Oppgave 3.2.14

a)

> $diff\left(\frac{x}{\mathrm{sqrt}(1+x^2)}, x\right)$

> $simplify(\%)$

Dette viser at den deriverte ikke har noen reelle nullpunkter.

b)

> $diff\left(\exp\left(-\frac{x}{2}\right)+\exp(x), x\right)$

> $solve(\%, x)$

$f'(x)$ har altså bare ett nullpunkt, nemlig $x=-\frac{2}{3}\ln 2$.

c)

> $diff\left(\frac{\mathrm{sqrt}(1+x)}{\sinh(x)}, x\right)$

> $simplify(\%)$

Det er klart at denne brøken er lik 0 hvis og bare hvis telleren er =0.

> solve$(\sinh(x) - 2\cosh(x)\, x - 2\cosh(x) = 0, x)$

Maple klarte ikke å løse likningen eksakt i bare ett trinn. Utskriften betyr at vi først må finne nullpunktene til funksjonen
$g(z) = 2\left(e^{z}\right)^{2}\cdot z + \left(e^{z}\right)^{2} + 2z + 3.$
Men det er bare en omskrivning av den likningen vi ga til Maple.
Derfor prøver vi heller

> fsolve$(\sinh(x) - 2\cosh(x)\, x - 2\cosh(x) = 0, x)$

Kan vi stole på at dette er den eneste løsningen? Og kan vi stole på at den er riktig?
fsolve finner ikke alltid *alle* løsningene av en likning.
Hva vet vi egentlig om denne likningen? Den kan naturligvis skrives $\sinh x = 2(x+1)\cosh x$.
Vi kjenner grafen til sinh x som er en voksende funksjon. Grafen til $\cosh x$ er også velkjent, den er symmetrisk om y-aksen, og kan ligne en parabel med bunnpunkt i punktet (0,1).
Så la oss tegne grafene til $\sinh x$ og 2(x+1)cosh x i samme koordinatsystem

> *with(plots)*

> $P1 := plot(\sinh(x), x = -2..2, color = blue)$

> $\mathrm{P2} := \mathrm{plot}(2\cdot(\mathrm{x}+1)\cdot\cosh(x), x = -2..2, color = green)$

> *display(P1, P2)*

Siden $|2(1+x)\cosh x|$ vokser fortere enn $|\sinh x|$ utenfor dette intervallet, er det klart at likningen bare har én eneste løsning, og at den er litt større enn -1.5. Det stemmer perfekt med resultatet vi fikk ved bruk av *fsolve.*

d)

> $diff\left(\dfrac{\mathrm{sqrt}(x^2-1)}{x\cdot\ln(x^2+1)}, x\right)$

> *simplify*(%)

Merk: Funksjonen i oppgaven er bare definert for $|x| \geq 1$. Den er derfor bare deriverbar for $|x| > 1$. Vi søker derfor etter nullpunkter med absoluttverdi > 1.

Dessuten er denne brøken symmetrisk i x om punktet $x=0$, så det holder å finne positive løsninger.

> $solve\left(\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right)=2\,x^2\cdot\left(x^2-1\right),x\right)$

Det der var det ikke mye vits i.
Men vi har en liten Joker i ermet: Vi kan taste inn

> $fsolve\left(\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right)=2\,x^2\cdot\left(x^2-1\right),x\right)$

Hmmm. Har ikke likningen andre løsninger? Vi sjekker:

> $P1 := plot\left(\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right),x=0..1.5,color=blue\right)$

> $P2 := plot\left(2\cdot x^2\cdot\left(x^2-1\right),x=0..1.5,color=green\right)$

> $display(P1,P2)$

Oj sann! Det er klart at begge disse grafene er symmetriske om y - aksen, og at $2\,x^2\left(x^2-1\right)$ vokser fortere enn $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)$ når x øker videre mot uendelig.
Altså har likningen to ekstra nullpunkter som ser ut til å være ca 1.35 og -1.35.
Vi kan finne dem mer nøyaktig ved å tegne grafene i et veldig lite intervall nær 1.35.

> $P1 := plot\left(\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^2+1\right),x=1.34..1.36,color=blue\right)$

> $P2 := plot\left(2\cdot x^2\cdot\left(x^2-1\right),x=1.34..1.36,color=green\right)$

> $display(P1,P2)$

$f'(x)$ har derfor nullpunkter for $x=1.342$ og $x=-1.342$.

>

>