Oppgave 11.5.13.

a)

Vi tegner først integrasjonsområdet.
For kurver som er gitt ved $r = g(\theta)$ kan vi bruke kommandoen *polarplot* (som krever at vi henter inn Maples plottekommandoer):

```
> with(plots)
> polarplot(2·cos(theta), theta = 0..2·Pi)
```

OBS! Origo er i midten av nettet, men tallene langs ytterkanten er verdiene av θ. (Nullen ytterst til høyre betyr altså at $\theta = 0$, slik at det markerer punktet $(2, 0)$ i polarkoordiater.

Ved nærmere undersøkelse, ser vi at vi bare trenger å la θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$ for at denne sirkelen skal bli beskrevet én gang. ($\cos(\theta) \geq 0$ for disse verdiene av θ.)
Det er viktig å vite når vi skal integrere!!! (Test gjerne hvordan plottet blir for ulike θ-intervaller.)

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den når sirkelen $r = 2\cos\theta$.

For å få med alle sektorene, lar vi θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.
Når vi skriver opp det itererte integralet, må vi huske at $dA = r\,dr\,d\theta$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet $\displaystyle\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2\cos\theta} f(r, \theta)\cdot r\cdot \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

Når vi så skriver opp integralet til Maple, kan vi glemme hvor det kommer fra.

```
> int(int(r^2·sin(theta)^2·r, r = 0..2·cos(theta)), theta = -Pi/2..Pi/2)
```

c)

Også her er området begrenset av en kurve gitt ved en likning på formen $r = g(\theta)$:

> *polarplot*$(4\cdot\sin(2\cdot\text{theta}), \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi})$

OBS! Kurven gjennomløpes bare én gang når θ går fra 0 til 2π, men $r = 4\cdot\sin(2\,\theta) < 0$ for $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ og for $\frac{3\,\pi}{2} < \theta < \pi$.
Det gjør det litt kinkig å integrere, fordi $dA = r\cdot dr\cdot d\theta < 0$ på disse intervallene.
Vi må derfor dele opp integrasjonsområdet slik at θ ikke skifter fortegn på noe intervall, slik at vi kan kontrollere fortegnet.

På den andre siden kan det være fristende å integrere over „ kronbladet" i første kvadrant, og multiplisere resultatet med 4, for kronbladene må være kongruente.
Ja, siden dette kronbladet også er symmetrisk om linjen $y = x$, burde det holde å integrere over det halve kronbladet, for så å multiplisere resultatet med 8.

Men slik er det nok ikke. Riktignok er de 8 kronblad-halvpartene kongruente, men integranden $\frac{r^2\sin(\theta)^2}{r^2+1}$ er avhengig av $\sin(\theta)^2$.
Og $\sin(\theta)^2$ er symmetrisk om de to koordinataksene (slik kronbladene er), men *ikke* om aksene $y = x$ og $y = -x$.

Derfor kan vi integrere over delen av området som ligger i første kvadrant, og så multiplisere det hele med 4.

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den treffer kurven $r = 4\,\sin(2\,\theta)$.
Vi skal ha med sektoren fra $\theta = 0$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet $4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=4\,\sin(2\,\theta)} f(r,\theta)\cdot r\;dr\;d\theta$.

> $4 \cdot int\left(int\left(\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2+1} \cdot r, r = 0..4 \cdot \sin(2 \cdot \text{theta})\right), \text{theta} = 0..\frac{\text{Pi}}{2}\right)$

Hva skjer nå? Maple regner og regner og regner. Nei, dette er ikke noe å vente på.
Så stans Maple! Det gjør du ved å klikke på stoppskiltet i øverste kommandolinje på arbeidsarket.
(Det er rødt, med en hvit, åpen hånd som holdes opp.)
Jeg avbrøt Maple etter 5 minutter.

Dette integralet ble antakelig for vanskelig for Maple. Maple regnet og regnet uten å komme i mål.
Vi får heller la Maple evaluere det numerisk.

> $evalf\left(4 \cdot Int\left(Int\left(\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2+1} \cdot r, r = 0..4 \cdot \sin(2 \cdot \text{theta})\right), \text{theta} = 0..\frac{\text{Pi}}{2}\right)\right)$

Merk at vi skriver *Int* med stor forbokstav når vi integrerer numerisk.
(Ellers prøver Maple å først integrere eksakt, for så å skrive svaret på desimalform.)
Akkurat i denne oppgaven, ser vi at det innerste integralet er et $r-$integral som slett ikke er vanskelig å bregne.
Derfor kan vi godt la Maple integrere det eksakt, ved å skrive *int* på det innerste integralet. Bare prøv!
Det er θ - integralet vi da får som volder problemet.

d)

Området D må beskrives i polarkoordinater hvis vi skal integrere i polarkoordinater (og det ser jo lurt ut).
Siden $x^2 + y^2 = r^2$, er $x^2 + y^2 \le 9$ det samme som $r^2 \le 9$, altså $0 \le r \le 3$, altså sirkelskiven med sentrum i origo og radius 3.
Siden $y = r \cdot \sin\theta$, er linjen $y = 1$ det samme som $r \cdot \sin\theta = 1$, altså $r = \frac{1}{\sin\theta}$.
Vi kan ikke plotte dette for alle θ, for $\sin\theta = 0$ er litt kinkig.
La oss plotte området i kartesiske koordinater først, så vi har en idé om hvordan dette blir.

> $with(plots)$

> $P1 := implicitplot\left(\mathrm{x}^2 + y^2 = 9,\ \ \mathrm{x} = -4..4, \mathrm{y} = -4..4, \mathrm{scaling} = \mathrm{constrained}, \mathrm{color} = \mathrm{green}\right)$

> $P2 := plot(\ 1,\ \ \mathrm{x} = -4..4, scaling = \mathrm{constrained}, \mathrm{color} = \mathrm{blue})$

> $display(P1, P2)$

>

Aha! D er den delen av området innenfor sirkelen som ligger ovenfor linjen $y = 1$.
Resten av jobben overlater jeg til deg.