Ekstraoppgave 11.7.1.

b)

> $with(plots)$

> $plot3d([x, y, y^2 - x^2 + 4x], x = -3..3, y = -3..3, style = surface, color = blue, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

> $plot3d([x, y, 9 - 2 \cdot x^2 + 4x], x = -3..3, y = -3..3, style = surface, color = green, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

Det er sannelig ikke lett å si hvordan området T ser ut!!!!
Men om det er et veldefinert område, må det være skjæringskurven mellom de to flatene som bestemmer randen til projeksjonen av T i xy-planet.
Denne projeksjonen er gitt ved likningen $y^2 - x^2 + 4x = 9 - 2x^2 + 4x$, altså $x^2 + y^2 = 9$.
Det er derfor naturlig å integrere i sylinderkoordinater der z går fra den blå flaten
$z = y^2 - x^2 + 4x = (r \cdot \sin\theta)^2 - (r \cdot \cos\theta)^2 + 4r \cdot \cos\theta = -r^2\cos(2\theta) + 4r\cos\theta$
til den grønne flaten
$$z = 9 - 2x^2 + 4x = 9 - 2r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta = 9 - \frac{2r^2 \cdot (1 + \cos(2\theta))}{2} + 4r\cos\theta = 9 - r^2 - r^2\cos(2\theta) + 4r\cos\theta.$$
(Vi har innført den doble vinkelen i håp om at det skal gi enklere integrasjon, men det er naturligvis ikke nødvendig siden det er Maple som ska integrere.)
For å få med alle søylene, må vi integrere over sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 9$, altså, $0 \leq r \leq 3$ for θ en hel gang rundt, for eksempel for $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
I sylinderkoordinater er dessuten $dV = r \cdot dr\, d\theta$.
Dette gir det itererte integralet $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} \int_{z=4 r \cdot \cos\theta - r^2 \cdot \cos(2\theta)}^{9 - r^2 - r^2 \cdot \cos(2\theta) + 4 \cdot r \cdot \cos\theta} (x^2 + y^2) \cdot r \, dz\, dr\, d\theta$, der vi må skrive integranden i sylinderkoordinater.

> $int(int(int(r^2 \cdot r, z = 4 \cdot r \cdot \cos(\theta) - r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta)..9 - r^2 - r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + 4 \cdot r \cdot \cos(\theta)), r = 0..3), \theta = 0..2 \cdot \pi)$

For å sjekke at figuren virkelig er slik vi tror, tegner vi den ordentlig. (Det er det dessuten spurt etter det i oppgaven.) For å utnytte integrasjonsgrensene i det itererte integralet, er det enklest å tegne T i sylinderkoordinater.

```
> P1 := plot3d([r, theta, 4·r·cos(theta) − r^2·cos(2·theta)], r = 0..3, theta = 0..2·Pi, coords = cylindrical, style = surface, color = blue)
> P2 := plot3d([r, theta, 9 − r^2 − r^2·cos(2·theta) + 4·r·cos(theta)], r = 0..3, theta = 0..2·Pi, coords = cylindrical, style = surface,
      color = green)
> display(P1, P2, axes = boxed, labels = [x, y, z])
```

Joda! De to flatene avgrenser virkelig et lukket område i rommet. Og dreier vi figuren slik at xy-planet står rett mot oss, med z-aksen pekende rett inn i skjermen, ser vi den sirkulære projeksjonen.

Ekstraoppgave 11.7.2.

Når det gjelder kulekoordinater, har Maple en liten egenhet.
I boken (og i de fleste andre lærebøker) skrives kulekoordinater som (ρ, φ, θ) der $\rho \geq 0$ er avstanden fra origo, φ er vinkelen mellom posisjonsvektoren og z-aksen, og θ er den vanlige "polar-thetaen".
Maple skriver disse koordinatene i rekkefølgen (ρ, θ, φ).

a)

Vi tegner først de to flatene, slik at vi får en idé om fasongen til T.

```
> plot3d([rho, theta, Pi/4], rho = 0..5, theta = 0..2·Pi, coords = spherical, style = surface, color = blue, axes = boxed, labels = [x, y, z])
> plot3d([4 + cos(theta), theta, phi], theta = 0..2·Pi, phi = 0..Pi, coords = spherical,  color = green, axes = boxed, labels = [x, y, z],
      numpoints = 10000)
```

