to variable. Definisjonen blir derfor

$> F := (x, y) \rightarrow x^2 + x\cdot y$

Når vi skriver inn all beregningen som skal foregå i **for**-løkken, må vi passe på rekkefølgen.
Uttrykket for y_n må komme etter at vi har gitt verdi til m_{n-1}.
Uttrykket for m_{n-1} må komme etter at vi har gitt verdier til $m1_{n-1}$, $m2_{n-1}$, $m3_{n-1}$ og $m4_{n-1}$.
Og disse siste 4 uttrykkene må komme akkurat i den rekkefølgen (fordi de avhenger av hverandre på den spesielle måten de gjør).

(i) Først setter vi startverdiene. Ikke heng dere opp i at Maple bare kvitterer for den siste kommandoen -- Maple har merket seg alle tre.

> $x[0] := 0 :\ y[0] := 0 : h := 0.2;$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $m1[n-1] := F(x[n-1], y[n-1]) :\quad m2[n-1] := F\left(x[n-1] + \frac{h}{2}, y[n-1] + \frac{m1[n-1]\cdot h}{2}\right) :\quad m3[n-1] := F\left(x[n-1] + \frac{h}{2}, y[n-1] + \frac{m2[n-1]\cdot h}{2}\right) :\quad m4[n-1] := F(x[n-1] + h, y[n-1] + m3[n-1]\cdot h) :\quad m[n-1] := \frac{(m1[n-1] + 2\cdot m2[n-1] + 2\cdot m3[n-1] + m4[n-1])}{6} :\quad y[n] := y[n-1] + m[n-1]\cdot h :\quad x[n] := x[n-1] + h$ **end do**

> $points := \{seq([x[n], y[n]], n = 0..5)\}$

> $pointplot(points)$

eller hvis du heller vil ha linjestykkene mellom punktene:

> $plot(points, color = blue)$

Ekstraoppgave 4.6.4.

a)

Ved diskretisering på intervallet $[a, b]$ med skrittlengde h skriver vi om differensiallikningen til en differenslikning.
Det gjør vi ved å sette

$x_n = a + nh,\;\; y(x_n) \approx y_n,\;\; y'(x_n) \approx \dfrac{(y_{n+1} - y_n)}{h}$ og

$$y''(x_n) \approx \frac{(y'(x_{n+1}) - y'(x_n))}{h} \approx \frac{\left(\dfrac{(y_{n+2} - y_{n+1})}{h} - \dfrac{(y_{n+1} - y_n)}{h} \right)}{h} = \frac{(y_{n+2} - 2\,y_{n+1} + y_n)}{h^2}$$

inn i differensiallikningen.

$y' + x^2 \cdot y = 4$ omformes da til $y_{n+1} - y_n + h \cdot x_n^2 \cdot y_n = 4\,h$ slik at $y_{n+1} = y_n - h \cdot x_n^2 \cdot y_n + 4\,h$
Initialbetingelsen $y(0) = 0$ omformes til $y_0 = 0$. Dessuten skal $h = 0.1$ ifølge oppgaven. Vi trenger derfor 20 trinn for å komme til $x = 2$.

```
> h := 0.1 : x[0] := 0 : y[0] := 0
> for n from 0 by 1 to 19 do y[n + 1] := y[n] − h·x[n]^2·y[n] + 4·h : x[n + 1] := x[n] + h end do
> points := {seq([x[n], y[n]], n = 0 ..20)}
> pointplot(points)
```