Maple kan selv konstruere taylorpolynomer til en gitt funksjon om et gitt punkt. Kommandoen er *taylor* der vi må taste inn funksjonen, punktet a vi finner polynomet om, og hvilken orden n vi vil at polynomet skal ha (i akkurat den rekkefølgen).

Eksempel:

> $s := taylor(\sin(x), x = 0, 9)$

Merk:

Det siste leddet i hvert taylorpolynom kan du se bort fra. (Det betyr bare at det neste leddet er av slik grad eller høyere.)

At Maple tar med dette siste leddet, betyr at vi må sette n ett steg høyere enn orden til det taylorpolynomet vi er ute etter.

Merk:

Vi vil at Maple skal oppfatte taylorpolynomet som et helt vanlig polynom. Det gjør vi ved kommandoen *convert*:

> $p := convert(s, polynom)$

For å finne $p(1)$ for eksempel, skriver vi

> $subs(x = 1, p)$

og vil vi plotte polynomet, kan vi det også:

> $plot(p, x = 0..2\cdot\mathrm{Pi})$

Den ligner på grafen til sin x når bare ikke x er for stor.

Eksempel:

> $taylor\left(\sin\left(\sqrt{x}\right), x = 1, 7\right)$

Det ville kanskje være bedre i dette eksemplet om taylorkoeffisientene kom på desimalform. Det kan vi fikse ved å skrive ettallet som 1.0

> $taylor\left(\sin\left(\sqrt{x}\right), x = 1.0, 7\right)$

Oppgave 3.5.25

$P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_5(x)$, men siden vi skal plotte disse polynomene, gjør vi det litt annerledes: (husk at det er snakk om en tabell)

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $t := taylor(\ln(x), x = 1, n + 1) : p := convert(t, polynom) : plot(p, x = 0.5 ..4)$ **end do**

Vi skal sammenligne disse plottene med grafen til $\ln x$

> $plot(\ln(x), x = 0.5 ..4)$

Det hadde vært enklere å sammenligne om vi hadde tegnet alle grafene i samme koordinatsystem

> $P := plot(\ln(x),\ x = 0.5 ..4, color = red)$

> $\mathrm{P1} := \mathrm{plot}(\mathrm{x} - 1, \mathrm{x} = 0.5 ..4, \mathrm{color} = \mathrm{orange})$

> $\mathrm{P2} := \mathrm{plot}\left(x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2, x = 0.5 ..4, color = yellow\right)$

> $P3 := plot\left(x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3, \mathrm{x} = 0.5 ..4,\ \ \mathrm{color} = \mathrm{green}\right);$

> $P4 := plot\left(x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4, \mathrm{x} = 0.5 ..4,\ \ \mathrm{color} = \mathrm{blue}\right)$

> $P5 := plot\left(x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{1}{5}(x-1)^5, x=0.5..4,\ \ \text{color}=\text{magenta}\right)$

> $with(plots)$

> $display(P, P1, P2, P3, P4, P5)$

Det ble bedre. Her ser vi hvordan polynomene klarer å imitere logaritmen i et stadig større intervall når vi øker ordnen til taylorpolynomet.
Vi ser det kanskje enda bedre om vi belger intervallet [0.5, 3] for x.
Du kan selv endre kommandoene over for å få det slik.

Oppgave 3.5.27

a)
(i) Vi trenger bare å finne taylorpolynomet av orden 30, for de andre to får vi ved å avkorte det lengste.

> $convert(taylor(\sin(x), x=0, 31), polynom)$

For å skrive plottekommandoen, bruker vi så klipp og lim.
Siden sinus er begrenset mellom ∓ 1, mens polynomer har en tendens til å vokse ganske fort i absoluttverdi, velger vi å bruke kommandoen *implicitplot*
Vi har allrede hentet inn Maples plottekommandoer, så den er grei.

> $P := implicitplot(y=\sin(x),\quad x=0..15, y=-1.5..1.5, color=\text{red}, gridrefine=2)$

> $P1 := implicitplot\left(y=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9,\quad x=0..15, y=-1.5..1.5, color=\text{green}, gridrefine=2\right)$

> $P2 := implicitplot\Big(\ y=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9-\frac{1}{39916800}x^{11}+\frac{1}{6227020800}x^{13}$
$\quad -\frac{1}{1307674368000}x^{15}+\frac{1}{355687428096000}x^{17}-\frac{1}{121645100408832000}x^{19},\quad x=0..15, y=-1.5..1.5, color=\text{blue},$
$\quad gridrefine=2\Big)$

