Oppgave 7.6.14.

a)

Det er ikke godt å vite hvor mange av de første leddene som blir null, så jeg starter med å tenke $y(x)$ som en delsum av en ukjent potensrekke. Spesielt skal Maple forstå at $y(x)$ er en funksjon, så jeg definerer $y(x)$ som en funksjon:

> $y := x \rightarrow \mathrm{a}[0] + \mathrm{a}[1] \cdot x + \mathrm{a}[2] \cdot x^2 + \mathrm{a}[3] \cdot x^3 + a[4] \cdot x^4 + \mathrm{a}[5] \cdot x^5 + \mathrm{a}[6] \cdot x^6 + \mathrm{a}[7] \cdot x^7 + \mathrm{a}[8] \cdot x^8 + \mathrm{a}[9] \cdot x^9 + \mathrm{a}[10] \cdot x^{10}$

Uttryket på venstre side av differensiallikningen er derved

> $diff(y(x), x, x) + x \cdot diff(y(x), x) + x^2 \cdot y(x)$

Dette er et polynom av grad 10. Vi vil gjerne ha leddene sortert etter grad.
Det gjør vi enklest ved å "utvikle polynomet i en potensrekke om origo", enten ved å bruke kommandoen *taylor*, eller like gjerne kommandoen *series* :

> $series(\%, x = 0, 12)$

Dette skal sammenlignes ledd for ledd med rekkeutviklingen av $f(x)$ om origo

> $series\left(\frac{(1-x)}{1+x^2}, x = 0, 12\right)$

>

Så er det selve sammenligningen. Vi starter med leddet av grad null, og jobber oss oppover til vi har nok:

x^0 : $\quad 2\,a_2 = 1 \quad$ gir at $\quad a_2 = \frac{1}{2}$

x^1 : $\quad 6\,a_3 + a_1 = -1 \quad$ gir at $\quad a_3 = -\frac{1}{6} - \frac{a(1)}{6},$

x^2 : $\quad 12\,a_4 + a_0 + 2\,a_2 = 12\,a_4 + a_0 + 1 = -1$ gir at $a_4 = -\dfrac{(2 + a_0)}{12}$

x^3 : $\quad 20\,a_5 + a_1 + 3\,a_3 = 20\,a_5 + a_1 + 3\left(-\dfrac{1}{6} - \dfrac{a_1}{6}\right) = 1$ gir at $a_5 = \dfrac{\left(1 - a_1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_1}{2}\right)}{20} = \dfrac{(3 - a_1)}{40}$

Derved har vi det vi trenger. a_0 og a_1 er vilkårlige konstanter, la oss kalle dem C og D. Da har vi at de fem første leddene av den generelle løsningen er

$$y(x) = C + \mathrm{D}\,x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{(1 + \mathrm{D})}{6}\,x^3 - \frac{(2 + C)}{12}x^4 + \frac{(3 - \mathrm{D})}{40}\,x^5 = C\left(1 - \frac{x^4}{12}\right) + \mathrm{D}\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}\right) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{3\,x^5}{40}.$$