Oppgave 7.2.6

a)

> $x := 1.0$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 200 **do** $x := \sin(x)$ **end do**

Iterasjonen ser ut til å konvergere sakte mot null som er det eneste fikspunktet for sin x.

d)

Det er klart at $f(x) = 0$ hvis og bare hvis $\frac{(x^2 + 2x)}{4} = x$, altså hvis og bare hvis $x^2 - 2x = 0$. f har derfor akkurat to fikspunkter, nemli
$x = 0$ og $x = 2$.
Vi starter med midtpunktet mellom dem og ser hva som skjer:

> $x := 1.0$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$ **end do**

Iterasjonen ser ut til å konvergere mot null. Hva om vi prøver med en $x > 2$:

> $x := 5.0$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$ **end do**

Det ser ut til å blåse opp til uendelig.
Vi prøver litt nærmere $x = 2$:

> $x := 2.1$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \dfrac{(x^2 + 2\cdot x)}{4}$ **end do**

Hva om vi starter med x bittelitte granne mindre enn 2:

> $x := 1.99999$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \dfrac{(x^2 + 2\cdot x)}{4}$ **end do**

Iterasjonen avtar. Antakelig går den mot null igjen. Vi prøver litt lenger. Ved ikke å gi x en ny startverdi, blir startverdien den verdien den allerede har, nemlig den siste verdien i listen vi nettopp fikk.

> **for** n **from** 1 **to** 200 **do** $x := \dfrac{(x^2 + 2\cdot x)}{4}$ **end do**

Det går nok mot null, ja.

Oppgave 7.2.7.

(i)

Vi har brukt x som et tall, så det er best vi bruker *unassign* på x:

> *unassign*('x')

> *plot*$(2\cdot\sin(x) - x, x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi})$

Det ser ut til at funksjonen har nullpunkter for $x = 0$ og $x \approx \pm \dfrac{11\,\pi}{16}$.

(ii)

Vi skal plotte to grafer i samme koordinatsystem, nemlig grafen til $y = x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$ og grafen til $y = x$. Det kan vi gjøre ved bruk av kommandoen *display*
Men det finnes også en raskere måte: de to funksjonene settes i en hakeparentes, adskilt med et komma i en *plot*-kommando:

$$> \ plot\left(\left[x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right], x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi}\right)$$

De tre punktene vi fant i (i) er de tre skjæringspunktene mellom de to grafene på denne figuren. Hvorfor?

(iii)

$$> \ plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi}\right)$$

Ikke bare ser det ut til at de deriverte av $F(x)$ er lik null i de tre punktene, men den deriverte er ganske nær null i nærheten av fikspunktene også.
Men la oss plotte grafen til $F'(x)$ i små omegner om fikspunktene:

$$> \ plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = -0.01\,..0.01\right)$$

$$> \ plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = \frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16} - 0.5\,..\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16} + 0.5\right)$$

$$> \ plot\left(\mathrm{diff}\left(x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = -\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16} - 0.5\,..-\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16} + 0.5\right)$$

(iv)

$U = (\alpha - p,\ \alpha + p)$ være en symmetrisk omegn om fikspunktet α der $F'(x)$ er kontinuerlig med $|F'(x)| < 1$ for alle $x \in U$**.** La $x \in U$.

Siden $F'(x)$ er kontinuerlig i U finnes det en (positiv) konstant $K < 1$ slik at $|F'(c)| \leq K$ for alle c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α.

Videre følger det av sekantteoremet (side 133) at det finnes en c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α, slik at $\frac{(F(x) - F(\alpha))}{x - \alpha} = F'(c)$.

Det betyr at $|F(x) - F(\alpha)| = |F(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|$. Det vil si, *F(x)* har mindre avstand til α enn x har.

Derfor må (av samme grunn) $|F \circ F(x) - \alpha| \leq K|F(x) - \alpha| \leq K^2|x - \alpha|$

og så videre. Siden $K^n \to 0$ når $n \to \infty$, må $F^{[n]}(x) \to \alpha$.

(v)

Vi ser først på fikspunktet nær $\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16}$

> $c := \mathrm{evalf}\left(\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16}\right)$

> $c := subs\left(x = c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)$

> $c := evalf(\%)$

> $c := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

(Vi bruker *subs* istedenfor å sette x lik verdien. Derved slipper vi å bruke *unassign('x')* etterpå.)

> $c := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

$\alpha \approx 1.895494$ er derfor en bedre approksimasjon til dette fikspunktet. På grunn av symmetrien er også $\alpha \approx -1.895494$ en bedre approksimasjon til fikspunktet nær $-\frac{11 \cdot \mathrm{Pi}}{16}$.

For $\alpha = 0$ kan vi se hva som skjer om vi starter med $x = 0.5$

> $c := 0.5$

> $\mathrm{c} := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

> $\mathrm{c} := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

> $\mathrm{c} := \mathrm{evalf}\left(\mathrm{subs}\left(x = c,\ x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

Det gikk veldig fort mot null.

Oppgave 7.2.8.

a)

(i)

.

> $unassign('x')$

> $F := x \rightarrow x - \frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$

(ii)

> $plot(x^2 - 4x + 3, x = -1..5)$

Det er lett å kontrollere at de to nullpunktene til f (som vi skal finne ved Newtons metode) er $x = 1$ og $x = 3$.

(iii)

> $diff(\mathrm{F}(\mathrm{x}), x)$

> $solve(\% = 1, x)$

Likningen har altså bare komplekse røtter. $F'(x) = 1$ kan derfor ikke inntreffe for noen reell x.

> $solve\left(\frac{2\,(x^2 - 4\,x + 3)}{(2\,x - 4)^2} = -1, x\right)$

> $plot\left(\frac{2\,(x^2 - 4\,x + 3)}{(2\,x - 4)^2}, x = 0\,..4\right)$

Det er klart at $F'(x)$ er kontinuerlig for alle $x \neq 2$, og at $f(x)$ bare har de to fikspunktene 1 og 3.
Jeg foreslår derfor intervalletne $\left(-\infty, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ og $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$.
Som en liten kontroll ser jeg hva som skjer om jeg starter med $x = 50$: (jeg skriver 50.0 for jeg vil ikke ha eksakte svar, jeg vil ha svar på desimalform!)

> $x := 50.$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := x - \frac{(x^2 - 4\,x + 3)}{2\,x - 4}$ **end do**

Det ser bra ut. Og starter jeg med $x = -50$, får jeg også svar som forventet:

> $x := -50.0$

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := x - \frac{(x^2 - 4\,x + 3)}{2\,x - 4}$ **end do**

Oppgave 7.2.9.

b)

> $unassign('x')$

> $plot\left(\left[x^3 - 8x^2 - x + 1, x\right], x = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{2}\right)$

Det er klart at $y = x$ i alle punktene på den blå linjen, og at $y = f(x)$ i alle punktene på den røde kurven. I skjæringspunktene holder begge disse to likhetene. Det vil si, $y = f(x) = x$.

(ii)

> $diff\left(x^3 - 8x^2 - \mathrm{x} + 1, x\right)$

> $plot\left(\%, x = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{2}\right)$

Kurven viser at begge fikspunktene er frastøtende.