Oppgave 6.2.15

a)
Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (2\,x)^2}\, dx = \sqrt{1 + 4\,x^2}\, dx$$

Buelengden er derfor

> $int\left(\operatorname{sqrt}\left(1 + 4 \cdot x^2\right), x = 0\,..2\right)$

eller hvis du heller vil ha det på desimalform

> $evalf(\%)$

Oppgave 6.2.16

b)
Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$$

(i) Rotasjon om x-aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=Pi} 2\,\pi\, 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) ds = 4\pi \int_{x=0}^{x=Pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$

> $int\left(4\cdot\text{Pi}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\text{sqrt}\left(1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x=0..\text{Pi}\right)$

> $simplify(\%)$

> $evalf(\%)$

(ii) Rotasjon om $y-$ aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2\,\pi\, x\, ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} x\sqrt{1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$

> $int\left(2\cdot\text{Pi}\cdot x\cdot\text{sqrt}\left(1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x=0..\text{Pi}\right)$

Ojsann. Dette betyr at Maple ikke klarer å beregne integralet eksakt. Men vi fortsetter trøstig ivei:

> $evalf(\%)$

(iii) Rotasjon om aksen $x=2$:

Radien i rotasjonen ved x er $2-x$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2\,\pi\, |2-x|\, ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} (2-x)\sqrt{1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\, dx$ der vi må huske at $|x-2| = x-2$ for $x \geq 2$ og $|x-2| = 2-x$ for $x \leq 2$. Dette gjør at vi må dele integralet i to deler:

> $int\left(2\cdot\text{Pi}\cdot(2-x)\cdot\text{sqrt}\left(1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x=0..2\right) + int\left(2\cdot\text{Pi}\cdot(x-2)\cdot\text{sqrt}\left(1+\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x=2..\text{Pi}\right)$

> $evalf(\%)$

c)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\, dx$$

(i) Rotasjon om x-aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 3 \cdot |\ln x| = 3 \ln x$ for $\sqrt{7} \leq x \leq 4$. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\,\pi\, 3 \ln x \, ds = 6\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} \ln x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\, dx$$

> $int\left(6 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + \frac{9}{x^2}\right), x = \mathrm{sqrt}\{7\}\, ..4.0\right)$

> $simplify(\%)$

> $evalf(\%)$

Nei, dette gikk ikke. Maple klarte ikke integralet. Da får vi be Maple om å beregne det numerisk ved å skrive $\sqrt{7}$ som et desimaltall:

> $int\left(6 \cdot \mathrm{Pi} \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + \frac{9}{x^2}\right), x = 2.645751311\, ..4.0\right)$

(ii) Rotasjon om $y-$ aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\,\pi\, x\, ds = 2\pi \int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\, dx$

> $int\left(2\cdot \mathrm{Pi}\cdot x\cdot \mathrm{sqrt}\left(1+\frac{9}{x^2}\right), x=\mathrm{sqrt}\{7\}..4\right)$

Hmmm. Skriv heller $\sqrt{7}$ som desimaltall, så går det bedre:

> $int\left(2\cdot \mathrm{Pi}\cdot x\cdot \mathrm{sqrt}\left(1+\frac{9}{x^2}\right), x=evalf(\mathrm{sqrt}(7))..4\right)$

(iii) Rotasjon om aksen $x=2$:

Radien i rotasjonen ved x er $|x-2|=x-2$ fordi $x \geq 2$ på integrasjonsintervallet. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\,\pi\,|2-x|\;ds = 2\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} (x-2)\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\,dx$$

> $int\left(2\cdot \mathrm{Pi}\cdot (x-2)\cdot \mathrm{sqrt}\left(1+\frac{9}{x^2}\right), x=\mathrm{sqrt}(7)..4\right)$

> $simplify(\%)$

> $evalf(\%)$