> $P3 := implicitplot\Big(\ y=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9-\frac{1}{39916800}x^{11}+\frac{1}{6227020800}x^{13}$
$\quad -\frac{1}{1307674368000}x^{15}+\frac{1}{355687428096000}x^{17}-\frac{1}{121645100408832000}x^{19}+\frac{1}{51090942171709440000}x^{21}$

$$-\frac{1}{25852016738884976640000}x^{23}+\frac{1}{15511210043330985984000000}x^{25}-\frac{1}{10888869450418352160768000000}x^{27}$$
$$+\frac{1}{8841761993739701954543616000000}x^{29},\ x=0..15, y=-1.5..1.5, \mathit{color}=\text{magenta}, \mathit{gridrefine}=2\Big)$$

> $display(P, P1, P2, P3)$

Se så fint polynomene imiterer en sinus. Men de er jo bare polynomer, så de klarer det bare et stykke, før de skjærer aldeles ut. Men de klarer det lenger jo høyere grad de har.

Oppgave 3.5.28

a)

> $convert\left(taylor\left(\tan(x), x=\frac{\text{Pi}}{6}, 6\right), polynom\right)$

Her vet vi at koeffisienten foran leddet av grad 5 er lik $\dfrac{f^{(5)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{5!}$

Derfor er $f^{(5)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ lik

> $\frac{104}{135}\cdot(5!)$

Oppgave 3.5.29

a) Å finne taylorpolynomet er ingen sak. Vi kaller det p

> $p := convert(taylor(\sin(x), x=0, 21), polynom)$

For å evaluere dette polynomet for ulike verdier av x, bruker vi kommandoen *subs*

Det er fristende å bruke en for-løkke for å beregne polynomverdiene det spørres om. Tellevariabelen n (eller hva vi kaller den) i en for-løkke, skal ta heltallsverdier.
Derfor skriver vi det slik:

>

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $subs\left(x = \frac{n}{10}, p\right)$ **end do**

Dette ble voldsomme brøker. Vi er antakelig bedre tjent med desimaltall:

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $evalf\left(subs\left(x = \frac{n}{10}, p\right), 7\right)$ **end do**

Oppgave 3.5.30

a)

(i) Her trenger vi ikke Maple for å derivere funksjonen. Men la oss likevel gjøre det for treningens skyld.
For å få den førstederiverte av en funksjon f skrev vi kommandoen $diff(f(x), x)$
For å få den andrederiverte skriver vi $diff(f(x), x, x)$ eller $diff(f(x), x\$2)$ **:**

> $diff(\cos(x), x, x)$

Vi trenger heller ikke Maple for å løse likningen $-\cos(x) = 0$ Løsningen er $\frac{\pi}{2} + 2\,k\pi$ for alle hele tall k

La oss likevel se hva Maple gjør om vi ber programmet om å løse likningen:

> $solve(-\cos(x) = 0, x)$

Vi fikk altså bare én av de uendelig mange løsningene. Resten må vi så finne ut selv.

(ii) Vi velger å plotte én periode av $\cos(x)$ der x går fra 0 til $2\,\pi$.

I vendepunktet $x = \frac{\pi}{2}$ er funksjonsverdien lik 0 og den deriverte lik -1

Tangenten har derfor likningen $y = 0 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

I vendepunktet $x = \frac{3\,\pi}{2}$ er funksjonsverdien lik 0 og den deriverte lik 1

Tangenten har derfor likningen $y = 0 + \left(x - \frac{3\,\pi}{2}\right)$

> $P := implicitplot(y = \cos(x),\ \ x = 0\,..2\,\mathrm{Pi}, y = -2\,..2, color = \mathrm{red})$

> $P1 := implicitplot\left(y = -x + \frac{\mathrm{Pi}}{2},\ x = 0\,..2\,\mathrm{Pi}, y = -2\,..2, color = \mathrm{blue}\right)$

> $P2 := implicitplot\left(y = x - \frac{3\,\mathrm{Pi}}{2},\ x = 0\,..2\,\mathrm{Pi}, y = -2\,..2, color = \mathrm{green}\right)$

> $display(P, P1, P2)$

(iii) Det har naturligvis med grafens form i et vendepunkt å gjøre.

Taylors restleddformel sier at forskjellen mellom $f(x)$ og tangenten i punktet $(a, f(a))$ er begrenset av $\left|\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2\right|$

Den andrederiverte er null i vendepunktet, og derfor vanligvis liten i en omegn om vendepunktet.
Derfor blir feilskranken også liten.

>