Oppgave 10.8.10:

> $with(plots)$

a)

> $plot3d\left(\dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4 + 1}, x = -3..3, y = -3..3, color = \text{"Goldenrod"}, axes = framed\right)$

Toppene i dette avgrensede landskapet havnet i de fire hjørnene. (Du ser det bedre om du dreier litt på figuren.) Vi må derfor tegne grafen over et større område. Vi prøver:

> $plot3d\left(\dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4 + 1}, x = -10..10, y = -10..10, color = \text{"Goldenrod"}, axes = framed\right)$

Det hjalp ikke. Vi tar et siste forsøk:

> $plot3d\left(\dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4 + 1}, x = -100..100, y = -100..100, color = \text{"Goldenrod"}, axes = framed\right)$

Nei, dette går ikke. La oss gå tilbake til funksjonsuttrykket og bruke hjernen i steden for Maple.
Et lite resonnement viser at funksjonsverdien er størst når både x^2 og y^2 er størst mulig, og at grenseverdien når $x^2 \to \infty$ og $y^2 \to \infty$ er lik $\dfrac{1}{2}$.
Funksjonen har altså ingen maksima, verken lokale eller globale, dersom vi ikke begrenser definisjonsområdet.

b)

> $plot3d\left(x \cdot \exp\left(-x^3 - y^2\right), x = -1..3, y = -2..2, axes = framed, color = \text{"Goldenrod"}, transparency = 0.3\right)$

Det ser ut som om funksjonen har et lokalt maksimum i nærheten av origo? Det kan ikke være selve origo, for der er $x = 0$, og

dervedfunksjonsverdien lik null. Det er også klart at eksponensialfunksjonen bare har positive funksjonsverdier, så $x > 0$ i mulige lokale maksimalpunkter. Videre er $f(-y) = f(y)$, og funksjonsverdien avtar når y^2 øker. Så $y = 0$ i eventuelle lokale maksimumspunkter.
Vi prøver derfor å tegne grafen for $x > 0$ og $y \approx 0$:

> $plot3d\left(x \cdot \exp\left(-x^3 - y^2\right), x = 0..10, y = -0.001..0.001, axes = framed, color = \text{"Goldenrod"}, transparency = 0.3\right)$

Det ser ut til at funksjonen har et eneste maksimum, og at det ligger nær punktet $(1, 0)$. Egentlig burde vi heller tegne grafen til énvariabelfunksjonen $g(x) = x \cdot \exp\left(-x^3\right)$ for $x > 0$. Men det beste er antakelig å koble inn hjernen litt igjen. For ser vi på funksjonsuttrykket, er det klart at $\exp\left(-x^3\right) \rightarrow 0$ veldig raskt når $x \rightarrow \infty$, og mye raskere enn x vokser. Så produktet går mot null. Altså er dette virkelig det eneste maksimumspunktet. For å være helt trygg, kan vi jo tegne grafen til $g(x)$:

> $plot\left(x \cdot \exp\left(-x^3\right), x = 0..100\right)$

> $plot\left(x \cdot \exp\left(-x^3\right), x = 0.9..1.1\right)$

Oj, maksimumspunktet ligger ikke så veldig nær $x = 1$ likevel. (Grafer kan bedra!)
Men vi gir oss ikke:

> $plot\left(x \cdot \exp\left(-x^3\right), x = 0.5..0.9\right)$

> $plot\left(x \cdot \exp\left(-x^3\right), x = 0.68..0.72\right)$

Vi anslår at landskapet har sin eneste topp i punktet $(0.695,\ 0,\ 0.4968)$.

>