Newtons metode er en iterativ metode. Det vil si, vi lager en funksjon

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

starter med en x_0 og beregner $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F(x_2)$, ...
Dette er en metode der en **for**-løkke egner seg ypperlig. Spørsmålet er bare hvor langt vi skal la indeksen n gå.
Det enkleste er å prøve seg frem, så la oss gjøre det.

Oppgave 3.4.10

a) (i)

> $plot(x^5 + x - 1, x = -10..10)$

Grafen viser at likningen har minst én løsning.
At den ikke har flere enn én følger av at $f'(x) = 4x^4 + 1 > 0$ for alle x.

(ii) Grafen viser at nullpunktet ligger mellom 2 og -2.
Vi velger derfor å starte Newtons metode med $x_0 = 0$.

Nå står det ikke i oppgaven hvor nøyaktig svaret skal være. Så la oss være litt rå, og kreve 10 sifres nøyaktighet. Svaret må da gis med 11 sifre, og utregningene gjøres med enda 2-3 sifre.
Vi velger å gjennomføre beregningene med 14 sifre, og slutte når 11 sifre er like i to påfølgende svar.
Vi vet ikke hvor langt n må gå i **for**-løkken. Men som en tommelfingerregel får man to nye sifre i hvert trinn ved Newtons metode.
Det skulle derfor være tilstrekkelig å gå til $n = \frac{11}{2} + 1$ der det siste trinnet er lagt til for kontrollen av at de to siste trinnene gir minst 11 like sifre.
Derfor skulle det være nok å la n gå fra 1 til 7.
Vi prøver. Er det ikke nok, kan vi jo bare fortsette noen trinn til.

> $x := 0$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 7 **do** $x := evalf\left(x - \frac{(x^5 + x - 1)}{5x^4 + 1}, 14\right)$ **end do**

Det gikk bra! Løsningen er altså $x = 0.7548776625$ korrekt avrundet.
(Dersom ikke forløkken fungerer, får du regne rekursjonen trinn for trinn selv.)

Nå har vi gitt x en tallverdi. Hvis det er sjanse for at den skal brukes som variabel i neste omgang, er det en god skikk å bruke *unassign* like godt først som sist:

> $unassign('x')$

(iii) Det er vanskeligere å bruke en **for**-løkke for intervallhalveringsmetoden, for prosessen i ett trinn er avhengig av resultatet fra forrige trinn.
Men det finnes det råd for. Vi bruker konstruksjonen **if** ... **then** ... **else** ... **end if**
Men da er det gunstig om Maple vet hvilken funksjon f er.
Vi skal derfor definere denne funksjonen for Maple.
Vi starter så med intervallet [-2,2] som vi kaller $[x_0, y_0]$
Deretter velger vi intervaller $[x_n, y_n]$ for $n = 1, 2, ..., 10$ og ser hva som skjer.
Altså: vi starter med å sette x=-2 og y=2:

> $x := -2 : y := 2$

For å definere funksjonen $f(x) = x^5 + x + 1$, bruker vi kommandoen $f := x \rightarrow x^5 + x + 1$ der pilen er tastet som minus etterfulgt av "større enn", altså ->

> $f := x \rightarrow x^5 + x - 1$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 10 **do** $t := evalf\left(\frac{(x + y)}{2}, 14\right)$: **if** $f(x) \cdot f(t) \leq 0$ **then** $y := t$ **else** $x := t$ **end if end do**

Det er viktig at du ser at det vi har gjort her virkelig er å be Maple om å bruke intervallhalveringsmetoden.
(t settes først lik midtpunktet av intervallet $[x_{n-1}, y_{n-1}]$. I **if** - konstruksjonen sjekkes det om $f(x_{n-1})$ og $f(t)$ har ulike fortegn, og har de det, får vi en ny y_n som blir lik midtpunktet. Hvis de ikke har ulikt fortegn, er det x_n som blir lik t.

Merk:
Maple skal gjennomføre to ting på hvert trinn i **for**-løkken: beregne t og bestemme det nye endepunktet for intervallet. To eller flere operasjoner i en **for**-løkke adskilles ved et kolon.

Listen vi fikk viser bare t-verdiene. Vi er interessert i x og y. Men de er lette å få tak i:

> x

> y

Dette er endepunktene for intervallet vi er kommet frem til så langt. Løsningen ligger et sted mellom x og y (endepunktene er også mulige).
Er vi ikke fornøyd, kan vi bare fortsette, idet vi starter med verdiene som x og y nå allerede har:

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 10 **do** $t := evalf\left(\frac{(x+y)}{2}, 14\right)$: **if** $\mathrm{f}(\mathrm{x})\cdot f(t) \leq 0$ **then** $y := t$ **else** $x := t$ **end if end do**

> x

> y

Oppgaven krevde ikke noen spesiell nøyaktighet i svaret. Vi er nå kommet frem til at løsningen ligger i et intervall der $t = 0.75487899780274$ er midtpunktet. Vi sier derfor at denne t-verdien er løsningen.
Nøyaktigheten i dette svaret er slik at feilen maksimat er lik