Heisann. Det ble da en morsom flate! Men siden T skal ligge innenfor den blå kjeglen, skal vi ikke ha med hele flaten. φ skal bare gå fra 0 til

$\frac{\pi}{4}$. Vi gjør et nytt forsøk:

> $plot3d\left([4+\cos(\text{theta}), \text{theta}, \text{phi}], \text{theta}=0..2\cdot\text{Pi}, \text{phi}=0..\frac{\text{Pi}}{4}, \text{coords}=\text{spherical}, \text{style}=\text{surface}, \text{color}=\text{green}, \text{axes}=\text{boxed}, \text{labels}=[\text{x}, \text{y}, \text{z}], numpoints=10000\right)$

Når vi ser på den blå kjeglen og den grønne toppen, ser det ut som de passer sammen. Vi prøver:

> $P1 := plot3d\left(\left[\text{rho}, \text{theta}, \frac{\text{Pi}}{4}\right], \text{rho}=0..5, \text{theta}=0..2\cdot\text{Pi}, \text{coords}=\text{spherical}, \text{style}=\text{surface}, \text{color}=\text{blue}\right)$

> $P2 := plot3d\left([4+\cos(\text{theta}), \text{theta}, \text{phi}], \text{theta}=0..2\cdot\text{Pi}, \text{phi}=0..\frac{\text{Pi}}{4}, \text{coords}=\text{spherical}, \text{style}=\text{surface}, \text{color}=\text{green}\right)$

> $display(P1, P2, axes=boxed, labels=[x, y, z])$

Neivel, det gjorde de altså ikke. Men vi skjønner hvordan T må se ut.
Vi velger å integrere i retning ρ innerst.
Det er klart at ρ må gå fra origo, altså $\rho = 0$, til ρ når den grønne flaten der $\rho = 4+\cos\theta$.
For å få med alle slike ρ - striper, må φ gå fra $\varphi = 0$ til $\varphi = \frac{\pi}{4}$ og θ gå en hel gang rundt, for eksempel fra $\theta = 0$ til $\theta = 2\pi$.
Dessuten er $dV = \rho^2\cdot\sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ i kulekoordinater.
Det itererte integralet blir derfor $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{4+\cos\varphi} \varphi\cdot\rho^2\cdot\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

> $int\left(int\left(int\left(\text{phi}\cdot\rho^2\cdot\sin(\text{phi}), \text{rho}=0..4+\cos(\text{theta})\right), \text{phi}=0..\frac{\text{Pi}}{4}\right), \text{theta}=0..2\cdot\text{Pi}\right)$

> $evalf(\%)$

Nå vet vi også hvordan vi kan tegne *T*:

$> P1 := plot3d\left(\left[\text{rho, theta}, \frac{\text{Pi}}{4}\right], \text{rho} = 0..4 + \cos(\text{theta}), \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}, \text{coords} = \text{spherical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{blue}\right)$

$> P2 := plot3d\left([4 + \cos(\text{theta}), \text{theta}, \text{phi}], \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}, \text{phi} = 0..\frac{\text{Pi}}{4}, \text{coords} = \text{spherical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{green}\right)$

$> display(P1, P2, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

b)

Vi tegner først flaten. (Siden $\rho \geq 0$ for alle φ, har vi ingen problemer med fortegnet til ρ:

$> plot3d([1 + \cos(\text{phi}), \text{theta}, \text{phi}], \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}, \text{phi} = 0..\text{Pi}, coords = spherical, color = red, axes = boxed, labels = [x, y, z])$

Ah! Det ble en lukket flate som minner om et eple.
T er området innenfor dette eplet.
Det itererte integralet må få integrasjonsgrensene $\rho = 0$ *til* $\rho = 1 + \cos\varphi$, $\varphi = 0$ *til* $\varphi = \pi$, $\theta = 0$ *til* $\theta = 2\pi$.
dV er fremdeles lik $\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$.
Men vi må skrive om integranden. Den må være gitt i kulekoordinater.
Siden $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$ og $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, er $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta = \rho^2 \sin^2 \varphi$.
Derved er integralet lik

$> int\left(int\left(int\left(\rho^2 \cdot \sin(\text{phi})^2 \cdot \rho^2 \sin(\text{phi}), \text{rho} = 0..1 + \cos(\text{phi})\right), \text{phi} = 0..\text{Pi}\right), \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}\right)$

$>$