Oppgave 8.5.10

a)

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\cos(t)^2 + 4\cos(2t)^2}\, dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t + 4\cos^2 2t}\, d$

Vi lar Maple beregne dette integralet:

> $int\left(\mathrm{sqrt}\left(\cos(t)^2 + 4\cdot\cos(2t)^2\right), t = 0..\mathrm{Pi}\right)$

Dette klarte ikke Maple å beregne eksakt. Vi ber derfor om en tilnærmet løsning:

> $evalf\left(int\left(\mathrm{sqrt}\left(\cos(t)^2 + 4\cdot\cos(2t)^2\right), t = 0..\mathrm{Pi}\right)\right)$

b)

Det foregår på tilsvarende måte når kurven er en romkurve.

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\sec(t)^2\right)^2 + 1^2}\, dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^{1} \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\sec(t)^2\right)^2 + 1^2}\, dt$.

Vi lar Maple beregne dette integralet:

> $int\left(\mathrm{sqrt}\left(\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2} + \sec(t)^4 + 1\right), t = 0..1\right)$

Ikke så uventet klarte Maple heller ikke å beregne dette integralet eksakt. Vi bruker derfor *evalf*:

> $evalf(\%)$

Oppgave 8.5.11

a)

> $plot([\sin(t), \sin(2\,t), t = 0\,..\mathrm{Pi}])$

Kurven er symmetrisk om x-aksen (på grunn av symmetrien til sinus).
Vi kan derfor finne arealet av delen i øvre halvplan, for så å multiplisere med 2.
Vi skal integrere $y\,dx = y(t)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt = \sin(2\,t)\cdot\cos(t)\;dt$, Arealet blir derfor

> $2\cdot int\left(\sin(2\,t)\cdot\cos(t), t = 0\,..\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

c)

> $plot([\mathrm{t}\cdot\sin(\mathrm{t}), t\cdot\cos(t), t = -3\,..3])$

Som i a) er kurven symmetrisk om $x-$aksen, så vi kan beregne arealet over $x-$aksen, og så multiplisere med 2.
Før vi kan regne ut arealet som avgrenses av kurven, trenger vi å finne verdien for parameteren t i origo og i skjæringspunktet nær x=1.6 på
x-aksen.
I begge disse punktene er $y = 0$ (på grunn av symmetrien i de trigonometriske funksjonene).

Altså er $t\cdot\cos(t) = 0$ og $t\cdot\sin(t) \geq 0$ i disse to punktene. Det vil si, $t = 0$ og

$$t = \frac{\pi}{2}.$$

Vi skal integrere $y\,dx = y(t)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt = t\cdot\cos(t)\cdot(\sin(t) + t\cdot\cos(t))\ dt.$

Arealet blir derfor

> $2\cdot int\left(t\cdot\cos(t)\cdot(\sin(t) + t\cdot\cos(t)),\ t = 0\,..\,\frac{Pi}{2}\right)$

Oppgave 8.5.12.

a)

Setter vi $y = xt$ får likningen formen $x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}} = 8$ som betyr at $x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}$, noe som gir parametriseringen

$$x = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad y = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t$$

> $plot\left(\left[\left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t,\ t = 0\,..5\right]\right)$

Til sammenligning kan vi bruke *implicitplot* til å tegne grafen til den gitte likningen

> $with(plots)$

> $implicitplot\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 8,\ x = 0\,..4,\ y = 0\,..4\right)$

>