> $t - x$

OBS! Viktig! Både x, y og t har nå fått tallverdier av Maple. Så Maple kan ikke lenger oppfatte dem som frie variable.
Det kan skape problemer senere på dette arbeidsarket.
Derfor er det en god idé å alltid "avtallifisere" variable som har fått tallverdier ved kommandoen := når man er ferdig med å bruke dem som tall.
Det gjør vi ved kommandoen *unassign*

> $unassign('x', 'y', 't')$

Oppgave 3.4.11

Vi løser oppgaven for $x = 0.2$. Siden $\sin(y) = x$, er $y = \sin^{-1}(x)$. Derfor er det en god idé å løse oppgaven ved å løse likningen $\sin(y) = x$ med hensyn på y.
Newtons metode krever at likningen er skrevet på formen $f(y) = 0$.
Vår funksjon $f(y)$ er derfor $f(y) = \sin(y) - x = \sin(y) - 0.2$.
Den deriverte av $f(y)$ er $f'(y) = \cos(y)$
Det kan være lurt å sjekke hvor nullpunktet for $f(y)$ omtrentlig er:

> $plot(\sin(y) - 0.2, y = 0..0.4)$

Aha! vi lar derfor Newtons metode starte med $y = 0.2$. Det ser ut til at vi bare trenger tre desimaler til.

Vi lar derfor n gå fra 1 til $\frac{4}{2} + 1 = 3$ (eller litt lenger om du vil, for sikkerhets skyld)

> $y := 0.2$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 3 **do** $y := y - \frac{(\sin(y) - 0.2)}{\cos(y)}$ **end do**

Vi fikk visshet for at svaret er 0.2014 korrekt avrundet, allerede etter $n = 2$

Oppgave 3.4.12.

Vi vet at $\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Derfor er $\frac{\mathrm{Pi}}{6}$ en løsning av likningen $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Vi skriver likningen som $\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$, og løser den med hensyn på x ved Newtons metode. Når vi så multipliserer svaret med 6, har vi et estimat for Pi.

Vi bruker $x_0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ som startverdi for Newtons metode. Siden vi skal multiplisere svaret med 6, trenger vi minst 10 sikre desimaler i svaret.

Vi lar derfor n går fra 1 til 6, og ser hva det leder til. Blir det ikke langt nok, er det lett å henge på noen ekstra trinn.

Vi trenger også å regne med litt mer enn 10 sikre sifre (som er Maples standard). La oss bruke 12.

> $x := 0.5$

> **for** n **from** 1 **by** 1 **to** 6 **do** $x := evalf\left(x - \frac{\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)}{\cos(x)}, 12\right)$ **end do**

> $evalf(x \cdot 6, 10)$

For kontroll kan vi be Maple om å skrive Pi med 10 sikre sifre, som rett og slett er Maples standardform:

```
> evalf(Pi);
```

> $unassign('x')$

Oppgave 13.

a)

Vi beregner først funksjonsverdiene i randpunktene $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$:

> $f := x \to \frac{1}{3} \cdot x^3 + \cos(x)$

> $evalf(f(0))$

> $evalf\left(f\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)\right)$

Deretter leter vi etter kritiske punkter:

> $diff(f(x), x)$

Vi er interessert i løsninger av likningen $x^2 - \sin x = 0$. For å få en idé om hvor de er, plotter vi først grafen til $x^2 - \sin x$:

> $plot\left(x^2 - \sin(x), x = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

Aha! det er kritiske punkter i $x = 0$ og omtrent i midtpunktet mellom $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{16}$. At $x = 0$ er en løsning, ser vi egentlig umiddelbart. Den andre løsningen er nok ikke eksakt. Så vi forbedrer estimatet $x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{16}\right)$ ved hjelp av Newtons metode. Likningen vi skal løse er $x^2 - \sin x = 0$, så iterasjonen er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(x_n^2 - \sin x_n\right)}{2x_n - \cos x_n}.$$

> $x := evalf\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}+\frac{5\cdot\mathrm{Pi}}{16}\right)\right)$

> **for** n **from** 1 **to** 5 **do** $t := x - \frac{\left(x^2 - \sin(x)\right)}{2\cdot x - \cos(x)}$: $x := t$ **end do**

Så beregner vi funksjonsverdien i de to kritiske punktene. Det vil si, vi har allerede beregnet funksjonsverdien i $x = 0$, så vi trenger bare beregne verdien for denne x-verdien som Maple nettopp fant for oss:

> $evalf(f(x))$

Som kontroll kan vi naturligvis også beregne denne funksjonsverdien slik:

> $evalf\left(\frac{(0.8767262154)^3}{3} + \cos(0.8767262154)\right)$

Konklusjon: funksjonen har maksimum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.291928196$ og minimum $f(0.8767262154) = 0.8643024928$. For moro skyld kan vi tegne grafen til f, men da må x slutte å være tallet 0.8767262154 og bli en fri variabel igjen:

> $unassign('x')$

> $plot\left(f(x), x = 0..\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

>